

PROGRAMME DE COLLE

SEMAINE 5

CHAPITRE 3 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble \mathbb{C} :
 - définition, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
 - Règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
 - Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
 - Affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$. Caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O.
- Conjugué d'un nombre complexe :
 - définition et image ponctuelle du conjugué
 - propriétés :
 - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
 - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
 - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
 - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : 4 définitions équivalentes : par parties réelle et imaginaire - par le complexe et son conjugué - par une distance - par une norme de vecteur .
Propriétés du module :
 - module d'un réel
 - comparaison entre $|Re(z)|$ et $|z|$, entre $|Im(z)|$ et $|z|$
 - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit ou d'un quotient de complexes
 - module de $\frac{z}{|z|}$
 - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.
- Exponentielle imaginaire.
 - Définition
 - Caractérisation des complexes de module 1.
 - Propriétés :
 - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
 - ✓ exponentielle imaginaire d'une somme d'arguments, de l'opposé d'un argument
 - ✓ formules de Moivre, d'Euler, identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
 - Définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
 - Forme trigonométrique d'un complexe non nul
 - Caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
 - Forme quasi-trigonométrique
 - Propriétés des arguments : $arg(zz')$, $arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques »
 - quotient et puissance de complexes
 - linéariser un produit de sinus et cosinus
 - calcul de $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
 - écriture de $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$
- Applications « géométriques »
 - Distance entre deux points. Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
 - Angle entre deux vecteurs. Description par les complexes de l'alignement, d'un cercle de diamètre connu.
- Exponentielle complexe :
 - définition de l'exponentielle complexe
 - module, arguments, parties réelle et imaginaire d'une exponentielle complexe
 - propriétés : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \dots$, $e^{z+z'} = \dots$, $e^{z-z'} = \dots$, $e^{-z} = \dots$, $\overline{e^z} = \dots$.

III Racines carrées complexes-Equations polynomiales.

- Racines carrées d'un complexe :
 - Définition
 - Théorème d'existence
 - Deux méthodes d'obtention.
- Théorème de factorisation dans \mathbb{C} d'une expression polynômiale de degré 2 à coefficients complexes. Somme et produit des racines. Cas d'une expression à coefficients réels et $\Delta < 0$.
- $\begin{cases} u + v = s \\ us = p \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont les racines de } P(z) = z^2 - sz + p.$
- Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant une de ces racines.

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe, $n \in \mathbb{N}^*$

- Définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :
 - théorème donnant les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
 - illustration (polygone régulier)
 - exemples : racines $3^{\text{ièmes}}$ de l'unité (définition et propriétés de j), $4^{\text{ièmes}}$ de l'unité
 - somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ($n \geq 2$).
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul:
 - théorème donnant les n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul
 - méthode d'obtention.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

La question de cours demandée peut être :

A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .

ET /OU

B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:

- 1) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- 2) Formule d'Euler et identités du losange.
- 3) Le théorème de factorisation d'une expression polynomiale de degré 2 à coefficients complexes.
- 4) Le théorème explicitant les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 5) Le théorème donnant les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe a non nul où $n \in \mathbb{N}^*$.
- 6) Savoir compléter les formules

Soit A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives a, b, c et d .

$$AB = |a - b| = |b - a|$$

$$(\vec{i}, \vec{AB}) \equiv \arg(b - a) [2\pi] \text{ si } A \neq B$$

$$(\vec{AB}, \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) [2\pi] \text{ si } A \neq B \text{ et } C \neq D \text{ sont distincts.}$$

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.