

# Programme de colle 6

## CHAPITRE 5 Applications, injections, surjections et bijections.

### I Généralités.

- Définitions d'une application, d'une fonction, de l'image d'un objet et d'un antécédent .
- Restriction d'une fonction
- Image directe ou réciproque d'une partie.
- Composée d'applications : définition, associativité et non commutativité.
- Fonction identité : définition et élément neutre pour la composition.

### II Applications injectives, surjectives et bijectives : cas général

#### Applications injectives

- Trois définitions équivalentes. Illustration.
- Composée d'injections
- Composée injective
- Restriction de l'ensemble de départ pour « rendre une application injective ».

#### Applications surjectives

- Deux définitions équivalentes
- Composée d'injections
- Composée injective.
- Restriction de l'ensemble d'arrivée pour « rendre une application surjective ».

#### Applications bijectives

- Deux définitions équivalentes
- Bijection réciproque :
  - Définition
  - Propriétés :  $f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f, (f^{-1})^{-1}$ .
- Caractérisation par l'existence d'une application  $g: F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = id_F$  et  $g \circ f = id_E$ .
- Composée de bijections et bijection réciproque de la composée.

### III Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .

#### Fonctions continues sur un intervalle $I$

- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Image directe d'un intervalle par une fonction continue.
- Signe d'une fonction continue sur un intervalle

#### Courbes de $f$ et de $f^{-1}$

- Symétrie par rapport à la première bissectrice. Conséquence : propriétés de  $f^{-1}$  ( limite, continuité, tangentes particulières...) héritées de propriétés de  $f$  .
- Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  et bijective de  $I$  sur  $J$  alors  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J$  et de même monotonie que  $f$ .
- Si  $f$  est impaire sur  $I$  et bijective de  $I$  sur  $J$  alors  $f^{-1}$  est impaire.

#### Théorème des bijections continues et strictement monotones.

**TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.**

**La question de cours demandée peut être :**

**A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .**

**ET /OU**

**B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:**

- 1) La composée de deux applications injectives est injective. La composée de deux applications surjectives est surjective.
- 2) Si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective. Si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.
- 3) Si  $f$  est bijective de  $E$  sur  $F$  et  $g$  est bijective de  $F$  sur  $E$  alors  $g \circ f$  est bijective de  $E$  sur  $E$  et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .
- 4) Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . S'il existe une application  $g: F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = id_F$  et  $g \circ f = id_E$  alors  $f$  est bijective de  $E$  sur  $F$  et  $f^{-1} = g$ .

**Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.**