DS 2
Mathématiques

CALCULATRICE <u>NON</u> AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).

Les cinq exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
- ✓ Vous n'avez pas <u>affirmé d'emblée</u> que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.
- ✓ Le <u>raisonnement</u> est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.
- ✓ Les <u>liens logiques</u> (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.
- ✓ La <u>phrase réponse</u>, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant.

Exercice 1 Partie bornée

Soit $A = \{\frac{3m+2n}{3m^2+4mn} / m \in \mathbb{N}^* \ et \ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3m+2n}{3m^2+4mn} \leq \frac{1}{m}$.
2. En déduire que A admet un maximum et le déterminer.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{5}{7p} \in A$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un élément a de A tel que $0 < a < \varepsilon$.
5. A admet-elle un minimum ?

Exercice 2 Trois questions indépendantes réelles et complexes !

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1} \rfloor$ et en déduire que cette partie entière est impaire.
2. Montrer que pour tous complexes a, b et c, $1 \leq |a| + |a+b| + |b+c| + |c+1|$.
3. Soient a , b, c trois nombres complexes distincts et de module 1. Montrer que $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2} \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 3 Trigonométrie et sommes.

1. Montrer que pour tout réel t, $\cos(3t) = 4cos^3(t) - 3\cos(t)$.
2. Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.
   a. Calculer $S_n(x) \ pour \ x \equiv 0[2\pi]$.
   b. Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$ (on demande une expression sans Σ).
   c. Recalculer $S_n(x)$ par une autre méthode (en utilisant les complexes).
   d. En déduire $T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^3\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.
3. Soit $\theta = \frac{\pi}{10}$.
   a. Justifier que $\cos(3\theta) = \sin(2\theta)$.
   b. Déduire de 1) et 3a) que : $4sin^2(\theta) + 2\sin(\theta) - 1 = 0$.
   c. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
   d. Vérifier alors le résultat $2d$. pour $n = 4$.

Exercice 4 Equations et racines nièmes

Soit $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. Résoudre l'équation $(e): Z^2 - 2\cos(\theta)\, Z + 1 = 0$ d'inconnue Z complexe. On discutera du nombre de solutions distinctes en fonction du réel θ .
2. Soit (E) l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 2\cos(\theta)$ d'inconnue z complexe .
   a. Supposons ici que : $\theta \in]0,\pi[$. Résoudre l'équation (E).

   b. Supposons maintenant que $\theta = 0$. Résoudre l'équation (E) .

Exercice 5 Une bijection complexe

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $R = (0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et T_a l'application de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ dans $\mathbb{C}$ telle que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a+3i\}, T_a(z) = \frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a \in \{1-2i, -i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais , on suppose que le complexe a est distinct de $1-2i$ et de $-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire ${T_a}^{-1}$.
3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : ${T_a}^{-1} = T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a.
4. Résoudre l'équation $T_a(z) = z$, d'inconnue z complexe . On note p et q les solutions trouvées telles que $|p| < |q|$.
   p et q sont appelés les points fixes complexes de T_a . On note P le point d'affixe p et Q celui d'affixe q.
5. Montrer qu'il existe un complexe δ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a+3i, q\}$, $\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q} = \delta \frac{z-p}{z-q}$. Vous déterminerez δ en fonction de a.
6. Soit z complexe distinct de $a+3i$, p et q et M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $T_a(z)$.
   Etablir une relation entre les angles $\arg(\delta)$, $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ})$ et $(\overrightarrow{M'P}, \overrightarrow{M'Q})$.
7. Supposons que $arg(\delta) \equiv 0[\pi]$. Montrer que : $M \in (PQ) \Leftrightarrow M' \in (PQ)$.
8. Désormais $a = 0$ et $\delta = \frac{2-i}{5}$.

Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = T_0(z_n)$.
On note M_n le point d'affixe z_n.

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{z_n-p}{z_n-q}$. Justifier que la suite U est géométrique de raison δ.

   b. En déduire z_n en fonction de n .

   c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_n - (1+i)| \leq \frac{\sqrt{2}|\alpha|^n}{1-|\alpha|^n}$.

   d. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (1+i)| = 0$. Traduire géométriquement ce résultat.

FIN