Corrigé du DS 2

Exercice 1 Partie bornée

Soit $A=\{\frac{3m+2n}{3m^2+4mn}/m\in\mathbb{N}^*\ et\ n\in\mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\forall m\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, \frac{3m+2n}{3m^2+4mn}\leq\frac{1}{m}$.
2. En déduire que A admet un maximum et le déterminer.
3. Montrer que $\forall p\in\mathbb{N}^*, \frac{5}{7p}\in A$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe un élément a de A tel que $0<a<\varepsilon$.
5. A admet-elle un minimum ?

1. Soit $m\in\mathbb{N}^*et\ n\in\mathbb{N}$, $\frac{3m+2n}{3m^2+4mn}-\frac{1}{m}=\frac{1}{m}\left[\frac{3m+2n}{3m+4n}-1\right]=\frac{1}{m}\left[\frac{3m+2n-3m-4n}{3m+4n}\right]=\frac{1}{m}\left[\frac{-2n}{3m+4n}\right]<0$. Ainsi, $\forall m\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, \frac{3m+2n}{3m^2+4mn}\leq\frac{1}{m}$.

2. Alors, $\forall m\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, \frac{3m+2n}{3m^2+4mn}\leq\frac{1}{m}\leq 1$. Donc 1 majore A et $1=\frac{3\times1+2\times0}{3\times1^2+4\times1\times0}\in A$. Ainsi, $1=\max(A)$.

3. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $\frac{3\times p+2\times p}{3p^2+4p\times p}=\frac{5p}{7p^2}=\frac{5}{7p}$ donc $\frac{5}{7p}\in A$.

4. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. $\frac{5}{7p}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{7p}{5}>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow p>\frac{5}{7\varepsilon}$. Prenons $p=\left\lfloor\frac{5}{7\varepsilon}\right\rfloor+1$. Alors $p\in\mathbb{N}^*$ et $p>\frac{5}{7\varepsilon}$ donc $0<\frac{5}{7p}<\varepsilon$. Donc $a=\frac{5}{7p}$ convient.

5. Aucun réel $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$ne minore A puisqu'il existe toujours un élément de A strictement inférieur ε . Les éléments de A étant tous strictement positifs, aucun réel de A ne minore A. Ainsi, A n'a pas de minimum.

Exercice 2 Pêle-mêle … questions indépendantes réelles ou complexes ?

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1}\rfloor$ est impair.
2) Montrer que pour tous complexes a,b et c, $1\leq|a|+|a+b|+|b+c|+|c+1|$.
3) Soient a,b,c trois nombres complexes distincts et de module 1 . Montrer que $\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}\in\mathbb{R}^+$.

1) $n^2+n+\frac{1}{4}<n^2+n+1<n^2+2n+1$ donc $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<n^2+n+1<(n+1)^2$. Alors, $n+\frac{1}{2}<\sqrt{n^2+n+1}<n+1$ et $2n+1<2\sqrt{n^2+n+1}<2n+2$. J'en déduis que $\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1}\rfloor=2n+1$ et ainsi, $\lfloor 2\sqrt{n^2+n+1}\rfloor$ est impair.

2) $1=|-1|=|a-(a+b)+(b+c)-(c+1)|\underset{\substack{\text{inégalité}\\ \text{triangulaire}\\ \text{généralisée}}}{\leqq}|a|+|a+b|+|b+c|+|c+1|$.

3) Posons $a=e^{i\theta}, b=e^{i\beta}\ et\ c=e^{i\mu}$. Comme b est de module 1, $b\neq0$. De plus, $c\neq a$. Donc, $b(c-a)^2\neq0$. Et,

$$\frac{a(c-b)^2}{b(c-a)^2}=\frac{e^{i\theta}(e^{i\mu}-e^{i\beta})^2}{e^{i\beta}(e^{i\mu}-e^{i\theta})^2}=\frac{e^{i\theta}e^{i2\mu}(1-e^{i(\beta-\mu)})^2}{e^{i\beta}e^{i2\mu}(1-e^{i(\theta-\mu)})^2}=\frac{e^{i\theta}\left(-2i\sin\left(\frac{\beta-\mu}{2}\right)e^{i\frac{\beta-\mu}{2}}\right)^2}{e^{i\beta}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\mu}{2}}\right)^2}=\frac{\sin^2\left(\frac{\beta-\mu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right)}e^{i(\theta-\beta+\beta-\mu-(\theta-\mu))}=\frac{\sin^2\left(\frac{\beta-\mu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right)}e^{i0}=\frac{\sin^2\left(\frac{\beta-\mu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta-\mu}{2}\right)}\in\mathbb{R}^+$$

Exercice 3 Trigonométrie et sommes.

1. Montrer que pour tout réel t, $\cos(3t)=4\cos^3(t)-3\cos(t)$.

2. Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x)=\sum_{k=0}^n\cos(kx)$.
   a. Calculer $S_n(x)$ pour un réel x tel que $x\equiv0[2\pi]$.
   b. Soit x un réel tel que $x\not\equiv0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.
   c. Recalculer $S_n(x)$, par une autre méthode (en passant en complexe), et retrouver les résultats $2.a$ et $2.b$.
   d. En déduire $T_n=\sum_{k=0}^n\cos^3\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.

3. Soit $\theta=\frac{\pi}{10}$.
   a. Justifier que $\cos(3\theta)=\sin(2\theta)$.
   b. Déduire de 1) et 3a) que : $4\sin^2(\theta)+2\sin(\theta)-1=0$.
   c. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
   d. Vérifier alors le résultat $2d$. pour $n=4$.

1. Soit t un réel.

$\cos(t)^3=\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right]^3=\frac{1}{8}\left[e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{3it}\right]=\frac{1}{8}[2\cos(3t)+6\cos(t)]$. Ainsi, $\cos(3t)=4\cos^3(t)-3\cos(t)$.

2. a. Soit x un réel tel que $x\equiv0[2\pi]$. Alors $\forall k\in\mathbb{N}, kx\equiv0[2\pi]$ donc $\cos(kx)=1\ et\ S_n(x)=\sum_{k=0}^n1=n+1$.

   b. Soit $x\not\equiv0[2\pi]$. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)=\frac{1}{2}\left(\sin\left[\frac{x}{2}+kx\right]+\sin\left[\frac{x}{2}-kx\right]\right)$.

Donc, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n(x)=\sum_{k=0}^n\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\left(\sin\left[\frac{x}{2}+kx\right]+\sin\left[\frac{x}{2}-kx\right]\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\left(\underbrace{\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]}_{u_{k+1}}-\underbrace{\sin\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]}_{u_k}\right)=\frac{1}{2}[u_{n+1}-u_0]=\frac{1}{2}\left(\sin\left[\left(n+1-\frac{1}{2}\right)x\right]-\sin\left[\left(-\frac{1}{2}\right)x\right]\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]+\sin\left[\frac{x}{2}\right]\right)=$

$\sin\left[\frac{(2n+1)x}{4}+\frac{x}{4}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)x}{4}-\frac{x}{4}\right]=\sin\left[\frac{n+1}{2}x\right]\cos\left[\frac{nx}{2}\right]$. Donc $S_n(x)=\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$.

   c. $S_n(x)=\sum_{k=0}^n\cos(kx)=\sum_{k=0}^n\mathrm{Re}(e^{ikx})=Re(\sum_{k=0}^ne^{ikx})=Re\left(\sum_{k=0}^n(e^{ix})^k\right)$.

Si x un réel tel que $x\equiv0[2\pi]$ alors $e^{ix}=1$ donc $S_n(x)=Re(\sum_{k=0}^n1)=n+1$.

Si x un réel tel que $x\not\equiv0[2\pi]$ alors $e^{ix}\neq1$ donc $S_n(x)=Re\left(\frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1}\right)=Re\left(\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)=Re\left(\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)e^{i\frac{n+1}{2}x}}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}\right)=Re\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)e^{i\frac{n}{2}x}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=$

$Re\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right)\right]=\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$.

d. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^3\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos\left(3\frac{k\pi}{5}\right) + 3\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[S_n\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 3S_n\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$T_n = \frac{1}{4}[\left(\frac{\sin\left(\frac{3(n+1)\pi}{10}\right)}{sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{10}\right) + 3\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{10}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{10}\right)]$.

3. Soit $\theta = \frac{\pi}{10}$.

a. $\cos(3\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{10}\right) = \sin(2\theta)$.

b. Alors d'après 1) et la formule d'angle double du sinus, $4cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.
Donc, $[4cos^2(\theta) - 3 - 2\sin(\theta)]\cos(\theta) = 0$. Or, $\cos(\theta) \neq 0$ donc $4cos^2(\theta) - 3 - 2\sin(\theta) = 0$. J'en déduis que : $4\left(1 - sin^2(\theta)\right) - 3 - 2\sin(\theta) = 0$ et ainsi, $4sin^2(\theta) + 2\sin(\theta) - 1 = 0$.
Posons $\Delta = 4 + 16 = 20 = 4 \times 5 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$. $Alors\ \sin(\theta) = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ \sin(\theta) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme de plus $\sin(\theta) > 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin(\theta) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

c. $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8}\left(1 + 5 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{8}\right) - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

d. $T_4 = \sum_{k=0}^{4} \cos^3\left(\frac{k\pi}{5}\right) = 1 + \cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^3\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos^3\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos^3\left(\frac{4\pi}{5}\right) \overset{\substack{car\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \\ et\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)}}{=} 1.$

D'autre part, $\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{3(4+1)\pi}{10}\right)}{sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{12\pi}{10}\right) + 3\left(\frac{\sin\left(\frac{(4+1)\pi}{10}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 3\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-1}{cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right)\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + 3\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}(1+3) = 1$. OK !!!

Exercice 4 Equations et racines nièmes

Soit $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. Résoudre l'équation (e): $Z^2 - 2\cos(\theta)\,Z + 1 = 0$ d'inconnue Z complexe. On discutera du nombre de solutions distinctes en fonction du réel θ .

2. Soit (E) l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 2\cos(\theta)$ d'inconnue z complexe .

a. Supposons ici que : $\theta \in]0,\pi[$. Résoudre l'équation (E).

b. Supposons maintenant que $\theta = 0$. Résoudre l'équation (E) .

1. Posons $\Delta = 4cos^2(\theta) - 4 = 4(cos^2(\theta) - 1) = 4\left(-sin^2(\theta)\right) = 2^2 i^2 sin^2(\theta) = \left(2isin(\theta)\right)^2$.

Alors les solutions de (e) sont $Z_1 = \frac{2\cos(\theta)+isin(\theta)}{2} = e^{i\theta}\ et\ Z_2 = \frac{2\cos(\theta)-isin(\theta)}{2} = e^{-i\theta}$.

Si $\Delta = 0\ \ i.e. sin(\theta) = 0\ i.e. \theta \in \{0,\pi\}$ alors $Z_2 = Z_1$ et (e) a une unique solution $e^{i\theta}$ qui est égale à 1 si $\theta = 0$ et à -1 si $\theta = \pi$.
Si $\Delta \neq 0\ \ i.e. \theta \notin \{0,\pi\}$ alors $Z_2 \neq Z_1$ et (e) a deux solutions distinctes et conjuguées $e^{i\theta}\ et\ e^{-i\theta}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$. $Posons\ Z = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$.

z solution de $(E) \Leftrightarrow Z + \frac{1}{Z} = 2\cos(\theta) \Leftrightarrow Z^2 - 2\cos(\theta)\,Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = e^{i\theta}\ ou\ Z = e^{-i\theta} \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{i\theta}\ ou\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = e^{-i\theta}$

$\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}$ est une racine nième de $e^{i\theta}$ ou de $e^{-i\theta}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{i\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ ou $\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{-i\theta}{n}} e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$ (car les racines nièmes de l'unité sont $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$ ou encore $e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / z\left(1 - e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$ ou $z\left(1 - e^{-i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{-i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / z\left(1 - e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$ ou $z\left(1 - e^{-i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{-i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$.

Or, $1 - e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow 2k\pi \equiv -\theta[2n\pi] \Leftrightarrow k \equiv -\frac{\theta}{2\pi}[n]. Or, 0 < \theta < \pi\ donc\ 0 > -\frac{\theta}{2\pi} > -\frac{1}{2}\ donc\ \ -\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ et par suite , aucun entier k ne vérifie $k \equiv -\frac{\theta}{2\pi}[n]$ donc $\forall k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket,\ 1 - e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \neq 0$.

Donc, z solution de $(E) \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / z = -i\left(\frac{1+e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}}{1-e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}}\right) = -i\left(\frac{2\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}}\right) = \text{cotan}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)$ ou $z = -\text{cotan}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)$.

Ainsi, $Sol(E) = \left\{\text{cotan}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right), -\text{cotan}\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right) / k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket\right\}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$. $Posons\ Z = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n$.

z solution de $(E) \Leftrightarrow Z + \frac{1}{Z} = 2 \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$

$\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i}$ est une racine nième de l' unité $\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket / z\left(1 - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

Pour $k = 0$, $1 - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = 0\ mais\ 1 + e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = 2 \neq 0$. Donc l e cas "k=0" est impossible. Par contre, si $k \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket$ alors $1 - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \neq 0$.

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket / z\left(1 - e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) = -i\left(1 + e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket / z = -i\left(\frac{1+e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}}{1-e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}}\right) = \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Ainsi, $Sol(E) = \left\{\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket\right\}$.

Exercice 5 Une bijection complexe

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $R=(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $a\in\mathbb{C}$ *et* T_a l'application définie sur $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ et à valeurs complexes par : $T_a(z)=\frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}$.

1. Montrer que T_a est constante si et seulement si $a\in\{1-2i,-i\}$. Déterminer le cas échéant, la valeur de cette constante.

Désormais , on suppose que le complexe a est distinct de $1-2i$ et de $-i$. Autrement dit, T_a n'est pas constante.

2. Montrer que T_a réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{d\}$, où d est un nombre complexe à préciser et décrire ${T_a}^{-1}$.

3. Montrer qu'il existe un complexe b tel que : ${T_a}^{-1}=T_b$. Vous exprimerez b en fonction de a.

4. Résoudre l'équation $T_a(z)=z$, d'inconnue z complexe . On note p *et* q les solutions trouvées telles que $|p|<|q|$.
p et q sont appelés les points fixes complexes de T_a . On note P le point d'affixe p et Q celui d'affixe q.

5. Montrer qu'il existe un complexe δ tel que : $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{\,a+3i\,,\,q\}$, $\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}=\delta\frac{z-p}{z-q}$. Vous déterminerez δ en fonction de a.

6. Soit z complexe distinct de $a+3i$, p *et* q *et* M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $T_a(z)$.
Etablir une relation entre les angles $\arg(\delta)$, $(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ})$ *et* $(\overrightarrow{M'P},\overrightarrow{M'Q})$.

7. Supposons que $arg(\delta)\equiv 0[\pi]$. Montrer que : $M\in(PQ)\Leftrightarrow M'\in(PQ)$.

8. Désormais $a=0$ *et* $\delta=\frac{i}{2i-1}=\frac{2-i}{5}$.

Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0=i$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_{n+1}=T_0(z_n)$. On note M_n le point d'affixe z_n.

a. Placer les points P, M_0, M_1 *et* M_2 dans le plan.

b. $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=\frac{z_n-p}{z_n-q}$. Justifier que la suite U est géométrique.

c. En déduire z_n en fonction de n .

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, |z_n-(1+i)|\le\frac{\sqrt{2}|\alpha|^n}{1-|\alpha|^n}$.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-(1+i)|=0$. Traduire géométriquement ce résultat.

1. T_a est constante $\Longrightarrow T_a(0)=T_a(3i)\Longrightarrow\frac{2(1-i)}{-a-3i}=\frac{(1-a)3i+2(1-i)}{3i-a-3i}\Longrightarrow(2-2i)(-a)=(-a-3i)(-3ia+2+i)$

$\Longrightarrow 3ia^2-(9+3i)a+3-6i=0\Longrightarrow ia^2-(3+i)a+1-2i=0\quad\underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{\Delta=2i=(1+i)^2\\ a_1=\frac{3+i-(1+i)}{2i}=\frac{2}{2i}=-i\\ a_2=\frac{3+i+(1+i)}{2i}=\frac{2+i}{i}=(-i)(2+i)=1-2i}}\quad a=a_1\ ou\ a=a_2.$

Réciproquement,

si $a=a_1$ alors $\forall z, T_{a_1}(z)=\frac{(1+i)z+2(1-i)}{z+i-3i}=\frac{(1+i)\left[z+\frac{2(1-i)}{1+i}\right]}{z+i-3i}\underbrace{=}_{car\,\frac{2(1-i)}{1+i}=\frac{2(1-i)^2}{|1+i|^2}=-\frac{4i}{2}=-2i}(1+i)\frac{[z-2i]}{z-2i}=(1+i)$.Donc T_{a_1} est constante.

Si $a=a_2$ alors $\forall z, T_{a_2}(z)=\frac{(2i)z+2(1-i)}{z-1-i}=\frac{(2i)\left[z+\frac{(1-i)}{i}\right]}{z-1-i}\underbrace{=}_{car\,\frac{(1-i)}{i}=-i(1-i)=-1-i}(2i)\frac{z-1-i}{z-1-i}=2i$.Donc T_{a_2} est constante.

J'en conclus que T_a est constante si et seulement si $a\in\{1-2i,-i\}$.

2. Désormais $a\notin\{1-2i,-i\}$ et T_a n' est pas constante.
Soit $\omega\in\mathbb{C}$. Cherchons tous les antécédents de ω par T_a en résolvant l'équation $T_a(z)=\omega$ d'inconnue z complexe.
Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$.

$$z\ est\ un\ antécédent\ de\ \omega\ par\ T_a\Leftrightarrow T_a(z)=\omega\Leftrightarrow\frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}=\omega\Leftrightarrow(1-a)z+2(1-i)=\omega(z-a-3i)$$

$$\Leftrightarrow(1-a)z-\omega z=-2(1-i)-\omega(a+3i)\quad\Leftrightarrow[1-a-\omega]z=-2(1-i)-\omega(a+3i)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{[1-a-\omega]}\ si\ \omega\neq1-a\\ 0=-2(1-i)-(1-a)(a+3i)\ si\ \omega=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{-2(1-i)-\omega(a+2i)}{1-a-\omega}\ si\ \omega\neq1-a\\ a^2+(3i-1)a-2-i=0\ si\ \omega=1-a\end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}^{\substack{en\ multipliant\\ la\ 2ème\ ligne\\ par\ i}}\begin{cases}z=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}\ si\ \omega\neq1-a\\ ia^2+(-i-3)a-2i+1=0\ si\ \omega=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}\ si\ \omega\neq1-a\\ \underbrace{a=a_1\ ou\ a=a_2}_{impossible}\ si\ \omega=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}\ si\ \omega\neq1-a\\ impossible\ si\ \omega=1-a\end{cases}$$

Donc tout complexe $\omega\neq1-a$ admet un et un seul antécédent $\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$ par T_a. Mais $\omega=1-a$ n'a pas d'antécédent par T_a. J'en conclus que T_a est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{a+3i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{1-a\}$. Et $\forall\omega\in\mathbb{C}\backslash\{1-a\}, {T_a}^{-1}(\omega)=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}$.

3. $b+3i=1-a\Leftrightarrow b=1-3i-a$. Posons $b=1-3i-a$.
Alors, $a=1-3i-b$ et $\forall\omega\in\mathbb{C}\backslash\{b+3i\},\omega\in\mathbb{C}\backslash\{1-a\}\ et$

$${T_a}^{-1}(\omega)=\frac{-2(1-i)-\omega(a+3i)}{1-a-\omega}=\frac{-2(1-i)-\omega(1-3i-b+3i)}{b+3i-\omega}=\frac{-2(1-i)-\omega(1-b)}{b+3i-\omega}=\frac{\omega(1-b)+2(1-i)}{\omega-(b+3i)}=T_b(\omega).$$ Ainsi, ${T_a}^{-1}=T_b$.

$$T_a(z)=z\Leftrightarrow\frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}=z\Leftrightarrow(1-a)z+2(1-i)=z(z-a-3i)\Leftrightarrow z^2-(1+3i)z-2+2i=0\quad\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\Delta=(1+3i)^2-4(-2+2i)=-2i=(1-i)^2\\ z_1=\frac{1+3i-1+i}{2}=2i\\ z_2=\frac{1+3i+1-i}{2}=1+i}}z=2i\ ou\ z=1+i.$$

Comme $|1+i|=\sqrt{2}<2=|2i|$, $p=1+i$ et $q=2i$ sont les deux points fixes de T_a.

$$\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}=\frac{\frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}-(1+i)}{\frac{(1-a)z+2(1-i)}{z-a-3i}-2i}=\frac{(1-a)z+2(1-i)-(1+i)(z-a-3i)}{(1-a)z+2(1-i)-2i(z-a-3i)}=\frac{(-i-a)z+(i-1)+(1+i)a}{(1-a-2i)z+2(-3-i)+2ia}=\frac{(-i-a)}{(1-a-2i)}\frac{z+\frac{[(i-1)+(1+i)a]}{(-i-a)}}{z+\frac{2(-3-i)+2ia}{(1-a-2i)}}.$$

$\frac{[(i-1)+(1+i)a]}{(-i-a)}+(1+i)=\frac{[(i-1)+(1+i)a]-(i+a)(1+i)}{(-i-a)}=0\,.Donc,\frac{[(i-1)+(1+i)a]}{(-i-a)}=-(1+i)=-p$. De même, $\frac{2(-3-i)+2ia}{(1-a-2i)}=-q$.

Donc, $\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}=\frac{(-i-a)}{(1-a-2i)}\frac{z-p}{z-q}$. Donc $\delta=\frac{(-i-a)}{(1-a-2i)}$ vérifie $\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}=\delta\frac{z-p}{z-q}$.

4. $\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}=\delta\frac{z-p}{z-q}$. Donc $\arg\left(\frac{T_a(z)-p}{T_a(z)-q}\right)\equiv\arg(\delta)+\arg\left(\frac{z-p}{z-q}\right)\ [2\pi]$ ce qui signifie : $\left(\widehat{M'P,M'Q}\right)\equiv\arg(\delta)+\left(\widehat{MP,MQ}\right)[2\pi]$.

5. Comme $arg(\delta) \equiv 0[\pi]$, $(\widehat{M'P, M'Q}) \equiv (\widehat{MP, MQ})[\pi]$. Donc $M \in (PQ) \Leftrightarrow (\widehat{MP, MQ}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow (\widehat{M'P, M'Q}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow M \in (P'Q')$.

6. $a = 0 \; et \;\; \delta = \frac{(-i)}{(1-2i)} = \frac{(-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2-i}{5}$.

a. Alors $\forall n, U_{n+1} = \frac{T_a(z_n)-p}{T_a(z_n)-q} = \delta\frac{z_n-p}{z_n-q} = \delta U_n$. Donc la suite U est géométrique de raison δ. Donc $\forall n, U_n = \delta^n U_0 = \delta^n \frac{i-p}{i-q} = -i\delta^n$

b. $\frac{z_n-p}{z_n-q} = -i\delta^n$. Donc, $z_n - p = -i\delta^n(z_n - q)$ et par suite, $(1 + i\delta^n)z_n = p + i\delta^n q$. Ainsi, $\forall n, z_n = \frac{p+i\delta^n q}{1+i\delta^n} = \frac{1+i-2\delta^n}{1+i\delta^n}$.

c. $\forall n, |z_n - (1 + i)| = \left|\frac{1+i-2\delta^n}{1+i\delta^n} - (1 + i)\right| = \left|\frac{1+i-2\delta^n-(1+i)(1+i\delta^n)}{1+i\delta^n}\right| = \left|\frac{-2\delta^n-(1+i)i\delta^n}{1+i\delta^n}\right| = \left|\frac{(-1-i)\delta^n}{1+i\delta^n}\right| = \frac{|-1-i||\delta|^n}{|1+i\delta^n|} = \sqrt{2}\frac{|\delta|^n}{|1+i\delta^n|}$. Or la deuxième inégalité triangilaire assure que $|1 + i\delta^n| \geq \big||1| - |i\delta^n|\big| = \big||1| - |i||\delta|^n\big| = |1 - |\delta|^n| \underbrace{=}_{car\ |\delta|=\frac{1}{\sqrt{5}}<1} 1 - |\delta|^n > 0$. Donc,

$\frac{1}{|1+i\delta^n|} < \frac{1}{1-|\delta|^n}$ et $\sqrt{2}\frac{|\delta|^n}{|1+i\delta^n|} < \frac{\sqrt{2}|\delta|^n}{1-|\delta|^n}$. Ainsi, $\forall n, 0 \leq |z_n - (1 + i)| < \frac{\sqrt{2}|\delta|^n}{1-|\delta|^n}$.

d. Comme $|\delta| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\delta|^n = 0$. Et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}|\delta|^n}{1-|\delta|^n} = 0$. Alors le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - (1 + i)| = 0$ cela signifie géométriquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} PM_n = 0$. Cela veut dire que les points M_n se rapprochent de P lorsque $n \to +\infty$.