Programme de colle 7

CHAPITRE 4 Applications, injections, surjections et bijections.

I Généralités.

- Définitions d'une application, d'une fonction, de l'image d'un objet et d'un antécédent .
- Restriction d'une fonction
- Image directe ou réciproque d'une partie.
- Composée d'applications : définition, associativité et non commutativité.
- Fonction identité : définition et élément neutre pour la composition.

II Applications injectives, surjectives et bijectives : cas général

Applications injectives

- Trois définitions équivalentes. Illustration.
- Composée d'injections
- Composée injective
- Restriction de l'ensemble de départ pour « rendre une application injective ».

Applications surjectives

- Deux définitions équivalentes
- Composée d'injections
- Composée injective.
- Restriction de l'ensemble d'arrivée pour « rendre une application surjective ».

Applications bijectives

- Deux définitions équivalentes
- Bijection réciproque :
  - Définition
  - Propriétés : $f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f, (f^{-1})^{-1}$.
- Caractérisation par l'existence d'une application $g: F \to E$ telle que $f \circ g = id_F \; et \; g \circ f = id_E$.
- Composée de bijections et bijection réciproque de la composée.

III Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Fonctions continues sur un intervalle I

- Théorème des valeurs intermédiaires.
- Image directe d'un intervalle par une fonction continue.
- Signe d'une fonction continue sur un intervalle

Courbes de f et de f^{-1}

- Symétrie par rapport à la première bissectrice.
- Conséquence : propriétés de f^{-1} (imparité, limite, tangentes particulières…) héritées de propriétés de f .

Fonction continue et injective sur un intervalle.

Théorème des bijections continues et strictement monotones.

Théorème de dérivation de la bijection réciproque

Chap 5 Dernières fonctions usuelles

Logarithme népérien :

- Définition comme l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ s'annulant en 1.
- Dérivabilité et dérivée, monotonie, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$.
- Dérivabilité et dérivée de $\varphi: (x \mapsto ln|u(x)|)$ où u dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I.
- Une primitive de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Propriétés algébriques : $\ln(xy)$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$, $\ln(x^r)$ $où$ $r \in \mathbb{Q}$.
- Inégalités usuelles $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et premières croissances comparées : $\lim_{x \to 0} \ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \ln(x)$, $\lim_{x \to 0} x\ln(x)$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.
- Représentation : courbe de ln.

Exponentielle :

- Définition comme la bijection réciproque de ln. Autre notation : $e^x = \exp(x)$.
- Continuité, monotonie , dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}$.

- Dérivabilité et dérivée de φ: $(x \mapsto e^{u(x)})$ où u dérivable sur un intervalle.
- Une primitive de exp et de $u'(x)e^{u(x)}$.
- Propriétés algébriques : $\exp(x+y)$, $\exp(-x)$, $\exp(x-y)$, $\exp(rx)$ où $r \in \mathbb{Q}$, $\ln(e^x)$, $e^{\ln(x)}$.
- Inégalités usuelles $\forall x, \exp(x) \geq 1 + x$ et interprétation géométrique.
- Limites usuelles et autres croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$.
- Représentation : courbe de exp.

Logarithme et exponentielle de base $a \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}$:

- Définitions
- Relation entre log_a et exp_a.
- Représentation : courbe de log_a et exp_a en fonction de a.
- Propriétés algébriques.

Puissances réelles :

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Définition de x^α.
- Propriétés algébriques : $x^{\alpha+\beta}$, $x^{-\alpha}$, $x^{\alpha-\beta}$, $x^{\alpha\beta}$, $x^\alpha y^\alpha$, $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}$, $\ln(x^\alpha)$, $(e^x)^\alpha$
- Fonctions f_α: $(x \mapsto x^\alpha)$. Continuité, monotonie, dérivabilité et dérivée, limite par taux d'accroissement : $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^\alpha-1}{x-1}$ ou $\lim\limits_{t\to0} \frac{(1+t)^\alpha-1}{t}$, prolongement par continuité éventuel en 0, dérivabilité en 0 du prolongement, asymptotes éventuelles, branches paraboliques éventuelles.
- Dérivabilité et dérivée de φ: $(x \mapsto u(x)^\alpha)$ où u dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
- Primitive de $(x \mapsto x^\alpha)$ et de $\left(x \mapsto u'(x)\big(u(x)\big)^\alpha\right)$.
- Représentation : courbe de f_α.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\gamma x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x^\alpha}$.
- Définition des fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$. Nouvelles formes indéterminées.

Cosinus et sinus hyperboliques.

- Définition
- Propriétés algébriques
- Propriétés des fonctions : parité, continuité, dérivabilité et fonction dérivée et tracé de la courbe fonctions
- Bijection (induite) et le cas échéant, bijection réciproque.
- Primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ et de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Question de cours : énoncer une définition et /ou une propriété de cours

OU

énoncer et démontrer les résultats suivants:.

1. La composée de deux applications surjectives est surjective.
2. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
3. Si f est bijective de E sur F et g est bijective de F sur G alors $g \circ f$ est bijective de E sur G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
4. Soit f une application de E dans F. S'il existe une application $g: F \to E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$ alors f est bijective de E sur F et $f^{-1} = g$.
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x^n) = nln(x)$, $\ln(x^{-n}) = -nln(x)$, $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}ln(x)$ et $\ln(x^\alpha) = \alpha ln(x)$

6. Les premières croissances comparées : $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} xln(x) = 0$.
7. Les croissances comparées (pour la preuve, on admet $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$) $\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} x^\beta |ln(x)|^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0$

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.