PROGRAMME DE COLLE
Semaine 3

CHAPITRE 2 : Récurrences-Sommes et Produits finis.

I. Théorèmes de récurrence Simple – Double – Forte .

II. Sommes et produits finis

- Sommes finies
  - Notation d'une somme finie.
  - Propriétés des sommes : découpage, séparation, mise en facteur.
  - Changement d'indices.
  - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_{n-1}.
  - Somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ et plus généralement, $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1})$.
  - Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et autres sommes « rationnelles ».
- Produits finis
  - Notation produit fini.
  - Propriétés des produits : découpage, séparation.
  - Changement d'indices.
  - Produit télescopique $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$.
  - Ecriture de u_n en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et P_{n-1}.
- Généralisation de formules rencontrées
  - $\forall k, a_k \leq b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \cdots$
  - $|\prod_{k=1}^{n} a_k| = \cdots, |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \cdots$
  - $\sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \cdots, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \cdots$
  - $ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \cdots$ et $e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \cdots$.
  - $\prod_{k=1}^{n} x^{n_k} = \cdots$.
- Sommes doubles
  - Notation d'une somme double et finie.
  - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
  - Produit de deux sommes simples et finies.

III. Formules sommatoires

- Somme
  - des entiers compris entre 1 et n
  - des « entiers au carré »
- Somme géométrique.
  - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$
  - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
  - Formules des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^{n} x^k \ \ et \ \ \sum_{k=p}^{n} x^k$.
  - Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$
- Formule du binôme de Newton
  - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
  - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
  - Formule de Pascal. Triangle de pascal.
  - Formule du binôme de Newton. Application au calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

IV. Applications à quelques suites particulières

- Quelques rappels sur les suites :
  - Suite croissante, suite décroissante.
  - Suite majorée, minorée, bornée.
  - Théorème des gendarmes.
  - Théorème de limite d'une suite monotone
- Suite arithmétique, suite géométrique : définition et expression explicite. Somme ou produit des termes. Limite d'une suite géométrique .
- Suite arithmético-géométrique : définition et méthode pour trouver une expression explicite.

CHAPITRE 3 : Fonctions usuelles 1.

« Rappels » de définitions :

- Définition d'une fonction , de son domaine de définition, de sa courbe représentative.
- Définition d'une fonction (dé-)croissante, strictement (dé-)croissante.
- Définition d'une fonction paire, impaire, périodique.

I. Partie entière

- Définition de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation par une inégalité : $si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \ (n \leq x < n+1 \Leftrightarrow n = \lfloor x \rfloor)$.
- Propriétés essentielles : $(si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)\ \ et\ \ \ (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor)$.
- Représentation de la fonction partie entière et de la fonction partie décimale.

II. Trigonométrie

- Définition du sinus et cosinus d'un réel à partie du cercle trigonométrie.
- Premières formules de trigonométrie liées aux définitions de cos, sin.
- Valeurs particulières.
- Equations et inéquations trigonométriques : définition de $Arccos(x)$ et de $Arcsin(x)$ d'un réel $x \in [-1,1]$.
- Autres formules de trigonométrie : formules d'addition, d'angle double.
- Formules à savoir retrouver : formules de factorisation et de linéarisation.
- Méthode pour écrire $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$.

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Enoncer et démontrer la généralisation de la propriété $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.
2) Enoncer et démontrer par téléscopage la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.
3) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1-x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} x^k\ et\ (\sum_{k=p}^{n} x^k)$.
4) Enoncer et démontrer la formule de Pascal.
5) Soit x et y deux réels. Démontrer que : $(si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)\ \ et\ \ \ (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor)$.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer

1) Enoncé : $\forall (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}) \in (\mathbb{R}^{+*})^n, ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} ln(a_k)$.

Démo : On admet que $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, ln(XY) = ln(X) + ln(Y)$ $(**)$.

<u>La généralisation :</u> Notons $H(n)$ la propriété " pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n\ strictement\ positifs\ , ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} ln(a_k)$.".

Initialisation : $H(2)$ est vraie d'après ce qui précède.

Propagation : Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie. Soit $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ des réels.

$$, ln(\prod_{k=1}^{n+1} a_k) = ln\left(\underbrace{(\prod_{k=1}^{n} a_k)}_{=X} \times \underbrace{a_{n+1}}_{=Y}\right) \overset{\substack{on\ applique \\ (**) \\ à\ X=\prod_{k=1}^{n} a_k>0 et\ Y=a_{n+1}>0}}{\triangleq} ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) + ln(a_{n+1}) \overset{\substack{car\ H(n) \\ est\ vraie}}{\triangleq} [\sum_{k=1}^{n} ln(a_k)] + ln(a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} ln(a_k).$$

Ainsi, $(H(n) \Rightarrow H(n+1))$.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \geq 2$, pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n\ strictement\ positifs\ , ln(\prod_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{n} ln(a_k)$

2) Enoncé : Soit n un entier naturel. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Soit n un entier naturel.

$\forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^4 - k^4 \overset{FBN}{\triangleq} k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Donc, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^4 - k^4]}_{somme\ télescopique} = \sum_{k=0}^{n}[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1]$. Donc,

$(n+1)^4 - 0^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3\ + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$.

Donc, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}[(n+1)^4 - 6\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{4n(n+1)}{2} - (n+1)] = \frac{1}{4}(n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] = \frac{1}{4}(n+1)[n^3 + n^2] = \frac{1}{4}(n+1)^2 n^2$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3) Enoncé :

- Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , $1 - x^n = (1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
- Pour tout entier naturel n et tout réel x , $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ n+1 & si\ x = 1 \end{cases}$.

- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$ et tout réel x , $\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^p \ si \ x \neq 1 \\ n-p+1 \ \ si \ x = 1 \end{cases}$.

Démo :

- Soit n entier naturel n non nul et x un réel. $(1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - x\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{x^k}_{u_k} - \underbrace{x^{k+1}}_{u_{k+1}}\right)}_{\substack{somme \\ télescopioque}} = u_0 - u_{(n+1)-1} = x^0 - x^n$.

  Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathbb{R}, 1 - X^N = (1-X)(\sum_{k=0}^{N-1} X^k) \quad (*)$
- Soit n un entier naturel et x un réel.
  1[er] cas : $x = 1$. $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
  2[ème] cas : $x \neq 1$ alors d'après ce qui précède $(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique \\ (*) \\ avec \\ N=n+1 \in \mathbb{N}^* \\ et\ X=x}} 1 - x^{n+1}; \ puisque\ x \neq 1, 1-x \neq 0\ et\ par\ suite,\ \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

  Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N+1}-1}{X-1} \ si \ X \neq 1 \\ N+1 \ \ si \ X = 1 \end{cases} \quad (**)$.
- Soit $p\ et\ n$ deux entiers naturels tels que $p \leq n$ et x un réel.
  1[er] cas : $x = 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} 1^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.
  2[ème] cas : $x \neq 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} x^p x^{k-p} = x^p(\sum_{k=p}^{n} x^{k-p}) = x^p(\sum_{j=0}^{n-p} x^j) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique \\ (**) \\ avec\ N=n-p \\ et\ X=x\neq 1}} x^p \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1}$.

  Ainsi, $\forall (N,P) \in \mathbb{N}^2 / P \leq N, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=P}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N-P+1}-1}{X-1} X^p \ si \ X \neq 1 \\ N-P+1 \ \ si \ X = 1 \end{cases} \quad (**)$.

4) Enoncé : Formule de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

<u>1[er] cas : $k > n$.</u> Alors $k+1 > n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.La formule de Pascal est donc vérifiée si $k > n$.

<u>2[ème] cas : $k = n$.</u> Alors $k+1 = n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}\ et\ \binom{n+1}{k} = 0$. La formule de Pascal est donc vérifiée si $k = n$.

<u>3[ème] cas : $k < n$.</u> Alors $k \leq n-1\ donc\ k+1 \leq n < n+1$. Et par suite, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}$ et $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$. Alors ,

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = n!\left[\frac{1}{k!(n-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1))!}\right] = n!\left[\frac{1}{k!((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{1}{(k!)(k+1)(n-k-1))!}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{k!(k+1)((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{(n-k)}{(k!)(k+1)((n-k-1))!)(n-k)}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!}\right] = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$.

Donc la formule de Pascal est vérifiée si $k < n$.

Ainsi, $\forall (N,K) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{K+1}{K+1}$.

6) Soit x et y deux réels. Démontrer que : $(si\ n \in \mathbb{Z}\ alors\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n)\ \ et\ \ (x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor)$.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Je sais que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc, $\underbrace{\lfloor x \rfloor + n}_{=k \in \mathbb{Z}} \leq x + n < \underbrace{\lfloor x \rfloor + n + 1}_{=k+1}$. Le réel $x+n$ est donc encadré par deux entiers consécutifs et ne peut pas être égal au plus grand des deux entiers ; la caractérisation de la partie entière assure alors que $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
- Je suppose que $x \leq y$. Comme, de plus, $\lfloor x \rfloor \leq x$, je peux affirmer que $\lfloor x \rfloor \leq y$. $\lfloor x \rfloor$ est donc un entier inférieur à y. Or , $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y. Par conséquent, $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Cela signifie que la fonction partie entière est croissante.