# Programme de colle 11

## Chap 8: Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2

Cf programme précédent

## Chap 9 : Dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Comparaison des fonctions. Développements limités.

### I Dérivées $n$ièmes

- Définition de la dérivée $n$ième, de la classe $C^n$ $ou$ $C^\infty$. Ensembles $C^n(I,K)$, $D^n(I,K) et\ C^\infty(I,K)$.
- Dérivées successives des fonctions usuelles :

$exp \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, exp^{(n)}(x) = e^x$.

$ch \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, ch^{(n)}(x) = \begin{cases} ch(x)\ si\ n\ pair \\ sh(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

$sh \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, sh^{(n)}(x) = \begin{cases} sh(x)\ si\ n\ pair \\ ch(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

$cos \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} cos(x)\ si\ n\ pair \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} sin(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

$sin \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} sin(x)\ si\ n\ pair \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} cos(x)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

$ln \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln^{(n)}(x) = \begin{cases} ln(x)\ si\ n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\ si\ n \geq 1 \end{cases}$.

$f: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ . $f: (x \mapsto x^\alpha) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ $et$ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\ si\ n \geq 1 \\ x^\alpha\ si\ n = 0 \end{cases}$.

- Dérivées successives d'une combinaison linéaire et d'un produit (formule de Leibniz) de deux fonctions $n$-fois dérivables ( ou de classe $C^n$ ) sur un même domaine.

  **Formule de Leibniz :** Si $f = u \times v$ telles que $u$ et $v$ sont de classe $C^n$ sur $I$ $(n \in \mathbb{N})$ alors
  $f$ est de classe $C^n$ sur $I$ et $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$
- Classe $C^k$d'un quotient, d'une composée, d'une bijection réciproque (admis) .
- **Critère de classe $C^n$ $ou$ $C^\infty$ ( admis pour $n = 1$) :** Soit $I$ un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x)\ si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_0\ si\ x = a \end{cases}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $g$ est de classe $C^n$ sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_0$ $et$ $\forall k \in [\![1,n]\!], \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie alors $f$ est de classe $C^n$ sur l'intervalle $I$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \neq a \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}$.

2) Si $g$ est de classe $C^\infty$ sur $I\backslash\{a\}$ et et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_0$ $et$ $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x)$ existe et est finie et alors $f$ est de classe $C^\infty$ sur l'intervalle $I$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x)\ si\ x \neq a \\ L_k\ si\ x = a \end{cases}$.

### II Comparaisons entre fonctions.

- Définitions d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de $a$ , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de $a$ , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de $a$ . Notations .
- Caractérisation par le quotient : si $f$ et $g$ sont définies sur une même voisinage de $a$ et $g$ ne s'annule pas sur ce voisinage de $a$ (sauf éventuellement en $a$ et dans ce cas, il faut que $f(a) = 0$ si $f(a)$ existe )alors
  - ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .
  - ✓ $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .
  - ✓ $f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} est\ bornée\ sur\ un\ voisinage\ de\ a$.
- Théorème de comparaison .
  - ✓ $f \sim_a g\ ou\ f = o_a(g) \Rightarrow f = O_a(g)$
  - ✓ $f = o_a(g)\ et\ g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h)$ .
  - ✓ $f \sim_a g\ et\ g = o_a(h) \Rightarrow f = o_a(h)$ .
  - ✓ $f = o_a(g)\ et\ g \sim_a h \Leftrightarrow f = o_a(h)$ .

- ✓ $f \sim_a g$ et $g = o_a(h) \Leftrightarrow f = o_a(h)$ .
- ✓ $f$ bornée au voisinage de $a$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \infty \Rightarrow f = o_a(g)$

- Propriétés et opérations sur les fonctions négligeables :
  - ✓ $o_a(1)$ est une fonction qui tend vers 0 en $a$.
  - ✓ $o_a(g) = g \times o_a(1)$
  - ✓ $o_a(fg) = f \times o_a(g) = fg \times o_a(1) = g \times o_a(f)$
  - ✓ $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$
  - ✓ Pour tout réel λ non nul , $o_a(\lambda g) = o_a(g) = \lambda o_a(g)$
- Caractérisation et propriétés sur les équivalents :
  - ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f \sim_a g$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $g \sim_a h \Rightarrow f \sim_a h$.
  - ✓ $f \sim_a g \Rightarrow f$ et $g$ ont le même signe strict sur un voisinage de $a$.
  - ✓ $\begin{cases} f \sim_a g \\ \lim_{x \to a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$.
  - ✓ $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \sim_a L$.
- Opérations sur les fonctions équivalentes : produit , quotient , puissance constante , composition à droite .
  - ✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v \Rightarrow f \times u \sim_a g \times v$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $u \sim_a v$ et $u$ ne s'annule pas au voisinage de $a$ (sauf éventuellement en $a$) $\Rightarrow \frac{f}{u} \sim_a \frac{g}{v}$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $\alpha$ constante réelle $\Rightarrow f^\alpha \sim_a g^\alpha$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $\lim_{x \to b} u(x) = a \Rightarrow f\big(u(x)\big) \sim_b g(u(x))$.
- Exemples déjà rencontrés :
  - ✓ Comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$ : soit $\alpha$ et $\beta$ *réels*

  $\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} x^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \\ x^\beta \ll_0 x^\alpha \end{cases}$.

  - ✓ Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x-a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de $a$ . Soit $n$ et $m$ entiers.

  $n < m \Rightarrow (x-a)^m \ll_a (x-a)^n$.

  - ✓ Equivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0.

  Soit $n$ et $m$ entiers tels que $n < m$ et $a_0, .., a_n, .., a_m$ réels

  $a_m \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \sim_{+\infty} a_m x^m$.

  $n < m$ et $a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=n}^{m} a_k x^k \sim_0 a_n x^n$.

  - ✓ Croissances comparées.

  *pour tous réels* $\alpha, \beta$ *et* $\gamma$ *strictement positifs*, $\ln(x)^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \ll_{+\infty} e^{\gamma x}$.

  - ✓ Fonctions dérivables à dérivée non nulle

  $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(a) \sim_a f'(a)(x-a)$.

  - ✓ Equivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.

$e^x - 1 \sim_0 x$

$ln(1+x) \sim_0 x$

$ln(y) \sim_1 y - 1$

$\sin(x) \sim_0 x$

$cos(x) - 1 \sim_0 -\frac{1}{2} x^2$

$\tan(x) \sim_0 x$

$sh(x) \sim_0 x$

$ch(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{2} x^2$

$\text{Arctan}(x) \sim_0 x$

$Arcsin(x) \sim_0 x$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$)

**Questions de cours :**

**CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES ENONCES DES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.**

## Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1) **Théorème fondamental de résolution d'une $edl$ :**
   **si $y_0$ est une solution de $(E)$ sur $I$ alors $Sol(E)_I = \{y_0 + y_H / y_H \in Sol(EH)_I\}$.**
2) **Théorème de résolution de $(EdlH_1)$**
3) **Formule de Leibniz**
4) **Critère de classe $C^n$ en admettant le critère de classe $C^1$.**
5) **Démontrer :**
   a) $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$.
   b) $f \sim_a g$ et $\lim_{x \to a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$.
   c) $f = o_a(g)$ **et** $g \sim_a h \Rightarrow f = o_a(h)$.
   d) $o_a(1) + o_a(1) = o_a(1)$ **et plus généralement,** $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$.
   e) $f \sim_a g$ **et** $\alpha$ *constante réelle* $\Rightarrow f^\alpha \sim_a g^\alpha$.