Programme de colle 12

Chap 9 : Dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Comparaison des fonctions. Développements limités.

I Dérivées $n$ièmes

- **Définitions** de la dérivée $n$ième, de la classe C^n ou C^∞. Ensembles $C^n(I,K)$, $D^n(I,K)$ et $C^\infty(I,K)$.
- **Dérivées successives des fonctions usuelles** :

$exp \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, exp^{(n)}(x) = e^x$.

$ch \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, ch^{(n)}(x) = \begin{cases} ch(x) \text{ si } n \text{ pair} \\ sh(x) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$sh \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, sh^{(n)}(x) = \begin{cases} sh(x) \text{ si } n \text{ pair} \\ ch(x) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$cos \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} cos(x) \text{ si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} sin(x) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$sin \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} sin(x) \text{ si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} cos(x) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

$ln \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln^{(n)}(x) = \begin{cases} ln(x) \text{ si } n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$.

$f: \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \in C^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. $f: (x \mapsto x^\alpha) \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \text{ si } n \geq 1 \\ x^\alpha \text{ si } n = 0 \end{cases}$.

- **Dérivées successives d'une combinaison linéaire et d'un produit** de deux fonctions n-fois dérivables (ou de classe C^n) sur un même domaine.

Formule de Leibniz : Si $f = u \times v$ telles que u et v sont de classe C^n sur I $(n \in \mathbb{N})$ alors
f est de classe C^n sur I et $\forall x \in I, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$

- Classe C^kd'un quotient, d'une composée, d'une bijection réciproque (admis) .
- **Critère de classe C^n ou C^∞ (admis pour $n = 1$) :**

Soit I un intervalle et $a \in I$. et $\forall x \in I, f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in I\backslash\{a\} \\ L_0 \text{ si } x = a \end{cases}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si g est de classe C^n sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!], \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k$ existe et est finie
alors f est de classe C^n sur l'intervalle I et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) \text{ si } x \neq a \\ L_k \text{ si } x = a \end{cases}$.

2) Si g est de classe C^∞ sur $I\backslash\{a\}$ et et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x)$ existe et est finie et
alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \begin{cases} g^{(k)}(x) \text{ si } x \neq a \\ L_k \text{ si } x = a \end{cases}$.

II Comparaisons entre fonctions.

- **Définitions** d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de a , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de a , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de a . Notations .
- **Caractérisation par le quotient** : si f et g sont définies sur une même voisinage de a et g ne s'annule pas sur ce voisinage de a (sauf éventuellement en a et dans ce cas, il faut que $f(a) = 0$ si $f(a)$ existe)alors
  - ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
  - ✓ $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  - ✓ $f = O_a(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a.
- **Théorème de comparaison .**
  - ✓ $f \sim_a g$ ou $f = o_a(g) \implies f = O_a(g)$
  - ✓ $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h) \implies f = o_a(h)$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $g = o_a(h) \implies f = o_a(h)$.
  - ✓ $f = o_a(g)$ et $g \sim_a h \Leftrightarrow f = o_a(h)$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $g = o_a(h) \Leftrightarrow f = o_a(h)$.
  - ✓ f bornée au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \implies f = o_a(g)$
- **Propriétés et opérations sur les fonctions négligeables :**
  - ✓ $o_a(1)$ est une fonction qui tend vers 0 en a.
  - ✓ $o_a(g) = g \times o_a(1)$
  - ✓ $o_a(fg) = f \times o_a(g) = fg \times o_a(1) = g \times o_a(f)$
  - ✓ $o_a(g) + o_a(g) = o_a(g)$
  - ✓ Pour tout réel λ non nul , $o_a(\lambda g) = o_a(g) = \lambda o_a(g)$
- **Caractérisation et propriétés sur les équivalents** :
  - ✓ $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g) \Leftrightarrow f \sim_a g$.
  - ✓ $f \sim_a g$ et $g \sim_a h \implies f \sim_a h$.
  - ✓ $f \sim_a g \implies f$ et g ont le même signe strict sur un voisinage de a.

- ✓ $\begin{cases} f\sim_a g \\ \lim_{x\to a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L.$
- ✓ $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f\sim_a L.$

- **Opérations sur les fonctions équivalentes** : produit , quotient , puissance constante , composition à droite .
  - ✓ $f\sim_a g \text{ et } u\sim_a v \Rightarrow f\times u\sim_a g\times v.$
  - ✓ $f\sim_a g \text{ et } u\sim_a v \text{ et } u \text{ ne s'annule pas au voisinage de } a \text{ (sauf éventuellement en } a) \Rightarrow \frac{f}{u}\sim_a \frac{g}{v}.$
  - ✓ $f\sim_a g \text{ et } \alpha \text{ constante réelle} \Rightarrow f^\alpha\sim_a g^\alpha.$
  - ✓ $f\sim_a g \text{ et } \lim_{x\to b} u(x) = a \Rightarrow f(u(x))\sim_b g(u(x)).$ COMPOSEE à DROITE
- **Opérations interdites** sur les fonctions équivalentes : somme , composée à gauche et puissance non constante .
  - ✓ $f\sim_a g \text{ et } u\sim_a v \nRightarrow f+u\sim_a g+v.$
  - ✓ $f\sim_a g \nRightarrow u(f(x))\sim_a u(g(x)).$
  - ✓ $f\sim_a g \nRightarrow f(x)^{u(x)}\sim_a g(x)^{u(x)}.$
- **Exemples déjà rencontrés :**
  - ✓ Comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$: soit α et β *réels*

$\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} x^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \\ x^\beta \ll_0 x^\alpha \end{cases}.$

  - ✓ Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x-a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de a . Soit n et m entiers.

$n < m \Rightarrow (x-a)^m \ll_a (x-a)^n.$

  - ✓ Equivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0.

Soit n et m entiers tels que $n < m$ et $a_0, .., a_n, .., a_m$ réels

$a_m \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^m a_k x^k \sim_{+\infty} a_m x^m.$

$n < m \text{ et } a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=n}^m a_k x^k \sim_0 a_n x^n.$

  - ✓ Croissances comparées.

$\text{pour tous réels } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ strictement positifs,} \quad \ln(x)^\alpha \ll_{+\infty} x^\beta \ll_{+\infty} e^{\gamma x}.$

  - ✓ Fonctions dérivables à dérivée non nulle

$\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(a)\sim_a f'(a)(x-a).$

  - ✓ Equivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.

$e^x - 1\sim_0 x$	$\tan(x)\sim_0 x$	$Arcsin(x)\sim_0 x$
$ln(1+x)\sim_0 x$	$sh(x)\sim_0 x$	$(1+x)^\alpha - 1\sim_0 \alpha x, \alpha \text{ constante}$
$ln(y)\sim_1 y-1$	$ch(x) - 1\sim_0 \frac{1}{2}x^2$	
$\sin(x)\sim_0 x$	$\text{Arctan}(x)\sim_0 x$	
$cos(x) - 1\sim_0 -\frac{1}{2}x^2$		

- **se ramener en 0.**

Soit f définie au voisiange du réel x_0. Posons $g(t) = f(x_0+t)$ i.e. $f(x) = g(x-x_0)$. Alors, $g(t)\sim_0 h(t) \Leftrightarrow f(x)\sim_{x_0} h(x-x_0)$

Soit f définie au voisiange de$\pm\infty$. Posons $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ i.e. $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, $g(t)\sim_{0^\pm} h(t) \Leftrightarrow f(x)\sim_{\pm\infty} h\left(\frac{1}{x}\right)$

III Développements limités .

- **Définition** d'un développement limité en un réel et en particulier en 0. **Unicité** de ce DL.

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots .. + b_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n)$ alors $\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = b_k$.

- **Propriétés des DL :**
  - ✓ Equivalent

Si au voisinage de $x_0, f(x) = a_p(x-x_0)^p + \cdots .. + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n) \text{ avec } p \leq n \text{ et } a_p \neq 0$ alors $f(x)\sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$.

  - ✓ « se ramener en 0 »

Soit f définie au voisiange du réel x_0. Posons $g(t) = f(x_0+t)$ i.e. $f(x) = g(x-x_0)$. Alors,

$$g \text{ admet le } DL_n(0) \text{suivant } g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .. + a_n t^n + o_0(t^n)$$
$$\Leftrightarrow f \text{ admet le } DL_n(x_0) \text{suivant : } f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

  - ✓ Troncature

Si f admet le $DL_n(x_0)$ suivant: $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots .. + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n)$
alors f admet $le\, DL_{n-1}(x_0) suivant$: $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots .. + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + o_{x_0}((x-x_0)^{n-1})$

  - ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impair

Si f est paire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 \ldots .. + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}.$

Si f est impaire et admet un $DL_n(0)$ alors ce $DL_n(0)$ est de la forme $f(t) = a_1 t + a_3 t^3 \ldots .. + \begin{cases} a_n t^n + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ impair} \\ a_{n-1} t^{n-1} + o_0(t^n) \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}.$

- **Développements limités usuels :**
  - ✓ Développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$ obtenu par somme géométrique puis ceux de $\frac{1}{1+x}$ *et* $\frac{1}{1+x^2}$ par composition.

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n x^k + o_0(x^n).$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o_0(x^n).$

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2n}).$

✓ **Théorème de Taylor-Young** et développement limité en 0 de $e^x, \cos(x), \sin(x), sh(x), ch(x), (1+x)^\alpha$.

Si f est de classe C^n un voisinage de x_0 contenant x_0 alors f admet le $DL_n(x_0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{Q_n(x-x_0)} + \underbrace{o_{x_0}((x-x_0)^n)}_{reste}$.

Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0 contenant 0 alors f admet le $DL_n(0)$: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{P_n(x)} + \underbrace{o_0(x^n)}_{reste}$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.

$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} o_0(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2n+2})$.

$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} o_0(1) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2n+1})$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n o_0(1)$.

✓ **Théorème d'intégration terme à terme** et développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, $Arctan(x)$, $\underbrace{\tan(x) \text{ et } Arcsin(x)}_{ordre\ 5\ uniquement}$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de 0 contenant 0 et f' admet le $DL_n(0)$ suivant : $f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$ alors f admet le $DL_{n+1}(0)$ suivant : $f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

•Si f est dérivable sur un voisinage de x_0 contenant x_0 et f' admet le $DL_n(x_0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors f admet le $DL_{n+1}(x_0)$ suivant : $f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$.

$Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$.

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$.

$Arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 \mp \frac{3}{40}x^5 + x^5 o_0(1)$.

$tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 o_0(1)$.

- **Opérations sur les DL :** Combinaison linéaire et produit. Composition. Inverse et quotient.

Soit α et β deux constantes réelles . Si f et g admettent les $DL_n(0)$ suivants : $f(x) = P(x) + o_0(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o_0(x^n)$ alors $\alpha f + \beta g$ et fg admettent chacun un $DL_n(0)$ et

$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) + o_0(x^n)$.

$f(x) \times g(x) = [somme\ des\ termes\ de\ degré\ inférieur\ ou\ égal\ à\ n\ de\ P(x) \times Q(x)] + o_0(x^n)$.

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Si f et g admettent des $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ admet un $DL_n(0)$.

Si f admet le $DL_n(0)$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et g admet un $DL_n(0)$ alors $g \circ f$ admet le $DL_n(0)$.

Questions de cours : CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUTES LES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS. **<u>Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :</u>**

1) **Compléter et démontrer :**
   a) $o_a(g) = g \times \ldots.$
   b) $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + \cdots \ldots$
   c) Si $f \sim_a g$ alors f et g ont en commun... au voisinage de a et leur .... en a si elle existe.
   d) Si $f(t) \sim_a g(t)$ et $\lim_{x\to b} u(x) = a$ alors … … … … … … ….
   e) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tel que $\underline{L}$ .... alors $f(x) \sim_a \ldots \ldots \ldots$.
2) Obtention du $DL_{2n}(0)$ de $\cos(x)$ et du $DL_{2n+1}(0)$ de $\sin(x)$ par Taylor-Young.
3) Obtention du $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$ par Taylor – Young.
4) Obtention du $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ par somme géométrique
5) Obtention du $DL_n(0)$ $de\ \frac{1}{1+x}\ puis$ de $\ln(1+x)$ par composée et intégration terme è terme.
6) Obtention du $DL_n(0)$ $de\ \frac{1}{1+x^2}\ puis\ de\ Arctan(x)$ par composée et intégration terme è terme.
7) Obtention du $DL_5(0)$ $de\ tan(x)$ par intégration terme è terme.