CORRIGE TD 3

Partie entière.

Ex 0 Soit x *et* y deux réels. Montrer que : $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

Notons $n = \lfloor x\rfloor$ *et* $m = \lfloor y\rfloor$.

1^er^ cas : $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$ *et* $y \in \left[m, m+\frac{1}{2}\right[$.

Alors $\underbrace{2x \in [2n, 2n+1[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est} \\ \text{encadré par deux entiers consécutifs} \\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ *et* $y \in [2m, 2m+1[$ et $x+y \in [n+m, n+m+1[$. Par conséquent,

$\lfloor 2x\rfloor = 2n, \lfloor 2y\rfloor = 2m$ et $\lfloor x+y\rfloor = n+m$. Et par suite, $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor = n + (n+m) + m = 2n + 2m = \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

2^ème^ cas : $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$ *et* $y \in \left[m, m+\frac{1}{2}\right[$.

Alors $\underbrace{2x \in [2n+1, 2n+2[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est} \\ \text{encadré par deux entiers consécutifs} \\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ *et* $y \in [2m, 2m+1[$ et $x+y \in \left[n+m+\frac{1}{2}, n+m+\frac{3}{2}\right[$. Par conséquent,

$\lfloor 2x\rfloor = 2n+1, \lfloor 2y\rfloor = 2m$ et $\lfloor x+y\rfloor = \begin{cases} n+m \text{ si } x \in \left[n+m+\frac{1}{2}, n+m+1\right[\\ n+m+1 \text{ si } x \in \left[n+m+1, n+m+\frac{3}{2}\right[\end{cases} \leq n+m+1.$

Et par suite, $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq n + (n+m+1) + m = 2n+1+2m = \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

3^ème^ cas : $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$ *et* $y \in \left[m+\frac{1}{2}, m+1\right[$. Etant les rôles symétriques de x et y dans la formule à prouver, ce cas est analogue au précédent et aboutit au même résultat.

4^ème^ cas : $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$ *et* $y \in \left[m+\frac{1}{2}, m+1\right[$.

Alors $\underbrace{2x \in [2n+1, 2n+2[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est} \\ \text{encadré par deux entiers consécutifs} \\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ *et* $y \in [2m+1, 2m+2[$ et $x+y \in [n+m+1, n+m+2[$. Par conséquent,

$\lfloor 2x\rfloor = 2n+1, \lfloor 2y\rfloor = 2m+1$ et $\lfloor x+y\rfloor = n+m+1$.

Et par suite, $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor = n + (n+m+1) + m = 2n+1+2m \leq 2n+2m+2 = \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

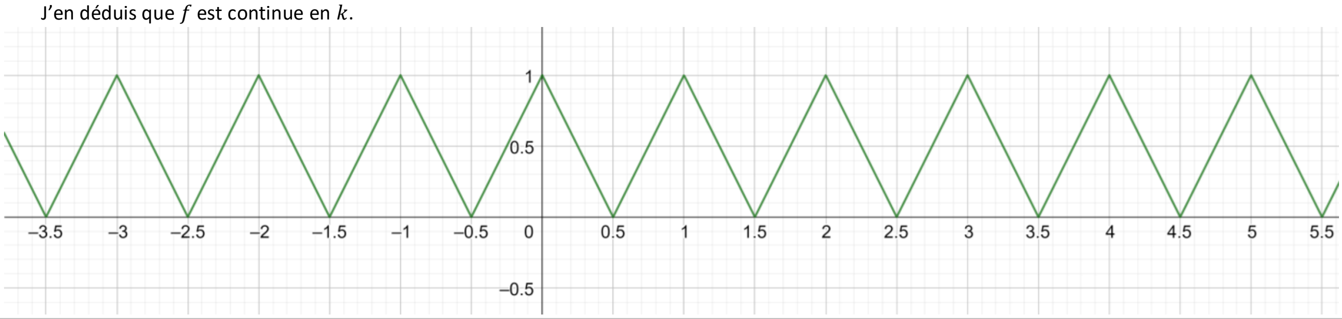
CCL : dans tous les cas, $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+y\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$.

Ex 1 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ -x \text{ si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x\rfloor)$ *et* $g: (x \mapsto |2x-1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+ (i.e. quand $x \to k$ *et* $x > k$) . Faire de même en k^-. Qu'en déduit-on sur f ?
4. Tracer Cf.

1. Soit x un réel.
   Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $\lfloor -x\rfloor = -x = -\lfloor x\rfloor$
   Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $\underbrace{-1-\lfloor x\rfloor < -x < -\lfloor x\rfloor}_{\substack{-x \text{ est encadré par deux entiers} \\ \text{consécutifs et ne peut pas être égal} \\ \text{au plus grand des deux enteirs}}}$ et d'après la caractérisation de la partie entière, $\lfloor -x\rfloor = -1 - \lfloor x\rfloor$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(f(x)) = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1|$ *et* $f(-x) = |2(-x - \lfloor -x\rfloor) - 1|$.
   $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = |2(x-x)-1| = |-1| = 1$ et $f(-x) = |2(-x-(-x))-1| = |-1| = 1$ .Donc $f(-x) = f(x)$.
   $\forall x \notin \mathbb{Z}, f(x) = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1| = |2x - 2\lfloor x\rfloor - 1|$ et $f(-x) = |2(-x - (-\lfloor x\rfloor - 1)) - 1| = |-2x + 2\lfloor x\rfloor + 2 - 1| = |-(2x - 2\lfloor x\rfloor - 1)| = |2x - 2\lfloor x\rfloor - 1|$.Donc $f(-x) = f(x)$.
   Ainsi, f est paire.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(f(x+1)) = |2((x+1) - \lfloor x+1\rfloor) - 1| = |2(x+1-(\lfloor x\rfloor+1)) - 1| = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1| = f(x)$. Donc f est 1-périodique.
3. $\forall x \in [k, k+1[, f(x) = |2(x-k)-1|$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x > k}} f(x) = 1 = f(k)$.
4. $\forall x \in [k-1, k[, f(x) = |2(x-(k-1))-1| = |2(x-k)+1|$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x < k}} f(x) = 1 = f(k)$.

   J'en déduis que f est continue en k.



Ex 2 Soit n un entier naturel.

1) Développer $(3+\sqrt{5})^n$ *et* $(3-\sqrt{5})^n$.
2) En déduire que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3) Montrer que $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.

1) $(3+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{5}^k 3^{n-k}$ *et* $(3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k 3^{n-k}$.
2) $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k\right] 3^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{[1+(-1)^k]}_{\substack{=0 \text{ si } k \text{ impair} \\ =2 \text{ si } k \text{ pair}}} \sqrt{5}^k 3^{n-k}$

$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k\ pair}} \binom{n}{k} 2\sqrt{5}^k 3^{n-k} = \sum_{0\le 2p\le n} \binom{n}{2p} 2\sqrt{5}^{2p} 3^{n-2p} = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \binom{n}{2p} 2\times 5^p \times 3^{n-2p} = 2\underbrace{\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} \binom{n}{2p} 5^p\times 3^{n-2p}\right]}_{\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair .

3) D'après ce qui précède, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2k$ tel que $k\in\mathbb{N}$. donc $(3+\sqrt{5})^n = 2k - (3-\sqrt{5})^n$. De plus, $0 < 3-\sqrt{5} < 1$ $donc$ $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$ et par conséquent, $\underbrace{2k-1 < (3+\sqrt{5})^n < 2k}_{(3+\sqrt{5})^n \text{ est encadré par deux entiers consécutifs et ne peut pas être égal au plus grand des deux.}}$

La caractérisation de la partie entière permet alors de conclure que $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor = 2k-1$ donc $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor$ est impair.

Ex 3 Montrer que pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = n.$

Soit n et m deux entiers naturels.

1er cas n et m ont la même parité. Alors $n+m$ et $n-m$ sont pairs et $n-m+1$ est impair. Par conséquent, $\frac{n+m}{2}\in\mathbb{Z}$ et $\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}$ donc $\left\lfloor\frac{n+m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor = \frac{n+m}{2}$ et $\left\lfloor\frac{n-m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor = \frac{n-m}{2}$.

Par conséquent, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = \frac{n+m}{2}+\frac{n-m}{2} = n.$

2eme cas n et m sont de parité contraire. Alors $n+m$ et $n-m$ sont impairs et $n-m+1$ est pair. Par conséquent, $\frac{n+m}{2}$ et $\frac{n-m+1}{2}\in\mathbb{Z}$ et $n+m = 2k+1$ donc $k < \frac{n+m}{2} = k+\frac{1}{2} < k+1$ $donc$ $\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = \frac{n-m+1}{2}$ et $\left\lfloor\frac{n-m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor = k = \frac{n+m-1}{2}$.Par conséquent, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = \frac{n-m+1}{2}+\frac{n+m-1}{2} = n.$

Ainsi, pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor = n.$

Ex 4 Montrons que : pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor.$

Soit x un réel et n un entier naturel non nul.

$\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$. Donc, $n\lfloor x\rfloor \le nx < n\lfloor x\rfloor + n$. L'entier $n\lfloor x\rfloor$ est inférieur au réel nx. Or $\lfloor nx\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à nx. Par conséquent, $n\lfloor x\rfloor \le \lfloor nx\rfloor$. Et par suite , $n\lfloor x\rfloor \le \lfloor nx\rfloor \le nx < n\lfloor x\rfloor + n$ puis $\lfloor x\rfloor \le \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} \le x < \lfloor x\rfloor + 1$. $\lfloor x\rfloor$ et $\lfloor x\rfloor + 1$ sont alors deux entiers consécutifs qui encadrent le réel $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ et ce réel ne peut pas être égal au plus grand des deux entiers ; la caractérisation du cours assure alors que $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ $i.e.$ $\lfloor x\rfloor = \left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor$.

Ex 5 Soit n un entier naturel. Déterminer $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor$

Si $n>0$ alors $(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+3n+4 < n^2+4n+4 = (n+2)^2$ et par stricte croissance de la racine carrée, $\underbrace{n+1 < \sqrt{n^2+3n+4} < n+2}_{\sqrt{n^2+3n+4} \text{ est encadré par deux entiers consécutifs et ne peut pas être égal au plus grand des deux .}}$.

Alors la caractérisation du cours assure alors que $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor = n+1$.

Si $n=0$ alors $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor = \lfloor 2\rfloor = 2.$

Ex 6 1. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$. (ind. : $x\in\left[\lfloor x\rfloor;\lfloor x\rfloor+\frac{1}{2}\right[$ ou $x\in[\lfloor x\rfloor;\lfloor x\rfloor+1[$).

2. Donner une méthode pour prouver que : pour tout réel x, $\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

1. Notons $n = \lfloor x\rfloor$

1er cas : $x\in\left[n, n+\frac{1}{2}\right[$. Alors, $x+\frac{1}{2}\in\left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[\subset \underbrace{[n, n+1[}_{\text{deux entiers consécutifs qui encadrent } x+\frac{1}{2}}$ et $2x\in\underbrace{[2n, 2n+1[}_{\text{deux entiers consécutifs qui encadrent } 2x}$. Donc, $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n$ et $\lfloor 2x\rfloor = 2n$.

Par conséquent, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+n = 2n = \lfloor 2x\rfloor$.

2èmz cas : $x\in\left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$. Alors, $x+\frac{1}{2}\in\left[n+1, n+\frac{3}{2}\right[\subset \underbrace{[n+1, n+2[}_{\text{deux entiers consécutifs qui encadrent } x+\frac{1}{2}}$ et $2x\in\underbrace{[2n+1, 2n+2[}_{\text{deux entiers consécutifs qui encadrent } 2x}$. Donc, $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+1$ et $\lfloor 2x\rfloor = 2n+1$.

Par conséquent, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+(n+1) = 2n+1 = \lfloor 2x\rfloor$.

Ainsi, pour tout réel x, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$.

2. On peut traiter 3 cas : $x\in\left[n, n+\frac{1}{3}\right[$, $x\in\left[n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}\right[$ et $x\in\left[n+\frac{2}{3}, n+1\right[$.

Ex 7 Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor$. Montrer que $g{:}\,(x\mapsto f(x)-\lfloor x\rfloor)$ est 1-périodique. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor$.

$D_g = \mathbb{R}$. Donc, $\forall x\in D_g, x+1\in D_g$.

De plus, $f(x+1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+1+k}{n}\right\rfloor\right) \underset{car\ 1\in\mathbb{Z}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+(1+k)}{n}\right\rfloor \overset{\substack{chgt\ indice \\ j=k+1 \\ k=j-1 \\ k\in[\![0,n-1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}}{=} \sum_{j=1}^{n}\left\lfloor\frac{x+j}{n}\right\rfloor = \left(\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+j}{n}\right\rfloor\right) + \left\lfloor\frac{x+n}{n}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor$

$f(x+1) = f(x) + \left\lfloor\frac{x}{n}+1\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor \underset{car\ 1\in\mathbb{Z}}{=} f(x) + \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor + 1 - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = f(x)+1.$

Alors, $g(x+1) = f(x)+1-\lfloor x+1\rfloor \underset{car\ 1\in\mathbb{Z}}{=} f(x)+1-(\lfloor x\rfloor+1) \overset{\substack{chgt\ indice \\ j=k+1 \\ k=j-1 \\ k\in[\![0,n-1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}}{=} f(x)-\lfloor x\rfloor = g(x).$

J'en conclus que g est 1-périodique. Je peux donc étudier g sur $[0,1[$.

Soit $x\in[0,1[$. Donc $\lfloor x\rfloor = 0$. De plus, $\forall k\in[\![0,n-1]\!], 0\le k\le n-1$ et $0\le x<1$ donc $0\le\frac{x+k}{n}\le\frac{x+(n-1)}{n}<\frac{1+(n-1)}{n} = 1$; et par conséquent, $\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor = 0$. Donc $f(x) = 0$. Et par suite $g(x) = 0$. Comme g est 1-périodique et nulle sur $[0,1[$, g est nulle partout. Ainsi, $x\in\mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor$.

Ex 8 Soit x réel et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n}-\frac{1}{n}\le u_n\le\frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Soit n un entier naturel non nul.

$\forall k\in[\![1,n]\!], \lfloor kx\rfloor \le kx < \lfloor kx\rfloor + 1$ donc $kx-1 < \lfloor kx\rfloor \le kx$.

Alors, en sommant ces n inégalités, j'obtiens : $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n}(kx)$.
Or, $\sum_{k=1}^{n}(kx) = x(\sum_{k=1}^{n} k) = \frac{xn(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \sum_{k=1}^{n}(kx) - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{xn(n+1)}{2} - n$.
Donc, $\frac{xn(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leq \frac{xn(n+1)}{2}$ et en divisant par $n^2 > 0$, $\frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2} - n\right) < u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2}\right)$. Ainsi,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Comme les deux suites qui encadrent u_n ont la même limite $\frac{x}{2}$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}$ .Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$

Si n est pair alors $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = 0+0+1+1+2+2+3+3+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2}$

$$S_n = \frac{n}{2} + 2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} p \ = \frac{n}{2} + 2\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Si n est impair alors $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = 0+0+1+1+2+2+3+3+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} p \ = 2\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \left(\frac{n^2-1}{4}\right)$$

OU BIEN

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\ pair}}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k\ impair}}\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \sum_{0\leq 2p\leq n}\left\lfloor \frac{2p}{2} \right\rfloor + \sum_{1\leq 2p+1\leq n}\left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\lfloor p \rfloor + \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}\left\lfloor p+\frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} p + \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} p$$

$$= \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1\right)}{2} + \frac{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor+1\right)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{8}(n+2+n-2) = \frac{n^2}{4}\ si\ n\ pair \\ \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) = \frac{n^2-1}{4}\ si\ n\ impair \end{cases}.$$

Ex 10 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} / \ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
En déduire que $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$ est dense dans $[0,1]$ $i.e.$ entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 0 \leq 2^n x - q < 1 \Leftrightarrow q \leq 2^n x < q+1 \Leftrightarrow q = \lfloor 2^n x \rfloor$.
Or $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq 2^n x \leq 2^n$ et par croissance de la fonction partie entière, $0 = \lfloor 0 \rfloor \leq \lfloor 2^n x \rfloor \leq \lfloor 2^n \rfloor = 2^n$. Donc, l'unique entier relatif q vérifiant $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ est $q = \lfloor 2^n x \rfloor \in [\![0, 2^n]\!]$.
Soit x et y deux réels tels que $0 \leq x < y \leq 1$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que : $y - x > \frac{1}{2^n}$.
$y - x > \frac{1}{2^n} > 0 \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{y-x} > 0 \Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln\left(\frac{1}{y-x}\right) \Leftrightarrow n\ln(2) > -\ln(y-x) \Leftrightarrow n > -\frac{\ln(y-x)}{\ln(2)}$.
Prenons $n = \max\left(0, \left\lfloor -\frac{\ln(y-x)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1\right)$. Alors $n \in \mathbb{N}\ et\ y - x > \frac{1}{2^n}$. D'après ce qui préfère, il existe $\exists q \in \mathbb{N} / \ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq y - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n} < y - x$. Posons $t = \frac{q}{2^n}$. Alors $t \in A\ et\ 0 < \ y - t < y - x\ \ i.e. x < t < y$. Donc t convient.

Ex 11 Résoudre $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor$, d'inconnue x réelle.

$\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor -x \rfloor + 5 \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor -x \rfloor + 2 \Leftrightarrow \lfloor -x \rfloor + 2 \leq 2x < \lfloor -x \rfloor + 3$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ -x-1<\lfloor -x \rfloor\leq -x}} -x+1 < 2x < -x+3 \Rightarrow 1 < 3x < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1.$$

Ainsi, seuls les réels de $]\frac{1}{3}, 1[$ peuvent être solutions.
Soit $x \in]\frac{1}{3}, 1[$.
$\mathbf{1}$***er cas*** : $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$. Alors $\frac{2}{3} < 2x < 1\ et\ \frac{-1}{2} < -x < \frac{-1}{3}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 0$ et $\lfloor -x \rfloor = -1$. Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor \neq \lfloor -x \rfloor + 2$ et par suite $\lfloor 2x+3 \rfloor \neq \lfloor -x+5 \rfloor$
$\mathbf{2}$***eme cas*** : $\frac{1}{2} \leq x < 1$. Alors $1 \leq 2x < 2\ et\ -1 < -x \leq \frac{-1}{2}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 1$ et $\lfloor -x \rfloor = -1$. Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor -x \rfloor + 2$ et par suite $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor$.
Ainsi, Sol= $[\frac{1}{2}, 1[$.

Ex 12 1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x>p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x<p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ où $p \in \mathbb{Z}$. Qu'en déduit-on pour $(x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$?
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

1) Posons $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$.
$\forall x \in]p, p+1[, f(x) = p + \sqrt{x-p}$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x>p}} f(x) = p + \sqrt{p-p} = p = f(p)$.
$\forall x \in]p-1, p[, f(x) = p - 1 + \sqrt{x-(p-1)}$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to p \\ x>p}} f(x) = p - 1 + \sqrt{p-(p-1)} = p - 1 + \sqrt{1} = p = f(p)$.
J'en déduis que la fonction f est continue en p.
2)Posons $g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
$\forall x \in]0,1[, \lfloor x \rfloor = 0$ donc $g(x) = 0$ et par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$
$\forall x \in]-1,0[, \lfloor x \rfloor = -1$ donc $g(x) = -\frac{1}{x}$ et par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.
$\forall x > 1, 0 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor - 1\ donc\ \ 1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} < 1 - \frac{1}{\lfloor x \rfloor}(**)$. De plus $\forall x > 1, x+1 < \lfloor x \rfloor$. Donc comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} = 0$. Alors d'après $(**)$, $\frac{x}{\lfloor x \rfloor}$ est encadré par deux fonctions de limite 1 en$+\infty$, je peux conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = 1$.

Ex 13 Représenter la courbe de f: $\left(x \mapsto \frac{1}{\lfloor x - \lfloor -x \rfloor \rfloor}\right)$.

***Df* ?** $f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow \lfloor x-\lfloor -x\rfloor\rfloor \neq 0$

Or $\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1 \text{ si } x\notin\mathbb{Z} \\ -x \text{ si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R},\ x-\lfloor -x\rfloor = \begin{cases} x+\lfloor x\rfloor + 1 \text{ si } x\notin\mathbb{Z} \\ 2x \text{ si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Si $x\in\mathbb{Z}$ alors $x-\lfloor -x\rfloor \neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$.

Si $x\notin\mathbb{Z}$ alors $2\lfloor x\rfloor + 1 \leq x+\lfloor x\rfloor + 1 < 2\lfloor x\rfloor + 2$ *donc*, $\lfloor x-\lfloor -x\rfloor\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 1$ *est un entier impair* et par suite, $\lfloor x-\lfloor -x\rfloor\rfloor \neq 0$.

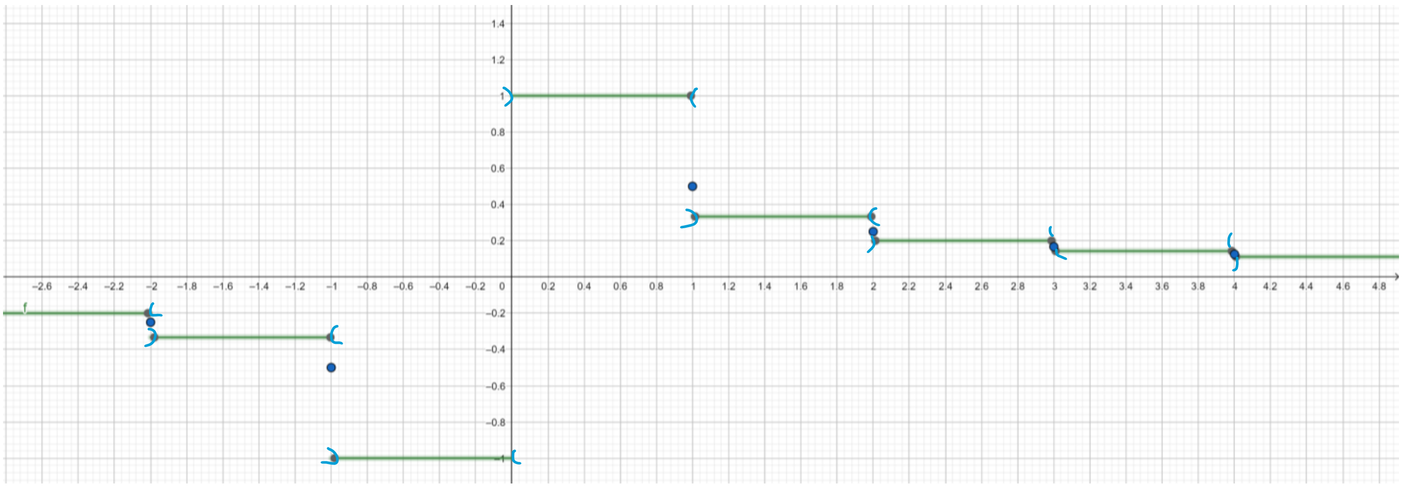
Ainsi, $Df = \mathbb{R}^*$.

Nouvelle expression de f :

Si $x\notin\mathbb{Z}$ alors $f(x) = \frac{1}{2\lfloor x\rfloor + 1}$ et par conséquent, $\forall k\in\mathbb{Z}, \forall x\in\,]k, k+1[, f(x) = \frac{1}{2k+1}$.

Si $k\in\mathbb{Z}^*$ alors $f(k) = \frac{1}{2k}$.

Ainsi, Cf a l'allure suivante :



DEUX EXERCICES SUPPLEMENTAIRES (plus compliqués) SUR LES PARTIES ENTIERES

1. Soit $n\in\mathbb{N}*$. Montrer que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

a) Montrer alors que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$

c) Expliquer pourquoi cette égalité est impossible et conclure.

1. Soit $n\in\mathbb{N}*$. Montrons que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Il suffit pour cela de montrer que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\sqrt{4n+2}$ puis utiliser la croissance de la partie entière. Les deux réels étant positifs, comparons leurs carrés qui sont ordonnés dans le même sens qu'eux:
$\left(\sqrt{4n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 4n+1-n-(n+1)-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = 2n-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) < 0$.
Donc, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\sqrt{4n+2}$ et par croissance de la partie entière,

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

a) Montrons que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

Comme $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor$ *et* $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ sont des entiers distincts et par suite $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor + 1 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Alors $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor + 1 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

b) Alors $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$. De plus, $0\leq\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor\leq\sqrt{4n+2}$. Donc, $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 \leq \sqrt{4n+2}^2$. Enfin, $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$. *Or* $n = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$. Donc, $4n+1 = 2n+1+2n < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2$. Par conséquent , $4n+1 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 \leq \sqrt{4n+2}^2 = 4n+2$. Autrement dit, l'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$ est dans l'intervalle $]4n+1, 4n+2]$ qui contient un seul entier : $4n+2$. J'en déduis que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$.

c) Prouvons que cette égalité est impossible.

Sous l'hypothèse que l' entier n non nul vérifie $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, on a prouvé que : $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2 = 2(2n+1)$. L'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$ est donc pair. Alors le cours assure que l'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ est aussi pair. Alors il existe un entier k tel que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor = 2k$. Alors $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4k^2$ et par suite $4k^2 = 2(2n+1)$ donc $2n+1 = 2k^2$. Cette égalité entre un entier pair et un entier impair est absurde !! J'en conclus qu'il n'existe aucun entier n non nul vérifiant $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Comme de plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, je peux conclure que :
$\forall n\in\mathbb{N}^*, \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.