Programme de colle 13

Chap 9 : Comparaison des fonctions. Développements limités.

II Comparaisons entre fonctions

- **Définitions** d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage de a , d'une fonction équivalente à une autre au voisinage de a , d'une fonction dominée par une autre au voisinage de a . Notations .
- **Caractérisation par le quotient** : si f et g sont définies sur une même voisinage de a et g ne s'annule pas sur ce voisinage de a (sauf éventuellement en a et dans ce cas, il faut que $f(a) = 0$ si $f(a)$ existe)alors
- **Théorème de comparaison .**
- **Propriétés et opérations sur les fonctions négligeables :**
- **Caractérisation et propriétés sur les équivalents** :
- **Opérations sur les fonctions équivalentes** : produit , quotient , puissance constante , composition à droite .
- **Opérations interdites** sur les fonctions équivalentes : somme , composée à gauche et puissance non constante .
- **Exemples déjà rencontrés :**
  - ✓ Comparaison des fonctions puissances entre elles au voisinage de 0 et de $+\infty$: soit α et β *réels*
  - ✓ Comparaison des fonctions $(x \mapsto (x-a)^k)$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ au voisinage de a . Soit n et m entiers.
  - ✓ Equivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de $+\infty$ puis de 0.
  - ✓ Croissances comparées.
  - ✓ Fonctions dérivables à dérivée non nulle
  - ✓ Equivalents usuels obtenus par taux d'accroissement ou d'autres limites usuelles.
- **se ramener en 0**.

III Développements limités

- **Définition** d'un développement limité en un réel et en particulier en 0. **Unicité** de ce DL.
- **Propriétés des DL :**
  - ✓ Equivalent
  - ✓ « se ramener en 0 »
  - ✓ Troncature
  - ✓ Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impair
- **Développements limités usuels :**
  - ✓ Développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$ obtenu par somme géométrique puis ceux de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1+x^2}$ par composition.
  - ✓ **Théorème de Taylor-Young** et développement limité en 0 de $e^x, \cos(x), \sin(x), sh(x), ch(x), (1+x)^\alpha$.
  - ✓ **Théorème d'intégration terme à terme** et développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, $Arctan(x)$, $\underbrace{\tan(x)\ et\ Arcsin(x)}_{ordre\ 5\ uniquement}$.
- **Opérations sur les DL :** Combinaison linéaire et produit. Composition. Inverse et quotient.
- Applications :
  - ✓ Recherche de limite et d'équivalent
  - ✓ Caractérsiation de la dérivabilité d'une fonction en un point a par son $DL_1\ (a)$ et position de la courbe par rapport à son asymptote

●Si f est définie en x_0 $et\ au\ voisinage\ de\ x_0\ alors$
f admet le $DL_1\ (x_0)$ $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est dérivable en x_0 , $f(x_0) = A$ et $f'(x_0) = B$.
●Si f est définie $au\ voisinage\ de\ x_0\ mais\ pas\ en\ x_0\ alors$
f admet le $DL_1\ (x_0)$ $f(x) = A + B(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow f$ est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur A et son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en x_0 , $\tilde{f}\,(x_0) = A\ et\ \tilde{f}'(x_0) = B$.

  - ✓ Recherche d'asymptote et position de la courbe par rapport à son asymptote
  - ✓ Recherche de DL d'une fonction dont l'expression est définie par une intégrale.
  - ✓ Recherche de DL d'une bijection réciproque.

Chapitre 10 Suites réelles et suites complexes.

I Définitions

- ➢ suite réelle , suite complexe , représentation
- ➢ suite bornée
- ➢ suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante
- ➢ suite ayant une limite finie :

Une suite réelle (resp. complexe) (u_n) tend vers le réel (resp. complexe) L lorsque :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$

- ➢ suite réelle ayant une limite infinie :

Une suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_A \Longrightarrow u_n \geq A)$.
Une suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_B \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_B \Longrightarrow u_n \leq B)$

- ➢ suite convergente, suite divergente.

II Propriétés fondamentales des suites

- Caractère borné ou pas :

Toute suite convergente est bornée.

Si (u_n) est une suite réelle de limite finie L et a et b sont deux réels tels que : $a < L < b$ alors à partir d 'un certain rang, $a \leq u_n \leq b$. En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.

Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée…

- Théorème Unicité de la limite.

Une suite (u_n) ne peut avoir qu'une seule limite quand $n \to +\infty$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ cette limite lorsqu'elle existe.

- Caractérisation d'une suite convergente : Soit une suite (u_n)réelle (resp. complexe) et L un réel (resp. complexe)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - L = \cdots \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = \cdots \Leftrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon_n \; tel\ que\ \lim\limits_{n} \varepsilon_n = 0.$

- Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement :

Soit u, v et w des suites réelles.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

III Borne sup. ou inf.

- Définition et théorème d'existence :

L'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet un plus petit élément appelé borne supérieure de A et noté $sup(A)$; $sup(A)$ est donc le plus petit majorant de A.
L'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet un plus grand élément appelé borne inférieure de A et noté $inf(A)$; $inf(A)$ est donc le plus grand minorant de A.
Lorsque A n'est pas majorée, $\sup(A) = +\infty$. Lorsque A n'est pas minorée, $\sup(A) = -\infty$.

- Relation entre plus petit (resp. grand) élément et borne inférieure (resp. supérieure). Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Si il existe un élément m de A qui minore A alors $m = \min(A) = \inf(A)$.
Si il existe un élément m' de A qui majore A alors $m' = \max(A) = \sup(A)$.
Si A admet une borne inf M' et $M' \notin A$ alors A n'admet pas de minimum.
Si A admet une borne sup M et $M \notin A$ alors A n'admet pas de maximum.

- Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf. finie.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel.

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$$

$$m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A / m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$$

- Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel ou un infini.

$$m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$$

$$m = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, a \leq m \\ il\ existe\ une\ suite\ (a_n)\ d'éléments\ A\ telle\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = m. \end{cases}$$

CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINTIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

1. Théorème d'unicité d'un DL. Application au $DL(0)$ d'une fonction impaire.
2. Caractérisation d'une fonction dérivable en a par son $DL_1(a)$.
3. Théorème d'unicité de la limite d'une suite.
4. Démontrer que si $a < L < b$ alors toute suite réelle de limite finie L est encadrée, à partir d 'un certain rang , par a et b.
5. Démontrer que la caractérisation séquentielle d'une borne supérieure