CORRIGE
TD 3 Trigonométrie.

Ex 14 Montrer la fonction $f:\left(x \mapsto \frac{2cosx-1}{3-2sinx}\right)$ est bornée.

$\forall x \in \mathbb{R}, 3-2\sin(x) \geq 3-2=1. Donc\ Df=\mathbb{R}$.

$f:\left(x \mapsto \frac{2cosx-1}{3-2sinx}\right)$ est bornée lorsque l'ensemble $A=\left\{\frac{2\cos(x)-1}{3-2\sin(x)} / x \in \mathbb{R}\right\}$ est bornée. Je cherche donc M réel tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{2\cos(x)-1}{3-2\sin(x)}\right| \leq M$.

$Soit\ x \in \mathbb{R}. \left|\frac{2\cos(x)-1}{3-2\sin(x)}\right| = \frac{|2\cos(x)-1|}{|3-2\sin(x)|}$.

Or, $0 \leq |2\cos(x)-1| \leq |2\cos(x)|+|1| = 2|\cos(x)|+1 \leq 2+1=3$.

Et $|3-2\sin(x)| \geq ||3|-|2\sin(x)|| \geq 3-2|\sin(x)| \geq 3-2=1>0$. Donc, $0 \leq \frac{1}{|3-2\sin(x)|} \leq \frac{1}{1}=1$.

Donc, $0 \leq \left|\frac{2\cos(x)-1}{3-2\sin(x)}\right| \leq 3$. Et par suite, $\forall x \in \mathbb{R}, -3 \leq \frac{2\cos(x)-1}{3-2\sin(x)} \leq 3$. f est donc bornée.

Ex 15 Calculons $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right)$ $et \sin\left(\frac{103\pi}{8}\right)$.

$A]$ $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{36\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

<u>1ère méthode</u> : posons $a=\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1-\left(\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^2}=\frac{2a}{1-a^2}$. Donc $\frac{2a}{1-a^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors $a^2+2\sqrt{3}a-1=0$. Donc $a=\frac{-2\sqrt{3}-4}{2}=-\sqrt{3}-2$ ou $a=2-\sqrt{3}$. Mais comme $a>0, a=2-\sqrt{3}$. Donc, $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-2$.

<u>2ème méthode</u> : $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = -\frac{1}{2}(3+1-2\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$.

B] $\sin\left(\frac{103\pi}{8}\right) = \sin\left(12\pi+\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi-\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$. Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Ainsi, $\sin\left(\frac{103\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Ex 15 1) Résoudre $cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1$

2) Résoudre $-4cos(x)+3\sin(x)=5$

3) Résoudre $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases}$.

1) $cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$.

$$Sol = \{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) $-4cos(x)+3\sin(x)=5 \Leftrightarrow \sqrt{16+9}\left(-\frac{4}{\sqrt{16+9}}cos(x)+\frac{3}{\sqrt{16+9}}\sin(x)\right)=5 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}cos(x)+\frac{3}{5}\sin(x)=1$. Comme $\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$, il existe un réel θ tel que : $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{4}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{3}{5} \end{cases}$. $\theta = Arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ convient.

Alors, $-4cos(x)+3\sin(x)=5 \Leftrightarrow \cos(\theta)cos(x)+\sin(\theta)\sin(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x-\theta)=1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x-\theta=2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x=\theta+2k\pi$.

$$Sol = \{\theta+2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \in [-3\pi, -2\pi[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \in [-3\pi, -2\pi[\\ \exists k \in \mathbb{Z}/2x = \pm\text{Arccos}\left(-\frac{47}{49}\right)+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow 2x = -\text{Arccos}\left(-\frac{47}{49}\right)-2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\text{Arccos}\left(-\frac{47}{49}\right)-\pi$.

$$Ainsi, Sol = \left\{-\frac{1}{2}\text{Arccos}\left(-\frac{47}{49}\right)-\pi\right\}.$$

Ex 16 Pour tout réel x de $[0,\pi]$, $sin^2x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi-x)$ et pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

1) Soit $f:(x \mapsto \frac{2}{\pi}x-\sin(x))$;

f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=\frac{2}{\pi}-\cos(x)$.

f' est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x)=\sin(x) \geq 0$. Alors f'' est positive et ne s'annule qu'en un point isolé 0 . Par conséquent, f' est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. $f'(0)<0<f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Comme f' est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que f' s'annule sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	a	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	<0 $-$	0 $+$	>0
$f(x)$	0 $-$		$-$ 0

Comme f' est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, f' ne s'annule qu'une seule fois sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en un réel a. Alors d'après les variations de f', on peut en déduire le signe de f' et par suite les variations de f indiquées dans le tableau de variations. D'après les valeurs $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et les variations de f, je peux conclure que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leq 0$ et par conséquent, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

2) Soit $f:(x \mapsto sin^2(x)-\frac{4}{\pi^2}x(\pi-x))$.

$\forall x \in [0,\pi], \pi-x \in [0,\pi]$ et $f(\pi-x)=f(x)$. Donc, les points $M(x,f(x))$ et $M'(\pi-x,f(x))$ sont deux points de Cf et sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$. La courbe Cf est donc symétrique par rapport à cette droite. En étudiant f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis en complétant l'étude en utilisant cette symétrie, on aura le signe de f que $[0,\pi]$.

Etudions donc f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \frac{4}{\pi^2}[(\pi - x) - x] = \sin(2x) + \frac{4}{\pi^2}[2x - \pi]$.

f' est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) = 2\cos(2x) + \frac{8}{\pi^2}$.

f'' est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'''(x) = -4\sin(2x)$. . Alors f'' est positive et ne s'annule qu'en un point isolé 0 . Par conséquent, f' est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		b		a		$\frac{\pi}{2}$
$f'''(x)$				$-$			
$f''(x)$	>0	$\searrow$	$+$	$\searrow$	0	$-$ $\searrow$	<0
$f'(x)$	<0	$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-$				0

Des variations strictes , valeurs et continuité de f'', j'en déduis que f'' s'annule une seule fois sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en un réel a. On en déduit le signe de f'' puis les variations de f' . Des variations strictes , valeurs et continuité de f', j'en déduis que f' s'annule une seule fois sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ en un réel b. On en déduit le signe de f' puis les variations de f.Des valeurs et variations de f, on en déduit le signe de f: $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) \leq 0$ et par symétrie, $\forall x \in [0,\pi], f(x) \leq 0$. Ainsi, $\forall x \in [0,\pi]$ $sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x))$.

Ex 17 Montrer que $f\colon \left(x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \tan\left(\frac{3x}{5}\right)\right)$ est périodique et déterminer une période (la plus petite possible).

Je cherche $T > 0$ tel que : $\forall x, f(x+T) = f(x)$. Or, $f(x+T) = \cos\left(\frac{2x+2T}{3}\right) + \tan\left(\frac{3x+3T}{5}\right) = \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{2}{3}T\right) + \tan\left(\frac{3x}{5} + \frac{3}{5}T\right)$. Cherchons T telle que $\frac{2}{3}T = 2k\pi$ et $\frac{3}{5}T = m\pi$ avec k et m entiers i.e. $T = 3k\pi$ et $T = \frac{5m}{3}\pi$. Or, $3k\pi = \frac{5m}{3}\pi \Leftrightarrow 9k = 5m$. Prenons $k = 5$ et $m = 9$. Alors, $T = 15\pi$ convient. Ainsi, f est $15\pi -$ périodique.

Ex 18 Représenter $f\colon \left(x \mapsto 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)\right)$.

f est définie, dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{4\pi}{2}\right) - \cos(x+4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) - \cos(x+4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) = f(x)$. f est donc $4\pi - périodique$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = 2\cos\left(-\frac{x}{2}\right) - \cos(-x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x) = f(x)$. f est donc paire.

Etudions f sur $[0,2\pi]$. On complètera ensuite l'étude par symétrie et périodicité.

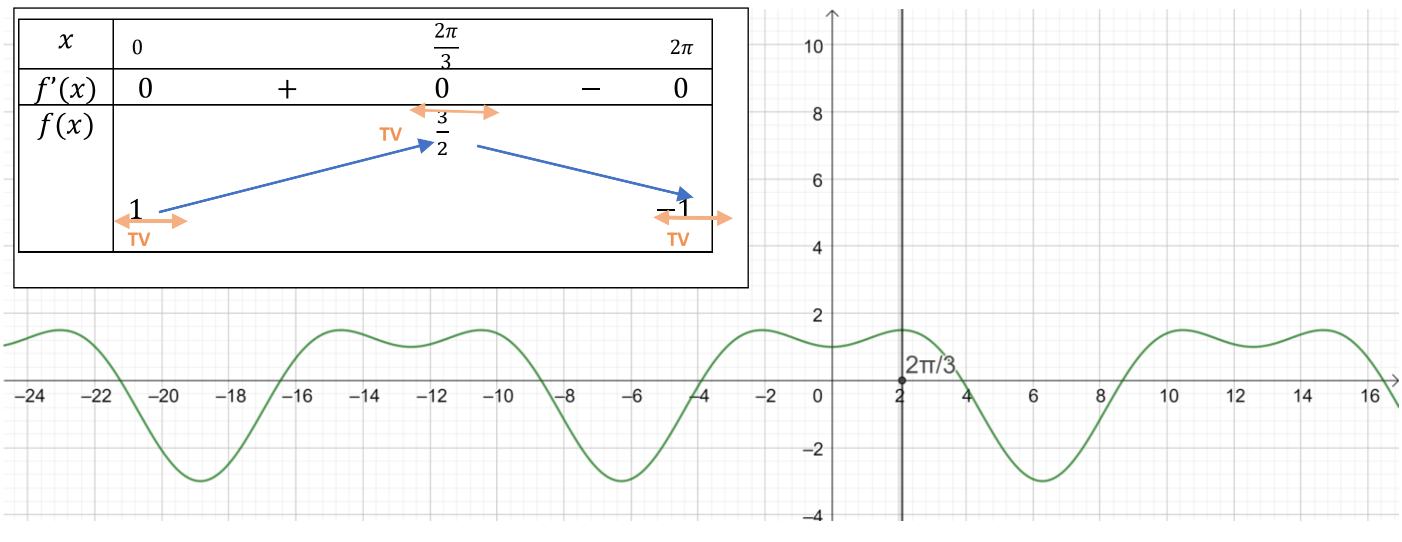
$\forall x \in [0,2\pi], f'(x) = \frac{2}{2}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x) = \sin(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-\frac{x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{x}{2}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)$.

Etudions le signe de $f'(x)$; pour cela, il faut étudier le signe de $\sin\left(\frac{3x}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ puisque $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ $sont\ de\ même\ signe$.

$\forall x \in [0,2\pi], \frac{3x}{4} \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\frac{x}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0. \\ \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$.

Et par suite, $\forall x \in [0,2\pi]$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x = 2\pi\ ou\ x \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\right)$ et f' s'annule uniquement en 0 , en 2π et en $\frac{2\pi}{3}$. J'en déduis que f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$. D'où le tableau des variations, valeurs de f et tangentes de Cf :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1 TV	$\nearrow$	TV $\frac{3}{2}$	$\searrow$	-1 TV



Ex 19 **a.** Rappeler $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ en fonction du paramètre réel a et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

b. Montrer que $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)}$.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Alors $\forall x \neq 0, \frac{\sin(ax)}{x} = a\frac{\sin(ax)}{ax}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$.

$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) \overset{continuité}{\triangleq} 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{T.A}{\triangleq} 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

Autre méthode : $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\tan(x)-0}{x-0} = taux\ d'accroissementde$ tan en 0.

Comme tan est dérivable en 0 , $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = tan'(0) = 1 + tan^2(0) = 1$.

b. $\forall x \neq 0, \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1-2(\sin(\frac{x}{2}))^2-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\frac{(\sin(\frac{x}{2}))^2-}{\frac{x^2}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$ et ainsi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)} = \frac{\cos(x)-1}{x^2}\times\frac{x^2}{tan^2(x)} = \left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right)\times\left(\frac{x}{tan(x)}\right)^2$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)} = -\frac{1}{2}\times 1^2 = -\frac{1}{2}$.

Ex 20 Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $4cos^2(x) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$
3. $|\lfloor\sin(x)\rfloor| = 1$
4. $cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1$
5. $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2$
6. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$
7. $cos^2(x) > \frac{3}{4}$
8. $tan(3x) < 1$
9. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$
10. $cos(2x) - tan(x) > 1$
11. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1$.

1. Soit x un réel. On pose $X = \sin(x)$.

$4cos^2(x) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 4(1 - sin^2(x)) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$

$$\overset{X=\sin(x)}{\Leftrightarrow} 4X^2 - 2(1+\sqrt{2})X + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X^2 - \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)X + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \overset{\begin{cases} ab=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \\ a+b=\frac{1+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\end{cases}}{\Leftrightarrow} \left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\ ou\ \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}.$$

$Donc, Sol = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$

3. $|\lfloor\sin(x)\rfloor| = 1 \Leftrightarrow \lfloor\sin(x)\rfloor = \pm 1 \Leftrightarrow \sin(x) \in [1,2[\ ou\ \sin(x) \in [-1,0[\Leftrightarrow \sin(x) = 1\ ou\ \sin(x) < 0$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ \ ou\ x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[$.

$Donc, Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$.

4. $cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow 1 - sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = sin^2(2x)$

   $\Leftrightarrow sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = sin(2x)\ ou\ sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -sin(2x)$

   $\Leftrightarrow sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = sin(2x)\ ou\ sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = sin(-2x)$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x + \frac{\pi}{3} = 2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2k\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + 2k\pi$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\ ou\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\ ou\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$Donc, Sol = \{\frac{\pi}{"} + 2k\pi, \frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

5. $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6+2}\left[\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}\sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cos(2x)\right] = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x)\right] = 2$

   $\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ou\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{5\pi}{24} + k\pi\ ou\ x = \frac{11\pi}{24} + k\pi$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{11\pi}{24} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

6. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$

   $\Leftrightarrow \sin(2x) + \sin(10x) + \sin(4x) + \sin(8x) + \sin(6x) = 0$

   $\Leftrightarrow 2\sin(6x)\cos(4x) + 2\sin(6x)\cos(2x) + \sin(6x) = 0$

   $\Leftrightarrow [2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1]\sin(6x) = 0$

   $\Leftrightarrow [2\cos(4x) + 2\cos(2x) + 1] = 0\ ou\ \sin(6x) = 0$

   $\Leftrightarrow 2(2cos^2(2x) - 1) + 2\cos(2x) + 1 = 0\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ 6x = k\pi$.

   $\overset{X=\cos(2x)}{\Leftrightarrow}\ 4X^2 + 2X - 1 = 0\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow X = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ X = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ \cos(2x) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ou\ 2\cos^2(x) - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\ ou\ \cos^2(x) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\ ou\ \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\ ou\ \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{k}{6}\pi$

   $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi$

   $ou\ x = Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = -Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi\ \ ou\ \ x = \frac{k}{6}\pi$.

$$Sol = \left\{\pm Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi, \pm Arccos\left(\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}\right) + 2k\pi, \frac{k}{6}\pi\ /\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

12. $cos^2(x) > \frac{3}{4} \Leftrightarrow c > 0 \Leftrightarrow \left(cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0.$

Comme $(x \mapsto cos^2(x))$ est π −périodique, cherchons les solutions sur $[0, \pi]$.

Or, $cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$. Et $cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Leftrightarrow cos(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{5\pi}{6}\right[$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		+	0	−		−	
$cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$		+		+	0	−	
$cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$		+	0	−	0	+	

Ainsi,

$Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi[\cup]\frac{5\pi}{6} + k\pi, k\pi]$

13. $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$. Comme $(x \mapsto tan(3x))$ est $\frac{\pi}{3}$ −périodique, je peux résoudre l'inéquation sur $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

Soit $x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$. Alors $3x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc, $tan(3x) < 1 \Leftrightarrow 3x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}[$. Ainsi, $Sol = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}[$.

14. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)} \Leftrightarrow 2cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1$

$\Leftrightarrow \cos(2x) - \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \; ou \; 2x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \; ou \; impossible$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

15. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

La fonction $(x \mapsto cos(2x) - tan(x))$ étant π −périodique, résolvons cette équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$cos(2x) - tan(x) > 1 \Leftrightarrow 2cos^2(x) - 1 - tan(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + tan^2(x)} - tan(x) > 2$

$\Leftrightarrow 2 - tan(x)(1 + tan^2(x)) > 2(1 + tan^2(x))$

$\Leftrightarrow tan^3(x) + 2tan^2(x) + \tan(x) < 0 \Leftrightarrow (tan^2(x) + 2tan(x) + 1)\tan(x) < 0$

$\Leftrightarrow (\tan(x) + 1)^2 \tan(x) < 0 \Leftrightarrow (\tan(x) + 1)^2 \tan(x) < 0$

$\Leftrightarrow \tan(x) \neq -1 \; et \; \tan(x) < 0$

$\Leftrightarrow]-\frac{\pi}{2}, 0[\backslash \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

Ainsi, $Sol = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + p\pi, +p\pi[\backslash \left\{-\frac{\pi}{4} + p\pi\right\}$

16. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / -\frac{\pi}{4} + p\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + p\pi \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / -\frac{\pi}{2} + p\pi \leq x \leq p\pi$

Ainsi, $Sol = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + p\pi, +p\pi]$

Ex 21 Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $g(x) = \frac{1}{cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x)}$

- $f(x)$ existe $\Leftrightarrow \begin{cases} tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \; existe \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \end{cases}$.

$u: (x \mapsto \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right))$ est $\frac{\pi}{2}$ − *périodique* (car $D_u = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}, \forall x \in D_u, x + \frac{\pi}{2} \in D_u \; et \; u\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = tan\left(2x + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = u(x)$) .

Cherchons le signe de u sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \backslash \left\{\frac{3\pi}{8}\right\}$: *Soit* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \backslash \left\{\frac{3\pi}{8}\right\}$. *Alors* $2x \in [0, \pi] \backslash \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$ *et* $2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$;

par conséquent, $\begin{cases} tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \backslash \left\{\frac{3\pi}{8}\right\}. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$.

Par suite, en utilisant la périodicité de u , $\begin{cases} u(x) > 0 \\ x \in D_u \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[$. Ainsi, $Df = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right[$.

- $g(x)$ existe $\Leftrightarrow cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(6x)] - \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(2x)] \neq 0$

Or, $cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(6x)] - \frac{1}{2}[\cos(8x) + \cos(2x)] = 0 \Leftrightarrow \cos(6x) = \cos(2x)$

$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / 6x = \pm 2x + 2p\pi \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / x = \frac{2p\pi}{8} \, ou \, x = \frac{2p\pi}{4} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / x = \frac{p\pi}{4}$.

Donc, $g(x)$ existe $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{Z} / x \neq \frac{p\pi}{4}$. Ainsi, $Dg = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{p\pi}{4} / p \in \mathbb{Z}\right\}$

Ex 22 Calculer :

1. $I = \int_0^{\pi} sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$
2. $J = \int_0^{\pi} sin(mx)\sin(px)\, dx$ où $(m, p) \in \mathbb{N}^2$.

1. $I = \int_0^{\pi} sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(x)) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

2. $J = \int_0^{\pi} \sin(mx)\sin(px)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{mx - px}{2}\right) - cos\left(\frac{mx + px}{2}\right)\right] dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[cos\left(\left(\frac{m-p}{2}\right)x\right) - cos\left(\left(\frac{m+p}{2}\right)x\right)\right] dx$.

Si $m = p = 0$ alors $J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1 - 1] dx = 0$.

Si $m = p > 0$ alors $J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}[1 - \cos(px)] dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{p}\sin(px)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.

Si $m \neq p$ alors $J = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[cos\left(\left(\frac{m-p}{2}\right)x\right) - cos\left(\left(\frac{m+p}{2}\right)x\right)\right] dx = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{m-p}\right) sin\left(\left(\frac{m-p}{2}\right)x\right) + \left(\frac{2}{m+p}\right) sin\left(\left(\frac{m+p}{2}\right)x\right)\right]_0^{\pi} \underbrace{=}_{car\, \forall k \in \mathbb{Z},\, \sin(k\pi) = 0} 0$.

Ex 23 Démontrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $4cos^3(t) - 3cost = \cos(3t)$.

En déduire les solutions de l'équation (e): $8x^3 - 6x - 1 = 0$ d'inconnue x réelle.

$cos(3t) = cos(2t + t) = cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t) = [2cos^2(t) - 1]\cos(t) - 2\cos(t)\, sin^2(t)$
$= 2cos^3(t) - \cos(t) - 2\cos(t)\,[1 - cos^2(t)] = 4cos^3(t) - 3cost.$

- Soit $x \in [-1,1]$. Posons $t = Arccos(x)$. Alors $t \in [0,\pi]$ et $\cos(t) = x$.

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow 8cos^3(t) - 6\cos(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4cos^3(t) - 3\cos(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(3t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/\quad 3t = \frac{\pi}{3} + 2p\pi \text{ ou } 3t = -\frac{\pi}{3} + 2p\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/\quad t = \frac{\pi}{9} + \frac{2p\pi}{3} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{9} + \frac{2p\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/\quad t = \frac{\pi}{9} \text{ ou } t = \frac{7\pi}{9} \text{ ou } t = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$$
$$\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right).$$

Comme $\frac{\pi}{9} < \frac{5\pi}{9} < \frac{7\pi}{9}$ la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, les réels $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ sont trois solutions distinctes de (e). $(*)$

- Soit $x \notin [-1,1]$. Alors $|x| > 1$. De plus, $|8x^3 - 6x| = 2|4x^2 - 3||x|$. Or , $|4x^2 - 3| \geq \big||4x^2| - |3|\big| \geq |4x^2| - |3| = 4|x|^2 - |3| \geq 4 - 3 = 1$.

Donc, $|8x^3 - 6x| \geq 2$. Ainsi x n'est pas solution.

Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ sont les seules solutions de (e).

$(*)$*remarque*: l'équation (e) est polynomiale de degré 3, donc on montrera que cette équation admet au plus 3 solutions. Ainsi, à la fin de la recherche des solutions dans $[-1,1]$, on pourra directement conclure que les trois solutions dans (-1,1] sont les uniques solutions de (e).

Ex 24 Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe. Exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t.
En déduire les solutions de l'équation : $\left(1 - \sqrt{3}\right)\cos(x) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sin(x))$ d'inconnue x réelle.

Ex 25 Justifier que pour tout réel x élément de D , $\frac{sinx+\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)} = \tan(3x)$ où D est le domaine de « définition » de cette formule que l'on déterminera.

- $\frac{sinx+\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)}$ *existe* $\Leftrightarrow \cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) \neq 0$.

Or, $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = \cos(x) + \cos(5x) + \cos(3x) = 2\cos(3x)\cos(2x) + \cos(3x) = \cos(3x)\,[2\cos(2x) + 1]$.

Donc,
$\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos(3x) = 0$ *ou* $[2\cos(2x) + 1] = 0$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *ou* $cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *ou* $2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ *ou* $2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ *ou* $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ *ou* $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

De plus, $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) \neq 0 \Leftrightarrow \cos(3x) \neq 0$ *ou* $[2\cos(2x) + 1] \neq 0 \Rightarrow tan(3x)$ existe .

Ainsi, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- $\forall x \in D, \sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = [\sin(x) + \sin(5x)] + \sin(3x) = 2\sin(3x)\cos(2x) + \sin(3x) = \sin(3x)\,[2\cos(2x) + 1]$

Alors $\forall x \in D, \frac{sinx+\sin(3x)+\sin(5x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)} = \frac{\sin(3x)[2\cos(2x)+1]}{\cos(3x)[2\cos(2x)+1]} = \tan(3x)$.

Ex 26 Soit $a = \frac{\pi}{20}$ et $S = \tan(a) - \tan(3a) - \tan(7a) + \tan(9a)$.

1. Montrer que $tan(9a) = \frac{1}{tan(a)}$ et $tan(7a) = \frac{1}{tan(3a)}$. En déduire que : $S = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right)$.
2. En déduire que : $S = 4$.

1. $tan(9a) = \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{2} - 9a\right)} \overset{\frac{\pi}{2} - 9\frac{\pi}{20} = \frac{10\pi - 9\pi}{20} = \frac{\pi}{20}}{\cong} \frac{1}{tan(a)}$ et $tan(7a) = \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{2} - 7a\right)} \overset{\frac{\pi}{2} - 7\frac{\pi}{20} = \frac{10\pi - 7\pi}{20} = \frac{3\pi}{20}}{\cong} \frac{1}{tan(3a)}$. Donc,

$S = \tan(a) - \tan(3a) - \frac{1}{\tan(3a)} + \frac{1}{\tan(a)} = \frac{tan^2(a)+1}{\tan(a)} - \frac{tan^2(3a)+1}{\tan(3a)} = \frac{1}{\cos^2(a)\tan(a)} - \frac{1}{\cos^2(3a)\tan(3a)} = \frac{1}{\cos(a)\sin(a)} - \frac{1}{\cos(3a)sin(3a)}$

$S = \frac{2}{\sin(2a)} - \frac{2}{sin(6a)}$.

2. $S = 2\frac{\sin(6a)-\sin(2a)}{\sin(2a)\,sin(6a)} = 2\frac{2\sin(2a)\cos(4a)}{\sin(2a)\,sin(6a)} = 4\frac{\cos(4a)}{sin(6a)} = 4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4a\right)}{sin(6a)} \overset{\frac{\pi}{2} - 4\frac{\pi}{20} = \frac{10\pi - 4\pi}{20} = \frac{6\pi}{20}}{\cong} 4\frac{\sin(6a)}{sin(6a)} = 4$.

Ex 27 Montrer que pour tout réel x de $[0,\pi]$ et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq nsin(x)$.

Fixons x de $[0,\pi]$. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "$|\sin(nx)| \leq nsin(x)$".

Initialisation : $|\sin(0x)| = 0 \leq 0 \times sin(x)$. Donc $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose que $H(n)$: "$|\sin(nx)| \leq nsin(x)$" est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$: "$|\sin((n+1)x)| \leq (n+1)sin(x)$" est vraie.

$\big|\sin\big((n+1)x\big)\big| = |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \overset{1ère\ I.T.}{\leq} |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)|$

Et par suite, $\big|\sin\big((n+1)x\big)\big| \leq |\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)|$

$0 \leq |\sin(nx)| \leq nsin(x)$ et $0 \leq |\cos(x)| \leq 1$ .Donc, $|\sin(nx)||\cos(x)| \leq nsin(x)$.

$0 \leq |\cos(nx)| \leq 1$ et $0 \leq |\sin(x)| \overset{car\ x \in [0,\pi]}{\cong} \sin(x)$. Donc, $|\cos(nx)||\sin(x)| \leq sin(x)$.

Par conséquent, $|\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)| \leq nsin(x) + \sin(x) = (n+1)\sin(x)$.

Et ainsi, $\big|\sin\big((n+1)x\big)\big| \leq (n+1)\sin(x)$. Ainsi, $H(n+1)$vraie dès que $H(n)$ vraie.

CCL : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "$|\sin(nx)| \leq nsin(x)$" est vraie.

Ex 28 Montrer que : $\forall n \geq 2, cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ H(n)$: "$cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$".

<u>Initialisation</u> : $cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2}}_{2-1\ radicaux\ superposés}$. Donc $H(2)$est vraie.

<u>Propagation</u> : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $je\ suppose\ que\ H(n)$: "$cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$" est vraie . Sous cette hypothèse, je vais prouver que $H(n+1)$:

"$cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n\ radicaux\ superposés}$" est vraie.

$$cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = cos\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1\ .$$

$Donc,\ \left(cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés} + 1\right] = \frac{1}{4}\left[\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés} + 2\right]$. Comme $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geq 0$. Par suite,

$$\left(cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left[\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés} + 2\right]} = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés} + 2} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}} + 2}}_{n\ radicaux\ superposés}.$$

Ainsi, $H(n+1)$vraie dès que $H(n)$ vraie.

<u>CCL :</u> le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n): cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dots\dots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$ est vraie.

Ex 29 Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

1) Calculer $S_n(x)\ pour\ x \equiv 0[2\pi]$.
2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.

1) Soit x un réel tel que $x \equiv 0[2\pi]$. Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}, kx \equiv 0[2\pi]\ donc\ \cos(kx) = 1$. par conséquent, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
2) Soit x un réel tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = 2\left(\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{kx}{2}\right) - \sin\left(\frac{kx}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)$.

Donc, $sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} 2\left(\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{kx}{2}\right) - \sin\left(\frac{kx}{2} - \frac{x}{4}\right)\right) = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{kx}{2}\right) - \underbrace{\sin\left(\frac{kx}{2} - \frac{x}{4}\right)}_{u_k}\right)$.

En posant $u_k = \sin\left(\frac{kx}{2} - \frac{x}{4}\right)$, $u_{k+1} = \sin\left(\frac{(k+1)x}{2} - \frac{x}{4}\right) = \sin\left(\frac{kx}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right) = \sin\left(\frac{kx}{2} + \frac{x}{4}\right)$.

Donc, $sin\left(\frac{x}{2}\right)S_n(x) = 2\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 = \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} - \frac{x}{4}\right) - \sin\left(-\frac{x}{4}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2} + \frac{x}{4}\right) + \sin\left(\frac{x}{4}\right)$.

Comme $x \not\equiv 0[2\pi], \frac{x}{2} \not\equiv 0[\pi], donc\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$. J'en déduis et conclus que : $S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{x}{4}\right)+\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Ex 30 Justifier que : l'égalité $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$ est vraie pour tout réel x du domaine D de définition.
En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$ où $n \in \mathbb{N}\ et\ x \in \mathbb{R}\backslash\{p\frac{\pi}{2^k} / p \in \mathbb{Z}\ et\ k \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{cases} \tan(x)\ existe \\ \tan(x) \neq 0 \\ \tan(2x)\ existe \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{k\pi}{4}.$$ Donc , $D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{k\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\}$.

Alors $\forall x \in D, \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)} \underbrace{=}_{\substack{formule \\ d'angle\ double \\ de\ \tan.}} \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\frac{2\tan(x)}{1-tan^2(x)}} = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{1-tan^2(x)}{\tan(x)} = \frac{1}{\tan(x)}\left(1 - \left(1 - tan^2(x)\right)\right) = \tan(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}\ et\ x \in \mathbb{R}\backslash\{p\frac{\pi}{2^j} / p \in \mathbb{Z}\ et\ j \in \mathbb{N}\}$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}\ et\ \forall j \in \mathbb{N}\ 2^k x \neq p\frac{2^k\pi}{2^j} = p2^{k-j}\pi$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}\ 2^k x \neq \frac{p\pi}{4}$ (en prenant $j = k+2$).

Alors, $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\left(\frac{1}{\tan(2^k x)} - \frac{2}{\tan(2 \times 2^k x)}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\underbrace{\frac{2^k}{\tan(2^k x)}}_{u_k} - \underbrace{\frac{2^{k+1}}{\tan(2^{k+1} x)}}_{u_{k+1}}\right) = u_0 - u_{n+1} = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2^{n+1}}{\tan(2^{n+1} x)}$.

Ex 31 Soit a un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Calculer $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a)$.
En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \to +\infty$.

1) $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a) = sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \underbrace{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)cos\left(\frac{a}{2^n}\right)}_{\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{a}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)} cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)cos\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right)\dots.cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos(a)$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)cos\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}_{\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{a}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right)} cos\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right) \dots . cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \sin\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right) cos\left(\frac{a}{2^{n-2}}\right) \dots . cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos(a)$

On itère ce procédé …. à chaque itération, la puissance p de $\left(\frac{1}{2}\right)^{p}$ augmente de 1 et la puissance k dans $\sin\left(\frac{a}{2^{k}}\right)$ diminue de 1. Donc la somme $p + k$ est constante égale à n. Ainsi, à la $n^{\text{ième}}$ itération, on obtient : $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sin\left(\frac{a}{2^0}\right)\cos\left(\frac{a}{2^0}\right)$.

Et enfin, à la dernière itération, $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2a)$.

2) Si $a = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos(0) = \prod_{k=0}^{n} 1 = 1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(a) = 1$.

Si $a \neq 0$ alors $\frac{a}{2^n} \neq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n} = 0$. Alors pour n assez grand, $\frac{a}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ *et par conséquent*, $sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \neq 0$.

Alors pour tout n assez grand, $P_n(a) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sin(2a)}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin(2a)}{2a}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} a}{sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}\right)$.

Or, $\lim\limits_{t\to0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to0} \frac{t}{\sin(t)} = \frac{1}{1} = 1$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n} = 0$. Alors par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = 1$. J'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(a) = \frac{\sin(2a)}{2a}$.

Ex 32 **1.** Exprimer $cos(4x)$ en fonction de $cos(x)$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$ En déduire la valeur de α.