Corrigé des exercices de la fiche

des vacances de Noël

1. Déterminer un équivalent simple

$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-\tan^2(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(x)}}$ **en 0.**

Cherchons un équivalent simple du numérateur $N(x)$ de $f(x)$:

$\lim_{x\to 0} -x=0$ *et* $(1+x)^{\alpha}-1\sim_0 \alpha x$ donc , en prenant $\alpha=\frac{1}{5}$ et en composant à droite notre équivalent, $\sqrt[5]{1-x}-1\sim_0\frac{1}{5}(-x)$. Et par suite $\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}\sim_0\sqrt[3]{-\frac{x}{5}}$.

De plus, $\tan(x)\sim_0 x$ donc $\tan^2(x)\sim_0 x^2$ puis $\tan^2(x)\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}\sim_0 x^2\left(-\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{3}}=-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}x^{2+\frac{1}{3}}=-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}}$. Comme $\frac{7}{3}<4, x^4=o_0\left(x^{\frac{7}{3}}\right)$ et par conséquent, $x^4=o_0\left(\tan^2(x)\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}\right)$. Ainsi, $N(x)\sim_0\left(\tan^2(x)\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}\right)\sim_0-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}}$.

Cherchons un équivalent simple du dénominateur $D(x)$ de $f(x)$:

Comme $\left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est borné et $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty,\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)=o_0(\ln(x))$ et par conséquent, $D(x)\sim_0-\ln(x)$.

Ainsi, $f(x)\sim_0\frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}}.}{-\ln(x)}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{x^{\frac{7}{3}}.}{\ln(x)}$.

$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^4-\mathrm{Arctan}(x)\sqrt[3]{\sqrt[5]{1-x}-1}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(x)}}$ **en $+\infty$.**

Cherchons un équivalent simple du numérateur $N(x)$ de $f(x)$:

Comme $(x\mapsto -1)$ est borné et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{1-x}=-\infty$, $\sqrt[5]{1-x}-1\sim_{+\infty}\sqrt[5]{1-x}$. De même , $1-x\sim_{+\infty}-x$ et par conséquent, $\sqrt[5]{1-x}-1\sim_{+\infty}\sqrt[5]{1-x}\sim_{+\infty}(-x)^{\frac{1}{5}}$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty} Arctan(x)=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ donc $Arctan(x)\sim_{+\infty}\frac{\pi}{2}$. Alors $Arctan(x)[\sqrt[5]{1-x}-1]\sim_{+\infty}\frac{\pi}{2}(-x)^{\frac{1}{5}}$. Alors, comme $x^{\frac{1}{5}}=o_{+\infty}(x^4)$, $N(x)\sim_{+\infty}x^4$.

Cherchons un équivalent simple du dénominateur $D(x)$ de $f(x)$:

Comme $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0,\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)=o_{+\infty}(\ln(x))$. Par conséquent, $D(x)\sim_{+\infty}-\ln(x)$.

Ainsi, $f(x)\sim_{+\infty}\frac{-x^4}{\ln(x)}$.

$f(x)=2^{2^x}-2$ en 0

$f(x)=2^{2^x}-2=e^{\ln(2)e^{\ln(2)x}}-2$. Donc, f dérivable en 0 et $f'(0)=\ln(2)^2\neq 0$. Alors le cours assure que $f(x)-\underbrace{f(0)}_{=0}\sim_0\ln(2)^2(x-0)$. Ainsi, $f(x)\sim_0\ln(2)^2 x$.

$f(x)=\ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$

Posons $t=x-\frac{\pi}{2}$ et $g(t)=f(x)$.

Alors, $g(t)=f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\ln\left(sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)=\ln(\cos(t))$.

$\lim_{t\to 0}\cos(t)=1$ *et* $\ln(u)\sim_{u\to 1}u-1$. Donc, $\ln(\cos(t))\sim_{t\to 0}\cos(t)-1$. De plus, $\cos(t)-1\sim_0-\frac{t^2}{2}$. Donc, $g(t)\sim_0-\frac{t^2}{2}$.

Ainsi, $f(x)\sim_{\frac{\pi}{2}}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$.

$f(x)=\sqrt[p]{1+px}-\sqrt[q]{1+qx}+\left(\frac{p-q}{2}\right)x^2$ en 0. (où p et q sont deux entiers naturels non nuls)

$\boldsymbol{1er\ cas}$ **:** $\boldsymbol{p=q}$. Alors $f(x)=0\sim_0 0$

2$\boldsymbol{\grave{e}me\ cas}$ **:** $\boldsymbol{p\neq q}$.

$\lim_{x\to 0}px=0$ et $(1+t)^{\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}t+\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)t^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)t^3}{6}+o_0(t^3)$. Donc, $(1+px)^{\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}(px)+\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)(px)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)(px)^3}{6}+o_0(x^3)$. Ainsi, , $(1+px)^{\frac{1}{p}}=1+x+\frac{1-p}{2}x^2+\frac{(1-p)(1-2p)}{6}x^3+o_0(x^3)$. De même, $(1+qx)^{\frac{1}{q}}=1+x+\frac{1-q}{2}x^2+\frac{(1-q)(1-2q)}{6}x^3+o_0(x^3)$.

Alors, $f(x)=\left[\frac{(1-p)(1-2p)}{6}-\frac{(1-q)(1-2q)}{6}\right]x^3+o_0(x^3)=\frac{[2p^2-2q^2-3p+3q]x^3}{6}+o_0(x^3)=\frac{[2(p-q)(p+q)-3(p-q)]x^3}{6}+o_0(x^3)=(p-q)\frac{[2(p+q)-3]x^3}{6}+o_0(x^3)$.

Comme p et q sont supérieurs à 1, $2(p+q)-3\neq 0$ et comme $p\neq q$, $[p-q][2(p+q)-3]\neq 0$ et ainsi, $f(x)\sim_0\frac{[p-q][2(p+q)-3]x^3}{6}$.

2. Calculer des limites

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2x}+\frac{1}{\ln(sin(x))}\right)$?

$cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\sin(t)\ et\ sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos(t)$

Posons $t=x-\frac{\pi}{2}$ et $g(t)=f(x)$. Alors,

$$g(t)=f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\frac{2}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}+\frac{1}{\ln\left(sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)}=\frac{2}{sin^2(t)}+\frac{1}{\ln(cos(t))}=\frac{2}{\left(t-\frac{t^3}{6}+o_0(t^3)\right)^2}+\frac{1}{\ln\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o_0(t^4)\right)}=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)\right)^2}+\frac{1}{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^4}{8}o_0(t^4)}$$

$$=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}+\frac{1}{-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^4}{8}+o_0(t^4)}=\frac{2}{t^2\left(1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}+\frac{1}{\frac{t^2}{2}\left[-1-\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)\right]}=\frac{2}{t^2}\left[\frac{1}{1-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)}-\frac{1}{1+\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)}\right]=\frac{2}{t^2}\left[1+\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)-\left(1-\frac{t^2}{6}+\right.\right.$$

$$\left.\left.o_0(t^2)\right)\right]=\frac{2}{t^2}\left[\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right]\sim_0 1.$$ Donc $\lim_{t\to0} g(t)=1$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2 x}+\frac{1}{\ln(si\ldots}\right.$

$$\frac{1}{1+u}=1-u+o_0(u)\ et\ \lim_{t\to0}-\frac{t^2}{3}+o_0(t^2)=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{6}+o_0(t^2)$$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$

$Posons\ t=x-\frac{1}{2}$ et $g(t)=f(x)$. Alors,

$$g(t)=f\left(\frac{1}{2}+t\right)=\left(2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-3\left(t+\frac{1}{2}\right)+1\right)\tan\left(\pi\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)=(2t^2-t)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\pi t\right)=(2t^2-t)\left(-\frac{1}{\tan(\pi t)}\right)\sim_0(-t)\times\frac{1}{-\pi t}=\frac{1}{\pi}.$$

Donc $\lim_{t\to0} g(t)=\frac{1}{\pi}$ et $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\frac{1}{\pi}$.

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0\ et\ \lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$$
$$\text{donc}\ \ e^{-x}=o_{+\infty}(e^{x}).$$

$$2t^2=o_0(t)\ \text{donc}\ 2t^2-t\sim_0-t.$$
$$\tan(u)\sim_{u\to0}u\ et\ \lim_{t\to0}\pi t=0\ \text{donc}\ \tan(\pi t)\sim_0\pi t.$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{ch(x)}$

$f(x)=e^{ch(x)ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$. Posons $H(x)=ch(x)ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$.

$ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{2x}$. Donc, $H(x)\sim_{+\infty}\frac{ch(x)}{2x}=\frac{1}{4x}(e^x+e^{-x})\sim_{+\infty}\frac{e^x}{4x}$. Or, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{CC}{=}+\infty$. Donc, $\lim_{x\to+\infty}H(x)=+\infty$. Et ainsi, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\ln(1+u)\sim_0 u\ \ et\ \ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0\ \text{donc}\ ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{2x}$$

$\lim_{x\to0}\sin(x)^{Arctan(x)}$

$f(x)=e^{Arctan(x)ln(\sin(x))}$. Posons $H(x)=Arctan(x)ln(\sin(x))$.

$Arctan(x)\sim_0 x$. Donc, $H(x)\sim_0 xln(\sin(x))$. Or, $xln(\sin(x))=xln(x+o_0(x))=x[ln(x)+\ln(1+o_0(1))]\sim_0 xln(x)$.

Or, $\lim_{x\to0}xln(x)\underset{CC}{=}0$.Donc, $\lim_{x\to0}H(x)=0$ et ainsi, $\lim_{x\to0}f(x)=1$.

3. Déterminer un développement limité en a d'ordre au plus 5

$f(x)=\sqrt[3]{9-2\sin(x)}\ et\ a=\frac{\pi}{6}$

Posons $t=x-\frac{\pi}{6}\ et\ g(t)=f(x)$.

$$g(t)=f\left(\frac{\pi}{6}+t\right)=\sqrt[3]{9-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+t\right)}=\sqrt[3]{9-2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(t)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(t)\right]}$$

$$=\sqrt[3]{9-2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o_0(t^5)\right)+\frac{\sqrt3}{2}\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}+o_0(t^5)\right)\right]}$$

$$=\sqrt[3]{9-1-\sqrt3 t+\frac{t^2}{2}+\frac{\sqrt3}{6}t^3-\frac{t^4}{24}-\frac{\sqrt3 t^5}{120}+o_0(t^5))}$$

$$=\sqrt[3]{8-\sqrt3 t+\frac{t^2}{2}+\frac{\sqrt3}{6}t^3-\frac{t^4}{24}-\frac{\sqrt3 t^5}{120}+o_0(t^5))}$$

$$=\sqrt[3]{8[1-\frac{\sqrt3}{8}t+\frac{1}{16}t^2+\frac{\sqrt3}{6\times8}t^3-\frac{t^4}{24\times8}-\frac{\sqrt3 t^5}{120\times8}+o_0(t^5))]}$$

$$=2\sqrt[3]{1+\underbrace{(-\frac{\sqrt3}{8}t+\frac{1}{16}t^2+\frac{\sqrt3}{6\times8}t^3-\frac{t^4}{24\times8}-\frac{\sqrt3 t^5}{120\times8}+o_0(t^5))}_{=u(t)}}$$

Comme $\lim_{t\to0}u(t)=0$ et $(1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{3^2}u^2+\frac{5}{3^4}u^3-\frac{10}{3^5}u^4+\frac{26}{3^6}u^5+o_0(u^5)$,

$(1+u(t))^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u(t)-\frac{1}{3^2}u(t)^2+\frac{5}{3^4}u(t)^3-\frac{10}{3^5}u(t)^4+\frac{26}{3^6}u(t)^5+o_0(t^5)$ avec

$$u(t)=\frac{1}{8}\left(-\sqrt3 t+\frac{1}{2}t^2+\frac{\sqrt3}{6}t^3-\frac{t^4}{24}-\frac{\sqrt3 t^5}{120}+o_0(t^5)\right)$$

$$u(t)^2=\frac{1}{64}\left[3t^2-\sqrt3 t^3+\frac{3}{4}t^4+\left(\frac{\sqrt3}{4}\right)t^5+o_0(t^5)\right]$$

$$u(t)^3=u(t)^2\times u(t)=\frac{1}{8^3}\left[-3\sqrt3 t^3+\frac{9}{2}t^4-\frac{3\sqrt3}{4}t^5+o_0(t^5)\right]$$

$$u(t)^4=(u(t)^2)^2=\frac{1}{8^4}\left[9t^4-6\sqrt3 t^5+o_0(t^5)\right]$$

$$u(t)^5=u(t)^3\times u(t)^2=\left(-\frac{9\sqrt3}{8^5}\right)t^5+o_0(t^5)$$

Ainsi,

$$g(t) = 2 + \frac{2}{3}\frac{1}{8}[-\sqrt{3}t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}t^3 - \frac{t^4}{24} - \frac{\sqrt{3}t^5}{120} + o_0(t^5)] - \frac{2}{3^2}\frac{1}{8^2}\left[3t^2 - \sqrt{3}t^3 + \frac{3}{4}t^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)t^5 + o_0(t^5)\right]$$
$$+ \frac{5}{3^4}\frac{2}{8^3}\left[-3\sqrt{3}t^3 + \frac{9}{2}t^4 - \frac{3\sqrt{3}}{4}t^5 + o_0(t^5)\right] - \frac{10}{3^5}\frac{2}{8^4}[9t^4 - 6\sqrt{3}t^5 + o_0(t^5)] + \frac{2\times 26}{3^6}\left[\left(-\frac{9\sqrt{3}}{8^5}\right)t^5 + o_0(t^5)\right] + o_0(t^5)]$$

Et

$$f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{3\times 8} - \frac{1}{3\times 4\times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6\times 4\times 3} + \frac{\sqrt{3}}{4\times 8\times 3^2} - \frac{5}{3^3}\frac{\sqrt{3}}{8^2\times 4}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$
$$+ \left(-\frac{1}{3\times 6\times 4^2} - \frac{1}{3\times 8^2\times 2} - \frac{5}{3^2\times 8^3}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$$
$$+ \left(-\frac{\sqrt{3}}{120\times 4\times 3} - \frac{\sqrt{3}}{8^2\times 3^2\times 2} - \frac{5}{3^3}\frac{\sqrt{3}}{8^3\times 2} + \frac{5}{3^4}\frac{\sqrt{3}}{8^3}6\frac{13}{3^4}\frac{\sqrt{3}}{2\times 8^4}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5\right)$$

$$f(x) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{4\times 8}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8^2\times 4\times 3^3}(115)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{-1}{3^2\times 8^3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{5449\sqrt{3}}{2\times 8^4\times 3^4\times 5}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5$$
$$+ o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5\right)$$

$f(x) = \frac{Arctan(x)}{\ln(\cos(x))}, a = 0$ IMPOSSIBLE car $Arctan(x) \sim_0 x$ et $\ln(\cos(x)) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$ donc $f(x) \sim_0 \frac{1}{2x}$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ donc f n'a pas de limite finie en 0 et par suite, f ne peut pas avoir de $DL(0)$

$f(x) = Arccos(x)^{\mathrm{Arcsin}(x)} a = \mathbf{0}$ **Ordre 3**

$f(x) = e^{\mathrm{Arcsin}(x)\ln(Arccos(x))}$. Posons $h(x) = \mathrm{Arcsin}(x)\ln(Arccos(x))$.

$\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $\mathrm{Arccos(x)} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin(x)} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)$.

$$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\right) = \ln\left\{\frac{\pi}{2}\left[1 - \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}_{=u(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0}\right]\right\} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \ln(1 - u(x)).$$

$$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - u(x) - \frac{u(x)^2}{2} - \frac{u(x)^3}{3} + o_0(x^3) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{6}\right) - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{8}{3\pi^3}x^3 + o_0(x^3)$$
$$\ln(Arccos(x)) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3).$$

Alors, $h(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi^2}x^2 - \left(\frac{8}{3\pi^3} + \frac{1}{3\pi}\right)x^3 + o_0(x^3)\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + o_0(x^3)}_{=v(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0}$.

Donc, $f(x) = e^{v(x)} = 1 + v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \frac{v(x)^3}{6} + o_0(x^3) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x - \frac{2}{\pi}x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2}\right)x^3 + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)x^3 + o_0(x^3)$

$$f(x) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi}\right)x^2 + \left(\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)x^3 + o_0(x^3)$$

$f(x) = Arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right), a = \frac{\pi}{3}$

Pour x au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{tan(x)}{2}$ est au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ donc au voisinage de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Et par conséquent, f est dérivable au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 + tan^2(x))}{\sqrt{1 - \frac{tan^2(x)}{4}}} \underbrace{=}_{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^4)} \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right)\left(1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{6}x^4 + o_0(x^4)\right)}_{=u(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right)\left(1 - \frac{1}{2}u(x) + \frac{3}{8}u(x)^2 + o_0(x^4)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{8} + \frac{1}{12}x^4\right) + \frac{3}{8}\times\frac{1}{16}x^4 + o_0(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{8}x^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8}\frac{1}{16}\right)x^4 + o_0(x^4)\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{16}x^2 + \frac{185}{768}x^4 + o_0(x^4).$$

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=Arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{16}\frac{x^3}{3} + \frac{185}{768}\frac{x^5}{5} + o_0(x^5)$

Ainsi, $f(x) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{48}x^3 + \frac{37}{768}x^5 + o_0(x^5)$.

4. Utiliser les DL pour justifier qu'une fonction est dérivable en un point et obtenir la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point

$f : (x \mapsto (1 - 2\sin(x))\tan(3x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ et que son prolongement est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente.

Posons $g(t) = f\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Alors $g(t) = \left(1 - 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right)\tan\left(3\left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(1 - 2(\sin(t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\cos(t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\tan\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$

$= (1 - \sqrt{3}\sin(t) - \cos(t))\frac{(-1)}{\tan(3t)} = \left(1 - \sqrt{3}\left(t - \frac{t^3}{6}\right) - 1 + \frac{t^2}{2} + o_0(t^3)\right)\frac{(-1)}{3t + \frac{(3t)^3}{3} + o_0(t^4)} = -\left(t(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3)\right)\frac{1}{3t\left(1 + \frac{(3t)^2}{3} + o_0(t^3)\right)}$

$$= -\frac{1}{3}\left((-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3)\right)\frac{1}{\left(1 + \frac{(3t)^2}{3} + o_0(t^2)\right)} = -\frac{1}{3}\left(-\sqrt{3} + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{6}t^2 + o_0(t^3)\right)(1 - 3t^2 + o_0(t^3))$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}t - \frac{19}{18}\sqrt{3}t^2 + o_0(t^2)$$

Donc, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right)$.

J'en déduis que $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $i.e.\ f$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{6}$ par la valeur $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Théorème 68

De plus, son prolongement $\tilde{f}$, qui est défini en $\frac{\pi}{6}$, admet le $DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ suivant $\tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^1\right)$. Donc, $\tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et $\tilde{f}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{6}$ $et\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ est l'équation de la tangente à $\widetilde{Cf}$ en $\frac{\pi}{6}$. De plus, son prolongement $\tilde{f}$ admet le $DL_1\left(\frac{\pi}{6}\right)$ suivant $\tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{6}}\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right)$. Donc, $\tilde{f}(x) - [\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)] \sim_{\frac{\pi}{6}} -\frac{19}{18}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$. Donc au voisinage de , $\tilde{f}(x) - [\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$. J'en déduis que $\widetilde{Cf}$ est sous sa tangente en $\frac{\pi}{6}$.

5. Utiliser les DL pour justifier l'existence d'une asymptote et obtenir son équation et la position de la courbe par rapport à cette asymptote

$f(x) = (x + 1)Arctan\left(\frac{2+x}{x}\right)$

Posons $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

Alors, $tg(t) = t\left(\frac{1}{t} + 1\right)Arctan\left(\frac{2+\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right) = (1 + t)Arctan(2t + 1)$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

Soit $\varphi(t) = Arctan(2t + 1)$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = \frac{2}{1+(2t+1)^2} = \frac{2}{2+4t+4t^2} = \frac{1}{1+(2t+2t^2)} = 1 - (2t + 2t^2) + 4t^2 + o_0(t^2) = 1 - 2t + 2t^2 + o_0(t^2)$.

Donc le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que $\varphi(t) = \varphi(0) + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3) = \frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3)$

Donc, $tg(t) = (1 + t)\left(\frac{\pi}{4} + t - t^2 + \frac{2}{3}t^3 + o_0(t^3)\right) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)t + \left(-\frac{1}{3}\right)t^3 + o_0(t^3)$.

Donc $\frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$. Et finalement, $f(x) = \frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$.

Et par conséquent, $f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] \sim_{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^2 < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] = 0$ et $f(x) - \left[\frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\right] < 0$ au voisinage de $+\infty$.

J'en conclus que la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}x + \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est sous cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$f(x) = \frac{1-x+4x^2}{2x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$

Posons $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

Alors, $tg(t) = t\frac{1-\frac{1}{t}+4\frac{1}{t^2}}{2\frac{1}{t}-3}e^{\frac{1}{\frac{1}{t}-3}} = \frac{t^2-t+4}{2-3t}e^{\frac{t}{1-3t}}$. Cherchons un $DL(0)$ (ordre 2 ou 3 : il faut un terme significatif après l'ordre 1) de $tg(t)$:

$tg(t) = (4 - t + t^2)\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}t\right)}e^{t(1+3t+o_0(t))} = \frac{1}{2}(4 - t + t^2)(1 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}t^2 + o_0(t^2))\,e^{t+3t^2+o_0(t^2)}$

$= \frac{1}{2}(4 + 5t + \frac{17}{2}t^2 + o_0(t^2))(1 + (t + 3t^2) + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2))$

$= \frac{1}{2}(4 + 5t + \frac{17}{2}t^2 + o_0(t^2))(1 + t + \frac{7t^2}{2} + o_0(t^2))$

$= \frac{1}{2}(4 + 9t + \frac{55}{2}t^2 + o_0(t^2)) = 2 + \frac{9}{2}t + \frac{55}{4}t^2 + o_0(t^2))$.

$Donc, \frac{1}{x}f(x) = 2 + \frac{9}{2x} + \frac{55}{4x^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2}))$. Et finalement, $f(x) = 2x + \frac{9}{2} + \frac{55}{4x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$.

Et par conséquent, $f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] \sim_{+\infty} \frac{55}{4x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{55}{4x} = 0$ et pour $x > 0, \frac{55}{4x} > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] = 0$ et $f(x) - \left[2x + \frac{9}{2}\right] > 0$ au voisinage de $+\infty$. J'en conclus que la droite d'équation $y = 2x + \frac{9}{2}$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

6. Déterminer le DL d'une bijection réciproque

$DL_5(0)$ $5\ de\ \varphi^{-1}$ où $\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, \varphi'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$. Donc φ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors le TBCSM assure que φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty}\varphi, \lim\limits_{+\infty}\varphi[= \mathbb{R}$. Comme $\forall x, \varphi'(x) \neq 0\ et\ \varphi$ est de classe C^∞, φ^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Alors le théorème de Taylor-Young assure que φ^{-1} admet un $DL(0)$ a tout ordre. Déterminons alors les réels $a, b, c, d, e\ et\ f$ tels que :

$\varphi^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + o_0(x^5)$. Comme φ est impaire, φ^{-1} est impaoire et par conséquent, $a = c = e = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ et $\varphi(x) = x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o_0(x^4)) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o_0(x^5)$, $\varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right) = b\varphi(x) + d\varphi(x)^3 + f\varphi(x)^5 + o_0(x^5)$

$avec\ \varphi(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o_0(x^5)$,

$(\varphi(x))^2 = x^2 + 2x^4 + o_0(x^5)$,

$(\varphi(x))^3 = \varphi(x)\left(\varphi(x)\right)^2 = x^3 + 3x^5 + o_0(x^5)$,

$(\varphi(x))^5 = (\varphi(x))^3\left(\varphi(x)\right)^2 = x^5 + o_0(x^5)$.

Donc, $x = b(x + x^3 + \frac{x^5}{2}) + d(x^3 + 3x^5) + fx^5 + o_0(x^5) = bx + (b + d)x^3 + (\frac{b}{2} + 3d + f)x^5 + o_0(x^5)$.

Alors par unicité de la partie principale du DL en 0 de x, $b = 1, d + b = 0$ et $\frac{b}{2} + 3d + f = 0$. Donc $b = 1, d = -1$ et $f = \frac{5}{2}$.

Ainsi, le $DL_5(0)$ de $\varphi^{-1}\ est :$ $\varphi^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o_0(x^5)$.

.

7. Déterminer le DL d'une fonction dont l'expression est sous forme intégrale

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 10. Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

φ est de classe C^∞ et, en particulier, continue sur $\mathbb{R}$. Donc φ admet une primitive H sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x$,

$f(x) = H(x^2) - H(x)$. Cette expression de f permet alors d'affirmer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, f'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

Par conséquent, $f'(x) = 2x(1 + x^8)^{-\frac{1}{2}} - (1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} = 2x\left(1 - \frac{1}{2}x^8 + o_0(x^8)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o_0(x^9)\right)$

$f'(x) = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o_0(x^9)$.

Alors le théorème d'intégration terme à terme des DL assure que :$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} - x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o_0(x^{10})$.