Savoir-faire sur les équivalents et DL !!

Connaitre par ❤

- **Equivalents usuels**
- **Règles de calcul autorisées sur les équivalents et les interdites**
- **les DL usuels**
- **la formule de Taylor Young avec les hypothèses**
- **le théorème d'intégration terme à terme d'un DL avec les hypothèses .**

METHODE GENERALE pour trouver un équivalent d'une fonction f au voisinage de a

1) je peux écrire $f(x)$ sous la forme $g(x) \times une\ fonction\ de\ limite\ 1\ en\ a$.

2)Je peux trouver une fonction g telle que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

3)si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tel que <u>L réel non nul</u> alors $f(x) \sim_a L$.

4) Si $f = g \times h$ alors je cherche un équivalent de g et un équivalent de h au voisinage de a et j'en fais le quotient (ou un produit).

5) Si $f(x) = g(x)^\alpha$ avec <u>α indépendant de x</u> alors je cherche un équivalent de g que j'élève à la puissance α .

6) Si $f = g + h$, alors je cherche un équivalent simple de chacune des fonctions $g\ et\ h$ au voisinage de a et grâce à ces équivalents , je compare g et h au voisinage de a .

a) si $h = o_a(g)$ alors $f \sim_a g$.
b) si $\lim_{x\to a} g(x) + h(x) = L$ tel que <u>L réel non nul</u> alors $f(x) \sim_a L$.
c) sinon , je vais chercher des développements limités ou asymptotiques de g et de h au voisinage de a que je peux additionner contrairement aux équivalents (puisqu'un DL est une égalité) !!!L'ordre sera choisi de sorte qu'en les sommant , il reste un terme significatif.

7) Si $f(x) = \ln(g(x))$ alors après avoir écarté la situation 3),

Ou bien $\lim_{x\to a} g(x) = 1$. Alors j'utilise la propriété de composition à droite . Si $\lim_{x\to a} g(x) = 1$ alors $ln(g(x)) \sim_a g(x) - 1$.

Ou bien $\lim_{x\to a} g(x)$ n' existe pas ou n'est pas égale à 1. Alors je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets, dans ce DA, le terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $ln(ab) = lna + lnb$ puis je compare $ln(a)$ et $ln(b)$ ou je cherche un DA de $ln(b)$

8) Si $f(x) = e^{g(x)}$ alors après avoir écarté la situation 1) , je cherche un DA ou un DL de g au voisinage de a et je mets le terme dominant en facteur puis j'utilise la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$.

9)Si $f(x) = u(x)^{v(x)}$ alors j'écris $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$, alors après avoir écarté la situation 1) , je vais chercher un DL ou DA $ou\ la\ limite\ de$ de $h(x) = u(x)\ln(v(x))$ en a puis conclure ou utiliser la propriété de l'exponentielle $e^{a+b} = e^a e^b$; il faut parfois obtenir la limite de f pour en avoir un équivalent.

Exemples du cours

Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o_0(x^k)$

Par la caractérisation par le quotient

$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^k}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \pm\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$. Or, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{k}{2}}}{e^t} = 0$. Par composition, $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$ et par suite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$. J'en déduis par la Caractérisation 23 que $e^{-\frac{1}{x^2}} = o_0(x^k)$.

Montrer que $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt = o_{+\infty}(x^2)$.

Par encadrement + caractérisation par le quotient

Soit $x > 1$. Alors $f: \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ est continue sur $[x, x^2]$ et $\forall t \in [x, x^2], 0 < \ln(x) \le \ln(t) \le \ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc,

$0 < \frac{1}{2\ln(x)} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{1}{\ln(x)}$. Alors, par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions f et $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right), \left(t \mapsto \frac{1}{2\ln(x)}\right)$ continues sur $[x, x^2]$, $0 < \int_x^{x^2}\frac{1}{2\ln(x)}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt$. Ainsi, $\forall x > 1$, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \le \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt \le \frac{x^2-x}{\ln(x)}$.

Par conséquent, $\forall x > 1$, $\frac{x^2-x}{2x^2\ln(x)} \le \frac{1}{x^2}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt \le \frac{x^2-x}{x^2\ln(x)}$ (puisque $x^2 > 0$) , autrement dit, $\frac{1-\frac{1}{x}}{2\ln(x)} \le \frac{1}{x^2}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt \le \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2\ln(x)} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, je peux conclure que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt = 0$ ce qui prouve que $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt = o_{+\infty}(x^2)$ (Caract. 23) .

Soit $f: \left(x \mapsto \frac{Arccos(x)sin^2(x)}{\sqrt[3]{ch(x)-1}}\right)$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.

Par les opérations sur les équivalents

Posons $N(x) = Arccos(x)sin^2(x)$ et $D(x) = \sqrt[3]{ch(x) - 1}$. Cherchons un simple équivalent en 0 de ces deux fonctions .

$\lim\limits_{x\to 0} Arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ limite finie et non nulle. Donc, d'après le Théo 27.3 , $Arccos(x) \sim_0 \frac{\pi}{2}$.

De plus, $sin(x) \sim_0 x$; donc, d'après le Théo 36.6, $sin^2(x) \sim_0 x^2$. Et par suite, d'après le Théo. 36.4, $Arccos(x)sin^2(x) \sim_0 \frac{\pi}{2}x^2$. Ainsi, $N(x) \sim_0 \frac{\pi}{2}x$.

De même, $ch(x) - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$; donc, d'après le Théo 36.6, $(ch(x)-1)^{\frac{1}{3}} \sim_0 \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$. $Aisni, D(x) \sim_0 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$.

Alors, il suffit d'appliquer le Théo 36.5, pour conclure que $\frac{N(x)}{D(x)} \sim_0 \frac{\frac{\pi}{2}x^2}{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2}x^{2-\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{x^4}$.

Soit f: $(x \mapsto \sqrt{x^3+1} - \sqrt[3]{x^2-1} + \sin(x))$.Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.

- $x^3+1 \sim_{+\infty} x^3$ donc, par le Théo. 36.6 , $\sqrt{x^3+1} = (x^3+1)^{\frac{1}{2}} \sim_{+\infty} x^{\frac{3}{2}}$. De même $\sqrt[3]{x^2-1} \sim_{+\infty} x^{\frac{2}{3}}$.

Or, $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ donc (Prop 29) $x^{\frac{2}{3}} = o_{+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$. Et par suite, (Théo 34.6) $\sqrt[3]{x^2-1} = o_{+\infty}(\sqrt{x^3+1})$.

- Enfin, sin est bornée et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+1} = +\infty$. Par conséquent, (Théo 34.8), $\sin(x) = o_{+\infty}(\sqrt{x^3+1})$.

J'en déduis que :

$$f(x) = \sqrt{x^3+1} + o_{+\infty}(\sqrt{x^3+1}) + o_{+\infty}(\sqrt{x^3+1}) \underbrace{=}_{\text{théo 35.1}} \sqrt{x^3+1} + o_{+\infty}(\sqrt{x^3+1}) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\text{Théo 35.3}} \sqrt{x^3+1} \sim_{+\infty} x^{\frac{3}{2}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} = +\infty$, je peux conclure grâce au Théo 27.2 que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour obtenir un équivalent simple de $f+g$ en a

1. je regarde si l'une des deux fonctions f ou g est négligeable devant l'autre au voisinage de a.
   Si $f = o_a(g)$ alors $f + g \sim_a g$.
2. Je remplace $f(x)$ et $g(x)$ par leur développement limité ou asymptotique en a avec au moins deux termes non nuls... si ces deux termes se simplifient, je vais jusqu'au

Soit f: $\left(x \mapsto \frac{\sqrt{x} - 2^{\frac{x}{2}} + Arctan(x^2)}{3ch(x) - \ln(x)}\right)$.Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.

Posons $N(x) = \sqrt{x} - 2^{\frac{x}{2}} + Arctan(x^2)$ et $D(x) = 3ch(x) - \ln(x)$. Cherchons un simple équivalent en 0 de ces deux fonctions

- D'une part , les croissances comparées assurent que : $\sqrt{x} = o_{+\infty}\left(e^{\frac{\ln(2)}{2}x}\right)$ avec $e^{\frac{\ln(2)}{2}x} = 2^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2}^x$.

D'autre part, $(x \mapsto Arctan(x^2))$ est bornée tandis que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(2)}{2}x} = +\infty$. Donc, d'après le Théo. 34.8 de comparaison, $Arctan(x^2) = o_{+\infty}\left(e^{\frac{\ln(2)}{2}x}\right)$. Par conséquent, $N(x) = -2^{\frac{x}{2}} + o_{+\infty}\left(2^{\frac{x}{2}}\right) + o_{+\infty}\left(2^{\frac{x}{2}}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{Théo.}\\ 35.1}} -2^{\frac{x}{2}} + o_{+\infty}\left(2^{\frac{x}{2}}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{Théo.}\\ 35.1}} -2^{\frac{x}{2}} + o_{+\infty}\left(-2^{\frac{x}{2}}\right) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{\text{Théo.}\\ 35.3\\ \text{ou } 26.2}} -2^{\frac{x}{2}}$.

- $$3ch(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x} \underbrace{=}_{\substack{car\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2}e^x = +\infty \\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}e^{-x} = 0 \\ \text{Théo 34.9}}} \frac{3}{2}e^x + o_{+\infty}\left(\frac{3}{2}e^x\right) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{\text{Théo.}\\ 35.3\\ \text{de cractérsition d'un équivalent}}} \frac{3}{2}e^x.$$

Or, par croissance comparée, $\ln(x) = o_{+\infty}(e^x)$; donc, par le Théo 35.1, $\ln(x) = o_{+\infty}\left(\frac{3}{2}e^x\right)$. Et par conséquent (Théo 34.3 en remplaçant O_a par $\sim_a$) , $\ln(x) = o_{+\infty}(3ch(x))$. Par suite (Théo 35.3), $D(x) \sim_{+\infty} 3ch(x)$. Alors le Théo 36.4 assure que $D(x) \sim_{+\infty} \frac{3}{2}e^x$.

- J'en conclus que $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \sim_{+\infty} \frac{-2^{\frac{x}{2}}}{\frac{3}{2}e^x} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^x$. Comme $0 < \frac{\sqrt{2}}{e} < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^x = 0$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{e}\right)^x = 0$. Le Théo27.2 assure alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit f: $(x \mapsto \ln(\cos(x)))$ .Cherchons un équivalent de f au voisinage de 0.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ et $\ln(t) \sim_{t\to 1} (t-1)$, le Théo 36.7 (composition A DROITE) permet d'affirmer que $\ln(\cos(x)) \sim_{x\to 0} \cos(x) - 1$.

De plus, $\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}$. Alors le théo 36.1 assure que $\ln(\cos(x)) \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}$.

Soit h: $(x \mapsto \ln(2x - \sqrt{x} + Arctan(x)))$.Cherchons un équivalent de f en $+\infty$.

$$\sqrt{x} \underbrace{=}_{\substack{car \frac{1}{2}<1\\ \text{prop 29}}} o_{+\infty}(x) \underbrace{=}_{\text{Théo 35.1}} o_{+\infty}(2x) \ \ et\ Arctan(x) \underbrace{=}_{\substack{\text{Théo 34.8}\\ \text{Arctan bornée}\\ et\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty.}} o_{+\infty}(2x).$$

Donc, $2x - \sqrt{x} + Arctan(x) \underbrace{=}_{\text{Théo 35.1}} 2x + o_{+\infty}(2x) \underbrace{=}_{\text{Théo 26.1}} 2x + 2xo_{+\infty}(1) = 2x(1 + o_{+\infty}(1))$

Alors $h(x) = \ln\left(2x(1 + o_{+\infty}(1))\right) = \ln(x) + \ln(2) + \ln(1 + o_{+\infty}(1))$.

Pour obtenir un équivalent simple de $ln(u(x))$ au voisinage de a

1. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ alors $ln(u(x)) \sim_a u(x) - 1$.
2. Sinon, je remplace $u(x)$ par son développement limité ou asymptotique en a à un terme significatif
3. Ensuite je réinjecte dans le logarithme et j'utilise les propriétés de ce log.

ATTENTION :

$Or\ \ln(2)+\ln(1+o_{+\infty}(1)) \underbrace{=}_{\substack{car\\ Théo\ 34.8\\ \lim_{x\to+\infty}\ln(2)+\ln(1+o_{+\infty}(1))=\ln(2).\\ donc\ (x\mapsto\ln(2)+\ln(1+o_{+\infty}(1)))\ est\\ bornée\ au\ voisinage\ de+\infty\\ et\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty.}} o_{+\infty}(\ln(x))$. Ainsi, $h(x)=\ln(x)+o_{+\infty}(\ln(x)) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{Théo\ 35.3} \ln(x)$.

Soit $f: (x\mapsto e^{x^2-1-\frac{1}{x}+\ln(x)})$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en $+\infty$.

$e^{x^2-1-\frac{1}{x}+\ln(x)} = e^{x^2-1+\ln(x)}e^{-\frac{1}{x}} = e^{x^2-1+\ln(x)}\ \varphi(x)$ avec $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Donc, par définition de fonctions équivalentes, $e^{x^2-1-\frac{1}{x}+\ln(x)} \sim_{+\infty} e^{x^2-1+\ln(x)}$.

Soit $f: (x\mapsto (1-\tan(x))^{\frac{1}{x}}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.

$f(x)=e^{\frac{1}{x}ln(1-tan(x))}$. Posons $h(x)=\frac{1}{x}\ln(1-\tan(x))$.

$\lim_{x\to0} -tan(x)=0$ et $\ln(1+t)\sim_{t\to0}t$. Donc, par le Théo 36.7 de composition à droite, $\ln(1-\tan(x))\sim_{x\to0}-\tan(x)$.

Comme $\tan(x)\sim_{x\to0}x$, $-\tan(x)\sim_{x\to0}-x$ (Théo 36.4 de produits d'équivalents) . Donc, $\ln(1-\tan(x))\sim_{x\to0}-x$. Par suite, le Théo 36.5 d'équivalent d'un équivalent , $h(x)\sim_{x\to0}-1$.

Par conséquent, $\lim_{x\to0}h(x)=-1$ et par suite, $\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{e}$.

Comme $\frac{1}{e}\neq0$, le Théo 27.3 (une limite finie non nulle donne un équivalent) assure que $f(x)\sim_{x\to0}\frac{1}{e}$.

Pour obtenir un équivalent simple de $f(x)^{g(x)}$ au voisinage de a

1. J'écris $f(x)^{g(x)}$ sous forme exponentielle $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)ln(f(x))}$.
2. Je cherche un équivalent simple de $g(x)$et un autre de $ln(f(x))$ et j'en fais leur produit.
3. Je transforme cet équivalent par une égalité $u\sim_a v \Longrightarrow u=v+o_a(v)$.
4. Ensuite je réinjecte dans l'exponentielle et j'utilise les propriétés de l'exponentielle ou je calcule la limite . ATTENTION :

$u(x)\sim_a v(x) \nRightarrow u(x)^{\alpha(x)}\sim_a v(x)^{\alpha(x)}$

$u(x)\sim_a v(x) \nRightarrow e^{u(x)}\sim_a e^{v(x)}$

Soit $f: x\mapsto (sh(x))^{\sin(x)}$. Cherchons un équivalent puis la limite de f en 0.

$f(x)=e^{\sin(x)ln(sh(x))}$. Posons $h(x)=\sin(x)\ ln(sh(x))$.

$e^x-1\sim_0 x$ signifie que $e^x-1=x+o_0(x)$ (transformation d'une équivalent en égalité)

et par suite $e^x=1+x+o_0(x)$.

Comme $\lim_{x\to0}-x=0, e^{-x}-1\sim_0-x$ (composition à droite) et par suite $e^{-x}=1-x+o_0(x)$.

$ln(sh(x))=\ln(e^x-e^{-x})-\ln(2)=\ln(1+x+o_0(x)-(1-x+o_0(x)))\ -\ln(2)$

$=\ln(2x+o_0(x))\ -\ln(2)$ (car le Théo 35.1 assure que $o_0(x)-o_0(x)=o_0(x)$)

$=\ln(2x(1+o_0(1)))\ -\ln(2)=\ln(2)+\ln(x)+\ln(1+o_0(1))-\ln(2)$

Donc, $ln(sh(x))\sim_0\ln(x)$ car $\lim_{x\to0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0}\ln(1+o_0(1))=0$. De plus, $\sin(x)\sim_0 x$.

Donc, $h(x)\sim_0 xln(x)$ (produit d'équivalents). Par conséquent, $\lim_{x\to0}h(x)=\lim_{x\to0}xln(x)\overset{CC}{\triangleq}0$ (limite commune en a de deux équivalents en a). Il en découle $\lim_{x\to0}f(x)=1$. Comme $1\neq0$, le (la limite finie non nulle donne l'équivalent) assure que $f(x)\sim_{x\to0}1$.

Equivalent en 1 de $f(x)=x^x-x$.

$f(x)=x^x-x=f(x)=x(x^{x-1}-1) \underbrace{\sim_1}_{\substack{car\ x\sim_1 1\\ (produit\\ d'équivalents)}} x^{x-1}-1=e^{(x-1)\ln(x)}-1 \underbrace{\sim_1}_{\substack{car\ \lim_{x\to1}(x-1)\ln(x)=0\\ et\ e^t-1\sim_0 t\\ (\ composition\ à\ droite!!)}} (x-1)\ln(x)\sim_1(x-1)^2$.

S'exercer à déterminer un DL.

$DL_7\left(\frac{\pi}{2}\right)\ de\ f(x)=\sqrt[3]{7+\sin(x)}$

Posons $t=x-\frac{\pi}{2}$ et $g(t)=f(x)$.

Alors $g(t)=f\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{7+\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{7+\cos(t)}=\sqrt[3]{8-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}-\frac{t^6}{720}+o_0(t^7)}$

$$g(t)=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{t^2}{16}+\frac{t^4}{24\times8}-\frac{t^6}{720\times8}+o_0(t^7)\right)}=2\left(1+\underbrace{\left[-\frac{t^2}{16}+\frac{t^4}{24\times8}-\frac{t^6}{720\times8}+o_0(t^7)\right]}_{u(t)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Comme $\lim_{t\to0}u(t)=0\ et\ (1+u)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)u^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)u^3}{6}+u^3\varepsilon(u)$ tq $\lim_{u\to0}\varepsilon(u)=0$,

$(1+u(t))^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}u(t)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)u(t)^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)u(t)^3}{6}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)u(t)^4}{24}+u(t)^4\varepsilon(u(t))$ et par composition $\lim_{t\to0}\varepsilon(u(t))=0$ et

$$\begin{cases} u(t) = -\frac{t^2}{16}+\frac{t^4}{24\times8}-\frac{t^6}{720\times8}+o_0(t^7)\\ u(t)^2 = \frac{t^4}{16^2}-\frac{t^6}{8\times24\times8}+o_0(t^7) \\ u(t)^3 = -\frac{t^6}{16^3}+o_0(t^7)\\ u(t)^4 = o_0(t^7) \text{ et } u(t)^4\varepsilon(u(t)) = o_0(t^7)\end{cases}$$

. Donc, $(1+u(t))^{\frac13} = 1+\frac13\left(-\frac{t^2}{16}+\frac{t^4}{24\times8}-\frac{t^6}{720\times8}\right)-\frac19\left(\frac{t^4}{16^2}-\frac{t^6}{8\times24\times8}\right)+\frac{5}{81}\left(-\frac{t^6}{16^3}\right)+o_0(t^7)$

Donc , $g(t) = 2-\frac{1}{24}t^2+\frac{1}{384}t^4-\frac{1}{829440}t^6+o_0(t^7)$.

Ainsi, $f(x) = 2-\frac{1}{24}(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{1}{384}(x-\frac{\pi}{2})^4-\frac{1}{829440}(x-\frac{\pi}{2})^6+o_{\frac{\pi}{2}}\left((x-\frac{\pi}{2})^7\right)$

$DL_5(1)\ de\ f(x) = e^{x^2-5x-4}$

Posons $t = x-1$ et $g(t) = f(x)$.

Alors $g(t) = f(t+1) = e^{(t+1)^2-5(t+1)-4} = e^{t^2-3t-8} = e^{-8}e^{t^2-3t}$.

Comme $\lim\limits_{t\to0} t^2-3t = 0$ et $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^5}{120}+u^5\varepsilon(u)\ et\ \lim\limits_{u\to0}\varepsilon(u)\ = 0$,

$e^{t^2-3t} = 1+t^2-3t+\frac{(t^2-3t)^2}{2}+\frac{(t^2-3t)^3}{6}+\frac{(t^2-3t)^4}{24}+\frac{(t^2-3t)^5}{120}+\underbrace{(t^2-3t)^5}_{\sim_0 t^5}\varepsilon(u(t^2-3t))\ et\ \lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t^2-3t)\ = 0$. Donc,

$e^{t^2-3t} = 1+t^2-3t+\frac{9t^2+t^4-6t^3}{2}+\frac{-27t^3+27t^4-9t^5}{6}+\frac{81t^4-108t^5}{24}+\frac{-243t^5}{120}+t^5o_0(1)$.

Alors $g(t) = e^{-8}[1-3t+\frac{11}{2}t^2+\left(-3-\frac{9}{2}\right)t^3+\left(\frac12+\frac92+\frac{27}{8}\right)t^4+\left(-\frac32-\frac92-\frac{81}{40}\right)t^5+t^5o_0(1)]$

Ainsi, $f(x) = e^{-8}[1-3(x-1)+\frac{11}{2}(x-1)^2+\left(-\frac{15}{2}\right)(x-1)^3+\left(\frac{67}{8}\right)(x-1)^4+\left(-\frac{321}{40}\right)(x-1)^5+o_1((x-1)^5)]$.

$DL_4(0)\ de\ f(x) = \ln(1+Arctan(x)+cos(x))$

$f(x) = \ln\big(1+Arctan(x)+cos(x)\big) = \ln\left(1+x-\frac{x^3}{3}+o_0(x^4)+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^4)\right)$

$f(x) = \ln\left(2+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^4)\right) = \ln(2)+\ln\left(1+\underbrace{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{48}+o_0(x^4)}_{u(x)}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to0}u(x) = 0$ et $\ln(1+u) = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+u^4\varepsilon(u)\ et\ \lim\limits_{u\to0}\varepsilon(u) = 0$,

$\ln\big(1+u(x)\big) = u(x)-\frac{u(x)^2}{2}+\frac{u(x)^3}{3}-\frac{u(x)^4}{4}+u(x)^4\varepsilon\big(u(x)\big)$ et $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon\big(u(x)\big) = 0\ \ et$

$u(x) = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{48}+o_0(x^4)$

$u^2(x) = \frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}-\frac{5x^4}{48}+o_0(x^4)$

$u^3(x) = \frac{x^3}{8}-\frac{3x^4}{16}+o_0(x^4)$

$u^4(x) = \frac{x^4}{16}+o_0(x^4)$

Donc, $f(x) = \ln(2)+\frac{x}{2}-\frac{3x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+o_0(x^4)$.

$DL_3(0)\ de\ f(x) = \frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\sin(x)sh(x)}$

$\frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{\sin(x)sh(x)} = \frac{\ln\Big(1+\overbrace{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^5)}^{u(x)\xrightarrow[x\to0]{}0}\Big)}{(x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^4))(x+\frac{x^3}{6}+o_0(x^4))} = \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o_0(x^5)}{x^2+o_0(x^5)} = \frac{x^2\left(\frac12-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)\right)}{x^2(1+o_0(x^3))} = \left(\frac12-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)\right)\frac{1}{1+o_0(x^3)} =$

$\left(\frac12-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)\right)(1+o_0(x^3)) = \frac12-\frac{x^2}{12}+o_0(x^3)$.

$DL_4(0)\ de\ f(x) = Arcsin\left(x+\frac12\right)$

$Arcsin$ étant dérivable sur $]-1\,;1[$, f est dérivable est $]-\frac32\,;\frac12[$ et $\forall x\in]-\frac32\,;\frac12[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(x+\frac12\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac34-x-x^2}}$.

<u>Cherchons un $DL_3(0)$ de $f'(x)$</u> : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac34-x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac34}\sqrt{1-\frac43x-\frac43x^2}} = \frac{2}{\sqrt3}\left(1+\left(\underbrace{-\frac43x-\frac43x^2}_{u(x)}\right)\right)^{-\frac12}$.

Or $\lim\limits_{x\to0}u(x) = 0$ et $(1+t)^{-\frac12} = 1-\frac12t+\frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac32\right)t^2}{2}+\frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac32\right)\left(-\frac52\right)t^3}{6}+t^3\varepsilon(t)\ tq\ \lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t)\ = 0$. Donc,

$(1+u(x))^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}u(x)+\frac{3}{8}u(x)^2+\frac{5}{16}u(x)^3+u(x)^3\varepsilon(u(x))$ et $\begin{cases} u(x)=-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2 \\ u^2(x)=\frac{16}{9}x^2+\frac{32}{9}x^3+o_0(x^3) \\ u^3(x)=\frac{64}{27}x^3+o_0(x^3)\sim_0\frac{64}{27}x^3 \\ u(x)^3\varepsilon(u(x))=o_0(x^3) \end{cases}$.

Alors, $(1+u(x))^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x^2\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{16}{9}x^2+\frac{32}{9}x^3\right)+\frac{5}{16}.\frac{64}{27}x^3+o_0(x^3)=\ 1+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{20}{27}x^3+o_0(x^3)$.

Donc, $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}x+\frac{8}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{40}{27\sqrt{3}}x^3+o_0(x^3)$. Alors le TITT assure que :

$$f(x)=f(0)+\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{x^3}{3}+\frac{40}{27\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}+o_0(x^4)=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3\sqrt{3}}x^2+\frac{8}{9\sqrt{3}}\ x^3+\frac{10}{27\sqrt{3}}x^4+o_0(x^4)$$

Savoir utiliser les DL pour étudier localement une fonction

$DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $f(x)=(tan(x))^{tan(2x)}$. Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $t=x-\frac{\pi}{4}$ et $g(t)=f(x)$. Alors $x=t+\frac{\pi}{4}$ et $g(t)=f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ et $f(x)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Cherchons un $DL_2(0)$ de g :

$$g(t)=f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\left(tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{tan\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=e^{tan\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)ln\left(tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=e^{tan\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right)}.$$

Posons $h(t)=tan\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)ln\left(\frac{\tan(t)+1}{1-\tan(t)}\right)=-\frac{[\ln(1+\tan(t))-\ln(1-\tan(t)]}{tan(2t)}=-\frac{\ln\left(1+\left(t+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)-\ln\left(1+\left(-t-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right)\right)}{2t+\frac{(2t)^3}{3}+o_0(t^3)}$

$$h(t)=-\frac{\left[\left(t+\frac{t^3}{3}\right)-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]-\left[-\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+o_0(t^3)\right]}{2t+\frac{(2t)^3}{3}+o_0(t^3)}=-\frac{2t+\frac{4}{3}t^3+o_0(t^3)}{2t+\frac{8}{3}t^3+o_0(t^3)}=-\frac{2t\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)}{2t\left(1+\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)\right)}$$

$$h(t)=-\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)\frac{1}{1+\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)}=-\left(1+\frac{2t^2}{3}+o_0(t^2)\right)\left(1-\frac{4}{3}t^2+o_0(t^2)\right)=-1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2).$$

Donc, $g(t)=e^{-1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2).}=e^{-1}e^{\frac{2}{3}t^2+o(t^2)}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3}t^2+o(t^2)\right)$.

Donc, $f(x)=\frac{1}{e}+\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right)$.

J'en déduis que :

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\frac{1}{e}$. Donc f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{4}$. On note $\tilde{f}$ son prolongement par continutié en $\frac{\pi}{4}$.
2) $\forall x\neq\frac{\pi}{4},\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{f(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right)$.

   Donc, $\lim_{x\to\tilde{f}(x)}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=0. Ainsi, \tilde{f}$ est dérivable en $\frac{\pi}{4}$ et $\tilde{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ et $y=\frac{1}{e}$ est l'équation de la tangente à $C\tilde{f}$ en $\frac{\pi}{4}$.
3) Son prolongement $\tilde{f}$ admet le $DL_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ suivant : $f(x)=\frac{1}{e}+\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+o_{\frac{\pi}{4}}\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right)$ donc,

   $f(x)-\frac{1}{e}\sim_{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$. Par conséquent, $f(x)-\frac{1}{e}$ est du signe de $\frac{2}{3e}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$ donc positif au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Donc Cf est au-dessus de sa tangente horizontale et $\tilde{f}$ admet en $\frac{\pi}{4}$ un minimum local.

Cherchons l'asymptote commune de Cf en $\pm\infty$ où $f(x)=\frac{1-x+4x^2}{2x-3}e^{\frac{1}{x-3}}$ et la position de Cf par rapport à cette asymptote.

Posons $t=\frac{1}{x}$ et $g(t)=f(x)$.

Cherchons des réels a,b,c et un entier k tels que $c\neq 0$ et $k\geq 2$ et $tg(t)=a+bt+ct^k+o_0(t^k)$.

$$tg(t)=tf\left(\frac{1}{t}\right)=t\frac{1-\frac{1}{t}+4\frac{1}{t^2}}{2\frac{1}{t}-3}e^{\frac{1}{\frac{1}{t}-3}}=\frac{t^2-t+4}{2-3t}e^{\frac{t}{1-3t}}=\frac{1}{2}(4-t+t^2)\frac{1}{1-\frac{3}{2}t}e^{t\frac{1}{1-3t}}$$

$$=\frac{1}{2}(4-t+t^2)\left(1+\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}t^2+o_0(t^2)\right)e^{t(1+3t+o_0(t))}=\frac{1}{2}\left(4+5t+\frac{17}{2}t^2o_0(t^2)\right)e^{(t+3t^2+o_0(t^2))}$$

$$=\frac{1}{2}\left(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2)\right)\left(1+t+3t^2+\frac{t^2}{2}+o_0(t^2)\right)=\frac{1}{2}\left(4+5t+\frac{17}{2}t^2+o_0(t^2)\right)\left(1+t+\frac{7t^2}{2}+o_0(t^2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4+9t+\left(14+\frac{17}{2}+5\right)t^2+o_0(t^2)\right)=2+\frac{9}{2}t+\frac{55}{4}t^2+o_0(t^2).$$

Donc, $\frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{9}{2x} + \frac{55}{4x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Ainsi, $f(x) = 2x + \frac{9}{2} + \frac{55}{4x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Par conséquent, $f(x) - \left(2x + \frac{9}{2}\right) \sim_{\pm\infty} \frac{55}{4x}$.
Comme $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{55}{4x} = 0$ et $\frac{55}{4x}$ est du signe de x, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \left(2x + \frac{9}{2}\right) = 0$ et au voisinage de $+\infty$, $f(x) - \left(2x + \frac{9}{2}\right) > 0$ *et* au voisinage de $-\infty$, $f(x) - \left(2x + \frac{9}{2}\right) < 0$. Ainsi, la droite d'équation $y = 2x + \frac{9}{2}$ est asymptote à Cf en $\pm\infty$ et Cf est au-dessus de cette asymptote en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$.

Savoir trouver le DL d' une fonction d'expression intégrale ou d'une bijection réciproque

Cherchons un DL Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$. Déterminer son DL en 0 à l' ordre 10 . Qu'en déduit-on sur f ?

Posons $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t^4 > 0$. Donc $D_\varphi = \mathbb{R}$. De plus, φ est constituée uniquement de fonctions ocntinues sur leur propre domaine de définition donc φ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, φ est continue sur le segment d'extrémités x et x^2 et ainsi $f(x)$ existe. Donc, $Df = \mathbb{R}$.
De plus, φ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc admet une primitive Φ sur cet intervalle. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$.
Comme Φ est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est une primitive de φ fonction continue), f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 2(1+16x^4)^{-\frac{1}{2}} - (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

Cherchons le DL en 0 à l' ordre 9 *de* $f'(x)$.

$f'(x) = 2\left(1 - \frac{16}{2}x^4 + \frac{3}{8}16^2x^8\right) \quad - \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8\right) + o_0(x^9) \quad = 1 + \frac{33}{2}x^4 + 511 \times \frac{3}{8}x^8 + o_0(x^9)$

Donc, le théorème d'intégration terme à terme d'un DL assure que f admet le $DL_{10}(0)$*suivant* :

$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + x + \frac{33}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{1533}{8}\frac{x^9}{9} + o_0(x^{10})$.

Déterminer le DL en 0 à l' ordre 5 *de* φ^{-1} où $\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$.

$\varphi: (x \mapsto xe^{x^2})$ est continue et dérivable et même C^∞sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2x^2+1)e^{x^2} > 0$. Donc φ est strictement croissante. Alors le théorème de bijections continues et strictement monotone assure que $\varphi(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty}\varphi, \lim_{+\infty}\varphi[= \mathbb{R}$ et φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et φ est contineu et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme φ est C^∞ et sa dérivée ne s'annule jamais, φ^{-1} est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc le théorème de Taylor-Young assure que , φ^{-1} admet un DL en 0 à l' ordre 5. De plus, φ est impaire donc φ^{-1} est impaire et ainsi, son DL en 0 à l' ordre 5 est de la forme $\varphi^{-1}(u) = au + bu^3 + cu^5 + u^5\varepsilon(u)$ et $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$. Comme $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = f(0) = 0$, $x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = a\varphi(x) + b\varphi(x)^3 + c\varphi(x)^5 + \varphi(x)^5\varepsilon(\varphi(x))$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon(\varphi(x)) = 0$
avec

$$\varphi(x) = xe^{x^2} = x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o_0(x^4)\right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o_0(x^5)$$

$$(\varphi(x))^2 = x^2 + 2x^4 + o_0(x^5)$$

$$(\varphi(x))^3 = \varphi(x)(\varphi(x))^2 = x^3 + 3x^5 + o_0(x^5)$$

$(\varphi(x))^5 = (\varphi(x))^3(\varphi(x))^2 = x^5 + o_0(x^5) \sim_0 x^5$ et $\varphi(x)^5\varepsilon(\varphi(x)) = o_0(x^5)$

Donc, $x = a\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right) + b(x^3 + 3x^5) + cx^5 + o_0(x^5)$. Alors par unicité du DL de la fonction $(x \mapsto x)$,

$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ \frac{a}{2} + 3b + c = 0 \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$. Ainsi, $\varphi^{-1}(u) = u - u^3 + \frac{5}{2}u^5 + o_0(u^5)$.

Savoir utiliser les DL pour calculer limite et équivalent

Limite en 0 de $\frac{2}{sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}$.

$\frac{2}{sin^2(x)} \sim_0 \frac{2}{x^2}$ *et* $\frac{1}{1-\cos(x)} \sim_0 \frac{1}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^2}$. Donc, je ne peux pas conclure.

$$\frac{2}{sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2} - \frac{1}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4)} = \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{3} o_0(x^4)} - \frac{2}{x^2 - \frac{x^4}{12} + o_0(x^4)} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} o_0(x^2)} - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)}\right)$$

$$= \frac{2}{x^2}\left(\left(1 + \frac{x^2}{3} o_0(x^2)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{12} + o_0(x^2)\right)\right)$$

$= \frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{4} + o_0(x^2)\right) \sim_0 \frac{1}{2}$. Donc, $\lim_{x\to 0} \frac{2}{sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{1}{2}$

Equivalent en 0 de $f(x) = sin(ln(1+x)) - ln(1+sin(x))$.

$$f(x) = sin(ln(1+x)) - ln(1+sin(x)) = sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4)\right) - ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)$$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{12} - \left[x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right] + o_0(x^4) = \frac{x^4}{12} + o_0(x^4) \sim_0 \frac{x^4}{12} \ .$$

Equivalent en 0 de $f(x) = x^x - sin(x)^{sin(x)}$.

$$f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)} = e^{xln(x)} - e^{\sin(x)\ln(\sin(x))} = e^{xln(x)} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\ln\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)}$$

$$= e^{xln(x)} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\ln\left(x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)\right)} = e^{xln(x)} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left[ln(x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right)\right]}$$

$$= e^{xln(x)} - e^{\left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left[ln(x) - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)\right]} = e^{xln(x)} - e^{xln(x) - \frac{x^3}{6}ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6}ln(x)\right)}$$

$$= e^{xln(x)}\left(1 - e^{-\frac{x^3}{6}\ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6}ln(x)\right)}\right)$$

$$\underbrace{\sim_0}_{car \lim_{x\to0} e^{xln(x)}=1.} \quad 1 - e^{-\frac{x^3}{6}\ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6}ln(x)\right)}$$

$$\underbrace{\sim_0}_{\substack{car \lim_{x\to0} -\frac{x^3}{6}\ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6}ln(x)\right) = 0 \\ et\ e^u - 1 \sim_0 u}} \quad -\frac{x^3}{6}\ln(x) + o_0\left(\frac{x^3}{6}ln(x)\right)$$

$$\sim_0 -\frac{x^3}{6}\ln(x) \ .$$

Equivalent en $+\infty$ de $f(x) = (ln(x))^2\left[sin\left(\frac{1}{ln(x)}\right) - sin\left(\frac{1}{ln(x+1)}\right)\right]$.

$$f(x) = (ln(x))^2\left[sin\left(\frac{1}{ln(x)}\right) - sin\left(\frac{1}{ln(x+1)}\right)\right] = (ln(x))^2\left[2\sin\left(\frac{1}{2ln(x)} - \frac{1}{2ln(x+1)}\right)\cos\left(\frac{1}{2ln(x)} + \frac{1}{2ln(x+1)}\right)\right]$$

$$\sim_{+\infty} (ln(x))^2 2\sin\left(\underbrace{\frac{1}{2ln(x)} - \frac{1}{2ln(x+1)}}_{u(x)}\right) \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{2ln(x)} + \frac{1}{2ln(x+1)}\right) = 1. \text{ Or,}$$

$$u(x) = \frac{1}{2ln(x)} - \frac{1}{2ln(x+1)} = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{2ln(x)\ln(1+x)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2ln(x)\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2ln(x)\left[\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} \overbrace{\underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0 \\ et \lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty \\ donc\ \ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} ln(x).}}}^{\substack{car \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \\ et\ \ln(1+u) \sim_0 u.}} \frac{\frac{1}{x}}{2ln^2(x)} = \frac{1}{2xln^2(x)}.$$

En particulier, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. Par conséquent, $\sin(u(x)) \sim_{+\infty} u(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2xln^2(x)}$. Et ainsi, $f(x) \sim_{+\infty} ln^2(x)\frac{1}{xln^2(x)} = \frac{1}{x}$.

Limite en $+\infty$ de $\left(sin\left(\frac{1}{x}\right) + cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$.

$\left(sin\left(\frac{1}{x}\right) + cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{xln\left(sin\left(\frac{1}{x}\right) + cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$. Posons $t = \frac{1}{x}$ et $g(t) = f(x)$.

Alors $x = \frac{1}{t}\ et\ g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)\ et\ f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Déterminons la limite de g en 0 .

$g(t) = e^{\frac{1}{t}\ln(sin(t) + cos(t))} = e^{\frac{1}{t}\ln(1 + t + o_0(t))} = e^{\frac{1}{t}(t + o_0(t))} = e^{1 + o_0(1)}$. Donc, $\lim_{t\to0} g(t) = e$ et ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e$.

Limite en $+\infty$ de $\left(\frac{ln(1+x)}{ln(x)}\right)^{xln(x)}$.

$\left(\frac{ln(1+x)}{ln(x)}\right)^{xln(x)} = e^{xln(x)ln\left(\frac{ln(1+x)}{ln(x)}\right)} = e^{xln(x)[ln(\ln(1+x)) - \ln(\ln(x))]}$. Posons $t = \frac{1}{x}$ et $g(t) = f(x)$.

Alors $g(t) = e^{\frac{1}{t}ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]}$. Posons $h(t) = \frac{1}{t}ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) - \ln\left(ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right]$.

$$h(t) = \frac{1}{t}ln\left(\frac{1}{t}\right)\left[ln\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right] = -\frac{1}{t}\ln(t)\left[ln(\ln(1+t)) - \ln(t)) - \ln(-\ln(t))\right]$$

$$h(t) = -\frac{1}{t}\ln(t)\left[\ln(-ln(t)) + \ln\left(1 - \frac{ln(1+t)}{ln(t)}\right) - \ln(-\ln(t))\right]$$

$$= -\frac{1}{t}\ln(t)\ln\left(1 - \frac{ln(1+t)}{ln(t)}\right) \underbrace{\sim_0}_{\substack{car \lim_{t\to0} -\frac{ln(1+t)}{ln(t)} = 0 \\ et\ \ln(1+u) \sim_0 u}} -\frac{1}{t}\ln(t)\left(-\frac{ln(1+t)}{ln(t)}\right) = \frac{ln(1+t)}{t} \sim_0 1.$$

Donc, $\lim_{t\to0} g(t) = e$ et ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e.\frac{2}{3e}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$