# DS 3
# Mathématiques


**CALCULATRICE NON AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.**
Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).
Les cinq exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :
- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
- ✓ Vous n'avez pas affirmé d'emblée que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.
- ✓ Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.
- ✓ Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.
- ✓ La phrase réponse, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant (moi !!!).

## Exercice 1 Un calcul intégral par changement de variable.

1. Montrer que $\varphi : \left(x \mapsto \frac{x}{x+1}\right)$ est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ où $a$ est un réel à déterminer. Donner une expression de $\varphi^{-1}$. Représenter les courbes de $\varphi\ \ et\ \varphi^{-1}$.
2. Justifier que $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont de classe $C^{\infty}$sur leur domaine de définition respectif et donner une expression de $\varphi^{(n)}\ \ et\ (\varphi^{-1})^{(n)}\ où\ n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $\varphi^{(n)}(0)$. Retrouver ce résultat par une autre méthode.
4. Soit $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ .
   a. Justifier que $I$ existe.
   b. Calculer $I$ en effectuant un bon changement de variable.

## Exercice 2 Une suite d'intégrale

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n$ existe.
2. Calculer $I_0\ et\ I_1$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+5} I_n$ à l'aide d'une intégration par parties.
4. En déduire une expression de $I_n$ à l'aide de factorielles.
5. Montrer que la suite $(I_n)$ est convergente.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Qu'en déduit-on ?
7. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)^{2n+1} \cos^2(u) du = 0$.

## Exercice 3 Simplification de l'expression d'une fonction.

Soit $g(x) = Arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1. Déterminer $Dg$ .
2. Justifier que $g$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.
3. Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$ . On simplifiera l'expression trouvée le plus possible .
4. Montrer que $g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) & si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x) & si\ x < 0 \end{cases}$.
5. $g$ est-elle dérivable en 0 ? Décrire $Cg$ au voisinage du point d'abscisse 0 .
6. Tracer $Cg$ .
7. Calculer l'aire algébrique de la surface délimitée par $Cg$ , les droites d'équation $x = 1, x = -1$ et l'axe des abscisses.
8. $Soit\ x \in Dg$. Justifier qu'il existe un unique réel $t \in ]-\pi, \pi[$ tel que $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
9. En effectuant ce changement de variable , retrouver le résultat de la question 4. .

**Exercice 4 Equations différentielles d'ordre 1 non linéaire**

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0;1\}$ *et* l'équation de Bernoulli $(B_n)$: $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

où $a$ et $b$ sont des fonctions réelles et continues sur un même intervalle $I$ , $y$ la fonction inconnue et $x$ la variable de dérivation, élément de $I$ . Cette équation de Bernoulli n'est pas linéaire.

Une solution de $(B_n)$ sur $I$ est toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur $I$ et telle que :

$$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$$

Soit $y$ une fonction dérivable sur $I$ et ne s'annulant pas sur $I$. On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

1. Montrer que :

$y$ est solution de $(B_n)$ sur $I$ **sietssi** $z$ est solution sur $I$ d'une équation différentielle linéaire $(E_n)$ d'ordre 1.

(on ne demande pas ici de résoudre $(E_n)$).

**2. Application :**

a) Déterminer toutes les fonctions $y$ qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I = ]1;+\infty[$et qui vérifient :
$\forall x \in I, -x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$ (équation notée ( $B_2$)) .

b) Montrer que pour chacune des fonctions $f$ solutions de ( $B_2$) sur $I$ trouvées à la question précédente ( i.e. $f$ ne s'annulant pas sur $I$ ) , il existe un réel $\beta \in [1,+\infty[$ tel que $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

c) Pour $\beta \in [1,+\infty[$ , on note $(C_\beta)$ la courbe d'équation $y = \frac{x}{\ln(\beta x)}$. Montrer que $(C_\beta)$ est l'image de $(C_1)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

**Exercice 5 Développements limités obtenus par résolution d'une équation différentielle**

**A. Deux équations différentielles linéaires liées**

1. Soit l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation différentielle $(E_1)$: $cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$ .
Résoudre $(E_1)$ sur $I$ en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.

2. Soit $J = ]-1,1[$ et $(E_2)$: $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$ .

Soit $y : J \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $J$. On pose $\forall x \in J,\ t = Arcsin(x)$ et $z(t) = y(x)$.

2.1. Montrer que : $y$ est solution de $(E_2)$ sur $J \Leftrightarrow z$ est solution de $(E_1)$ sur $I$.

2.2. En déduire toutes les solutions de $(E_2)$ sur $J$.

**B. Dans cette partie, on considère une solution quelconque $f$ de $(E_2)$ sur $J$ .**

3. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $J$ .

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2f^{(n)}(x) = 0$ .

5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$ . Etablir une relation entre $a_{n+2}$ *et* $a_n$ .

6. Exprimer $a_{2p+1}$ *et* $a_{2p}$ en fonction de respectivement $a_1 = f'(0)$ et $a_0 = f(0)$ et à l'aide de factorielles.

**C. Application au DL.**

7. En remarquant que $g: (x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ est une solution de $(E_2)$ , déterminer, grâce à Taylor Young et à ce qui précède, le développement limité de $h$ à l'ordre $2n$ au voisinage de 0 .

8. En déduire, grâce au théorème d'intégration terme à terme, le développement limité de $Arcsin$ à l'ordre $2n + 1$ au voisinage de 0 .

ou

FIN.