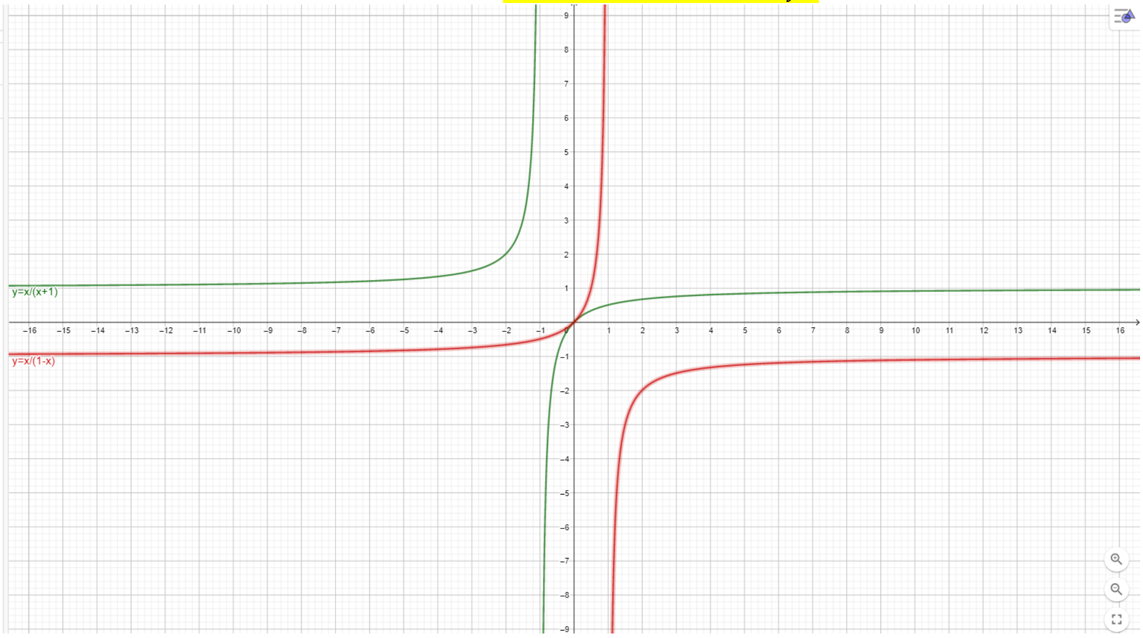
CORRIGE DU DS 3

Exercice 1 Un calcul intégral par changement de variable.

1. Montrer que $\varphi : \left(x \mapsto \frac{x}{x+1}\right)$ est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ où a est un réel à déterminer. Donner une expression de φ^{-1}. Représenter les courbes de φ et φ^{-1}.

Soit y un réel et x un réel distinct de -1. Alors, $\frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow x = y(x+1) \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ y = 1 \\ x = \frac{y}{1-y}\ si\ y \neq 1 \end{cases}$.

Donc, φ est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$.



2. Justifier que φ et φ^{-1} sont de classe C^∞sur leur domaine de définition respectif et donner une expression de $\varphi^{(n)}$ et $(\varphi^{-1})^{(n)}$où $n \in \mathbb{N}$.

D'après leurs expressions constituées uniquement de fonctions de classe C^∞sur leur domaine de définition respectif, φ et φ^{-1} est de classe C^∞sur leur domaine de définition respectif et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \varphi(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}$.

De même , $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \varphi^{-1}(x) = \frac{1-(1-x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 = -\frac{1}{x-1} - 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\varphi^{-1})^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$.

3. Déterminer $\varphi^{(n)}(0)$ $où$ $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes.

Première méthode : on applique le résultat précédent avec $x = 0$ pour $n > 0$ $\varphi^{(0)}(0) = \varphi(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(0+1)^{n+1}}$=$(-1)^{n+1}n!$

Deuxième méthode : on applique Taylor-Young . φ étant de classe C^∞ au voisinage de 0, φ admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

Or, $\varphi\,(x) = x\frac{1}{x+1} = x(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + o_0(x^{n-1}) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + o_0(x^n)$.

Alors, par unicité du $DL_n(0)$ de φ , $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}$ et ainsi, $\varphi^{(n)}(0) = (-1)^{n+--1}n! = (-1)^{n+1}n!$

4. Soit $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$.

   a. Justifier que I existe.

Soit $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. $\forall x \in [1,2], x(x+1) \neq 0 et \frac{x}{x+1} > 0$. Donc, f est définie sur $[1,2]$ et continue sur $[1,2]$ car constituée uniquement de fonctions continues sur leur domaine de définition respectif. Ainsi, I existe.

   b. Calculer I en effectuant un bon changement de variable.

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx \underbrace{=}_{\substack{u=\frac{x}{x+1}\\ x=\frac{u}{1-u}\\ dx=\frac{1}{(u-1)^2}du\\ x=1\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}\\ x=2\Leftrightarrow u=\frac{2}{3}}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\frac{u}{1-u}\left(\frac{u}{1-u}+1\right)}\ln(u)\frac{1}{(u-1)^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{(1-u)^2}{u}\ln(u)\frac{1}{(u-1)^2}du=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\underbrace{\frac{1}{u}}_{\alpha'(u)}\underbrace{\ln(u)}_{\alpha(u)}du\,.$$

$$I=\left[\underbrace{\frac{\ln(u)^2}{2}}_{\frac{1}{2}\alpha^2(u)}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left[\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2-\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\right]=\frac{1}{2}[(\ln(3)-\ln(2))^2-(\ln(2))^2]=\frac{1}{2}[(\ln(3))^2-2\ln(2)\ln(3)]$$

Exercice 2 Une suite d'intégrale

$\forall n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$.

1. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n$ existe. Quel est le signe de I_n ?

Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $f(t)=\ t^n\sqrt{1-t}$. f est continue sur [0,1] donc I_n existe.
De plus, $\forall t\in[0,1], f(t)\geq 0$ donc $I_n\ \geq 0.$

2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$ à l'aide d'une intégration par parties.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$I_{n+1}=\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt=\left[t^{n+1}\left(-\frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1-\int_0^1(n+1)t^n\left(-\frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)dt=\frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 t^n(1-t)\sqrt{1-t}\,dt$$

$$I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)\left[\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt-\int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t}\,dt\right]=\frac{2}{3}(n+1)[I_n-I_{n+1}].$$

Par conséquent, $\left(1+\frac{2}{3}(n+1)\right)I_{n+1}=\frac{2}{3}(n+1)I_n$. Ainsi, $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$.

3. En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

D'après ce qui précède, $\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N}^*, I_n=\frac{2((n-1)+1)}{2(n-1)+5}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$

De même, $\forall n\geq 2, I_{n-1}=\frac{2(n-1)}{2(n-1)+3}I_{n-2}=\frac{2(n-1)}{2n+1}I_{n-2}$ et par conséquent, $I_n=\frac{2n}{2n+3}\frac{2(n-1)}{2n+1}I_{n-2}$.

De même, $\forall n\geq 3, I_{n-2}=\frac{2(n-2)}{2(n-2)+3}I_{n-3}=\frac{2(n-2)}{2n-1}I_{n-3}$ et par conséquent, $I_n=\frac{2n}{2n+3}\frac{2(n-1)}{2n+1}\frac{2(n-2)}{2n-1}I_{n-3}$.

On itère ce procédé et on obtient : $I_n=\frac{2n}{2n+3}\times\frac{2(n-1)}{2n+1}\times\frac{2(n-2)}{2n-1}\times\frac{2(n-3)}{2n-3}\times\ldots\times\frac{2}{5}I_0$

$$I_n=\frac{(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\ldots 7.5}I_0=\frac{(2n)^2(2n-2)^2\ldots 6^2 4^2 2^2.3}{(2n+3)(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 7.6..5.4.3.2}I_0=3\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!}I_0$$

avec $I_0=\int_0^1\sqrt{1-t}\,dt=\left[\left(-\frac{(1-t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1=\frac{2}{3}$. Ainsi, $I_n=3\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!}\frac{2}{3}=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!}$.

4. Montrer que la suite (I_n) est monotone. Qu'en déduit-on ?

$\forall n\in\mathbb{N}, \frac{2(n+1)}{2n+5}<1\ donc\ \frac{2(n+1)}{2n+5}I_n<I_n\ \ i.e.\ \ I_{n+1}<I_n$. Donc, (I_n) est strictement décroissante. Comme cette suite est minorée par 0 d'après la question 1., (I_n) est convergente.

5. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\leq\frac{1}{n+1}$. Qu'en déduit-on ?

$\forall n\in\mathbb{N}, \sqrt{1-t}\leq 1\ donc\ \ t^n\sqrt{1-t}\leq t^n$. Alors, $\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt\leq\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$. On a alors $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$.
Alors, le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0.$

6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n}\cos^2(u)\,du=0.$

7. $\forall n\in\mathbb{N}, I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ t=\sin^2(u)\\ dt=2\sin(u)\cos(u)du}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n}\sqrt{1-sin^2(u)}\,2\sin(u)\cos(u)\,du$

$$I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\sqrt{cos^2(u)}\cos(u)\,du$$

$I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\cos^2(u)\,du$. Alors, *comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\cos^2(u)\,du=0.$

Exercice 3 Simplification de l'expression d'une fonction.

Soit $g(x) = Arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

1) Déterminer Dg .

$g(x)\ existe\ \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 0 \\ 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Donc $Dg = \mathbb{R}$.

2) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Dans l'expression de g seule la fonction $Arccos$ n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition. Arccos n'est dérivable que sur $]1,1[$. Or, $-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 0 \\ 2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$.

Par conséquent, g est donc dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$.

3) Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$. On simplifiera l'expression trouvée le plus possible .

$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = u'(x)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\right)\ avec\ u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\ et\ u'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Donc ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}{\sqrt{(1+x^2)^2}}}\right) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2}}\right).$$

$g'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\left(-\frac{1+x^2}{|2x|}\right) = \frac{2x}{|x|}\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} 2Arctan'(x)\ si\ x > 0 \\ -2Arctan'(x)\ \ si\ x < 0 \end{cases}$.

4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x)\ \ si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x)\ \ si\ x < 0 \end{cases}$.

$2\ Arctan$ et g sont deux primitives de la même fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Donc il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = 2Arctan(x) + c$.

$-2\ Arctan$ et g sont deux primitives de la même fonction $\left(x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}\right)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$. Donc il existe une constante réelle d telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, g(x) = -2Arctan(x) + d$.

De plus, $g(0) = Arccos(1) = 0 = 2Arctan(0)$.

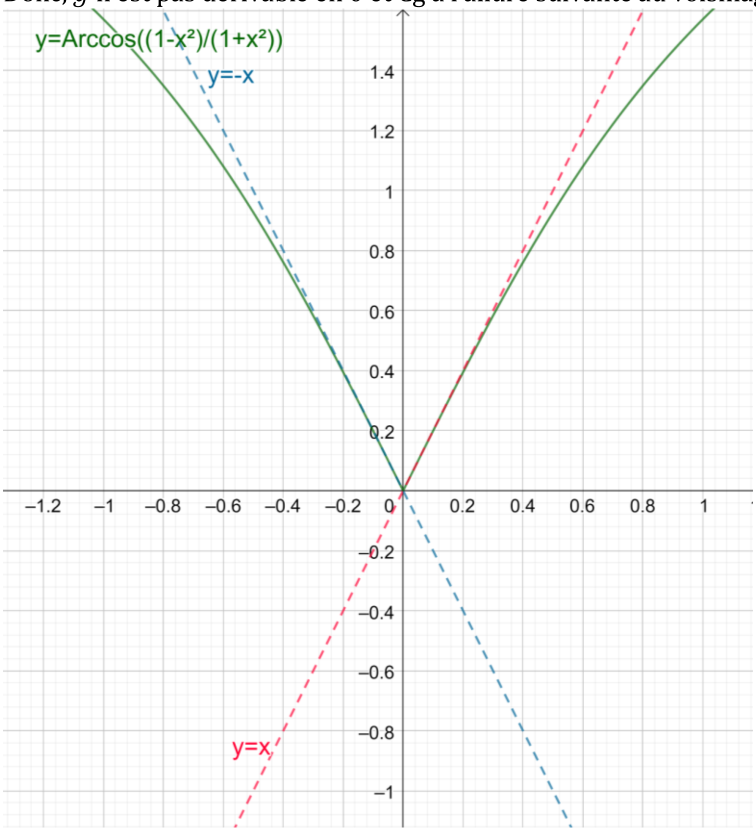
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x)\ \ si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x)\ \ si\ x < 0 \end{cases}$.

5) g est-elle dérivable en 0 ? Décrire Cg au voisinage du point d'abscisse 0 .

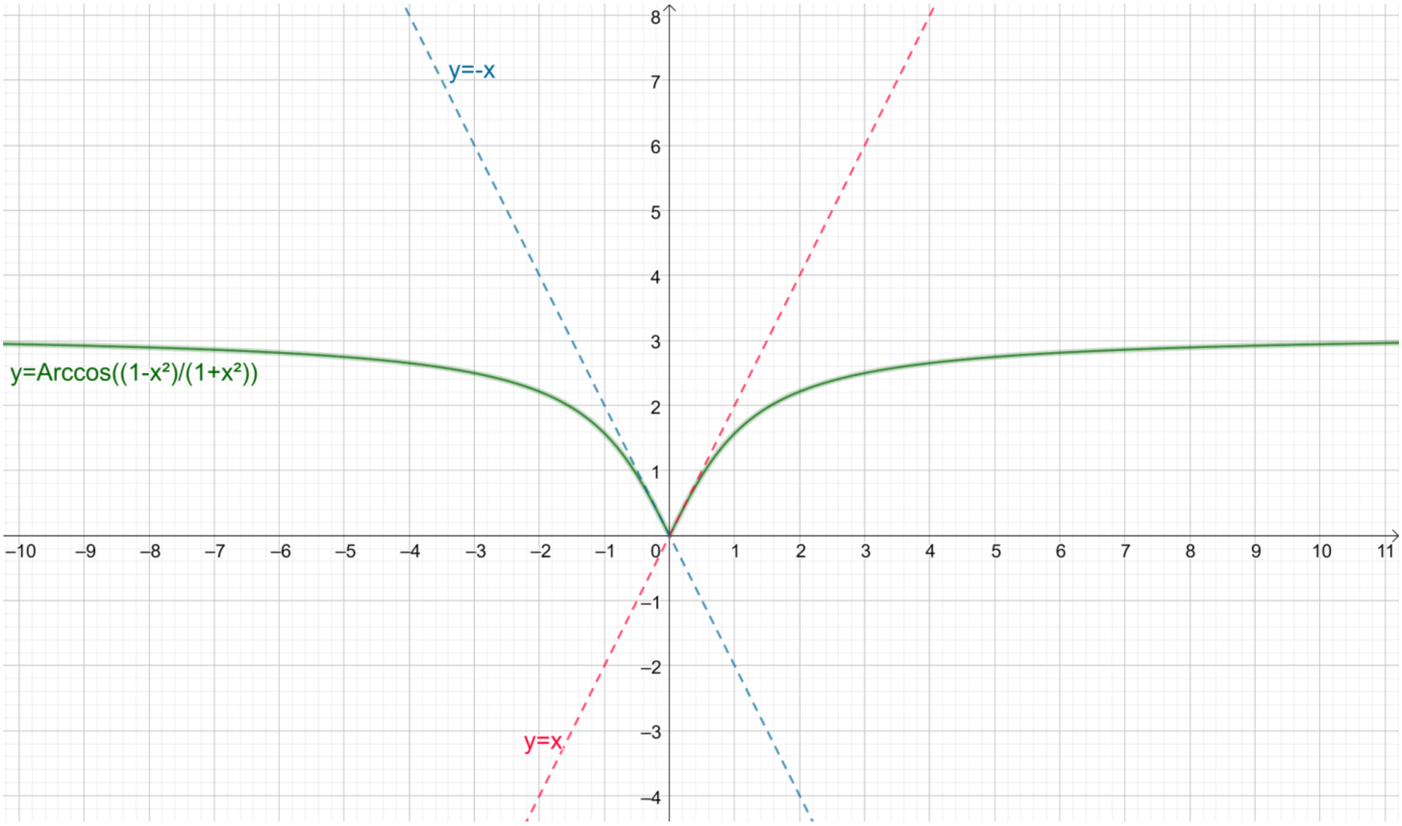
$\forall x > 0, \tau(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 2\frac{Arctan(x)}{x}. Donc\ , \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \tau(x) = 2.$

$\forall x < 0, \tau(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -2\frac{Arctan(x)}{x}. Donc\ , \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \tau(x) = -2.$

Donc, g n'est pas dérivable en 0 et Cg a l'allure suivante au voisinage de 0 :



6) Tracer Cg .



7) Calculer l'aire algébrique de la surface délimitée par Cg , les droites d'équation $x = 1, x = -1$ et l'axe des abscisses.

Il s'agit de calculer $\int_{-1}^{1} g(t)dt$.

g étant paire, $\int_{-1}^{1} g(t)dt = 2\int_{0}^{1} g(t)dt = 2\int_{0}^{1} 2Arctan(t)dt = 4\int_{0}^{1} Arctan(t)dt = 4\left\{[tArctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt\right\}$ $=4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt\right\}=4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^1\right\} = 4\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln(2)\right\} = \pi - 2\ln(2)$.

8) *Soit* $x \in Dg$. Justifier qu'il existe un unique réel $t \in]-\pi, \pi[$ tel que $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

La fonction φ: $\left(t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Donc, le TBCSM assure que : $\varphi(]-\pi,\pi[) \;=] \lim_{-\pi^+}\varphi\,, \lim_{\pi^-}\varphi\,[= \mathbb{R}$ *et* φ est bijective de $]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}$. Donc tout réel x admet un unique antécédent $t \in]-\pi,\pi[$ par φ. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! t \in]-\pi,\pi[\; / \; x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

9) En effectuant ce changement de variable , retrouver le résultat de la question 5) .

$g(x) = Arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = Arccos\left(\frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\right) = Arccos\left(\left(1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = Arccos\left(cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) =$ $Arccos(\cos(t))$.

<u>1er cas : $t \in [0,\pi[$ $i.e. x \geq 0$.</u> Alors $g(x) = t = 2Arctan(x)$.

<u>1er cas : $t \in]-\pi, 0[$ $i.e. x < 0$.</u> Alors $g(x) = Arccos(\cos(-t)) \underbrace{=}_{\substack{car \\ -t\in[0,\pi]}} -t = -2Arctan(x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2Arctan(x) & si\ x \geq 0 \\ -2Arctan(x) & si\ x < 0 \end{cases}$.

Exercice 4 Equations différentielles d'ordre 1 non linéaire

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0;1\}$ *et* l'équation de Bernoulli (B_n): $y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

où a et b sont des fonctions réelles et continues sur un même intervalle I , y la fonction inconnue et x la variable de dérivation, élément de I . Cette équation de Bernoulli n'est pas linéaire. Une solution de (B_n) sur I est toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I , ne s'annulant pas sur I et telle que : $\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

Soit y une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)^{n-1}}$.

1. Montrer que : y est solution de (B_n) sur I **sietssi** z est solution sur I d'une équation différentielle linéaire (E_n) d'ordre 1.

Comme y est une fonction dérivable sur I , ne s'annulant pas sur I, z est une fonction dérivable sur I et $\forall x \in I, z(x) =$ $y(x)^{1-n}$ *et* $z'(x) = (1-n)y'(x)y(x)^{-n}$. Alors,

$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x)^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)y(x)^{-n} + a(x)y(x)y(x)^{-n} + b(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x)y(x)^{-n} + a(x)y(x)^{1-n} + b(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{1}{1-n}z'(x) \quad + a(x)z(x) + b(x) = 0$ edl1 CQFD!

2. Application :

a) Déterminer toutes les fonctions y qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I =]1;+\infty[$ et qui vérifient :

$\forall x \in I, -x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$ (équation notée (B_2))

Soit y une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. On pose $z(x) = \frac{1}{y(x)}$. D'après 1.,

$\forall x \in I, -x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, y'(x) - \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x^2}y^2(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, -z'(x) \quad -\frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = \frac{1}{x^2}$ (E_2)edl1

Posons $a(x) = \frac{1}{x}$. Alors, $A: (x \mapsto \ln(x))$ est une primitive de a sur I et $e^{-A(x)} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$. Donc, les solutions de (E_2H) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{k}{x}\right)$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière de E_2: je cherche une solution de la forme $f(x) = \frac{k(x)}{x}$ tel que k dérivable sur I. Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$. Alors

f solution de E_2 sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in I \; \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} + \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \forall x \in I \; k'(x) = \frac{1}{x}$.

Prenons $k_0(x) = \ln(x)$ *et* $f_0(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Alors f_0 est une solution particulière de E_2 sur I. Donc, les solutions de (E_2) sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{k+\ln(x)}{x}\right)$ tel que $k \in \mathbb{R}$. Et les solutions de (E_2) sur I ne s'annulant pas sur I, sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{k+\ln(x)}{x}\right)$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$.

Alors les fonctions y solution de (B_2)qui sont dérivables et ne s'annulent pas sur $I =]1;+\infty[$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(x \mapsto \frac{x}{k+\ln(x)}\right)$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$.

b) Montrer que pour chacune des fonctions f solutions de (B_2) sur I trouvées à la question précédente (i.e. f ne s'annulant pas sur I) , il existe un réel $\beta \in [1,+\infty[$ tel que $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

Soit f: $\left(x \mapsto \frac{x}{k+\ln(x)}\right)$ tel que $k \in \mathbb{R}^+$. Posons $\beta = e^k$. Alors $A \in [1,+\infty[, \beta = \ln(A)$ *et* $\forall x \in I, f(x) = \frac{x}{\ln(\beta)+\ln(x)} = \frac{x}{\ln(\beta x)}$.

c) Pour $\beta \in [1,+\infty[$, on note (C_β) la courbe d'équation $y = \frac{x}{\ln(\beta x)}$. Montrer que (C_β) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Posons $J = [\frac{1}{\beta},+\infty[$. $C_1 = \left\{M\left(t,\frac{t}{\ln(t)}\right)/t \in I\right\} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant \\ t=\beta x \Leftrightarrow x=\frac{t}{\beta} \\ t>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\beta}}} \left\{M\left(\beta x,\frac{\beta x}{\ln(\beta x)}\right)/x \in J\right\}$. De plus, $C_\beta = \left\{M\left(x,\frac{x}{\ln(\beta x)}\right)/x \in J\right\}$

Soit $x \in I \cap J$. *Alors*, $M\left(\beta x,\frac{\beta x}{\ln(\beta x)}\right) \in C_1$ *et* $M'\left(x,\frac{x}{\ln(\beta x)}\right) \in C_\beta$ et $\overrightarrow{OM} = \beta.\overrightarrow{OM'}$.

Donc, (C_β) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

PROBLEME 2 Développements limités obtenus par résolution d'une équation différentielle

A. Deux équations différentielles linéaires liées

1. Soit l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation différentielle (E_1): $cos(t)z''(t) - 2sin(t)z'(t) - cos(t)z(t) = 0$.
Résoudre (E_1) sur I en effectuant le changement de fonction $\varphi(t) = cos(t)z(t)$.

2. Soit $J =]-1,1[$ et (E_2): $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.

Soit $y : J \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable sur J. On pose $\forall x \in J$, $t = Arcsin(x)$ et $z(t) = y(x)$.

2.1. Montrer que : y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow z$ est solution de (E_1) sur I.

2.2. En déduire toutes les solutions de (E_2) sur J.

A1.Soit z un fonction deux fois dérivable sur I.

On pose $\varphi(t) = cos(t)z(t)$. Alors φ est deux fois dérivable sur I

et $\forall t \in I, \varphi'(t) = -\sin(t)\,z(t) + \cos(t)\,z'(t)$ et $\varphi''(t) = -\cos(t)\,z(t) - 2\sin(t)\,z(t) + \cos(t)\,z''(t)$

Donc, z est solution de (E_1) sur $I \Leftrightarrow \forall t \in I, \ \varphi''(t) = 0 \Leftrightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/\forall t \in I, \varphi(t) = at + b \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ \forall t \in J, \\ \cos(t) \neq 0}} \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/\forall t \in I, z(t) = \frac{at+b}{\cos(t)}$.

Ainsi, les solutions de (E_1) sur J sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{at+b}{\cos(t)} \end{pmatrix}$ tq a, b constantes réelles.

A2.Soit y un fonction deux fois dérivable sur J.

2.1$\forall x \in J$, on pose $t = Arcsin(x)$ et $z(t) = y(x)$. Alors $t \in I$ et $z(t) = y(\sin(t))$ et $y(x) = z(Arcsin(x))$.

Donc, z est deux fois dérivable sur I .

et $\forall x \in J, y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(Arcsin(x))$ et $y' \quad (x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} z'(Arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(Arcsin(x))$ et

Donc, y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow \forall x \in J,\ (1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (1-x^2)\left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} z'(Arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(Arcsin(x))\right] - 3x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(Arcsin(x)) - z(Arcsin(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} z'(Arcsin(x)) + z''(Arcsin(x))\right] - 3x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(Arcsin(x)) - z(Arcsin(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left[xz'(Arcsin(x)) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} z''(Arcsin(x))\right] - 3\sin(t) z'(Arcsin(x)) - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} z(Arcsin(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \left[\sin(t) z'(t) + (1-sin^2(t))^{\frac{1}{2}} z''(t)\right] - 3\sin(t)z'(t) - (1-sin^2(t))^{\frac{1}{2}} z(t) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in I,\ [\sin(t) z'(t) + \cos(t) z''(t)] - 3\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ \cos(t) z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$

$\Leftrightarrow$ z est solution de (E_1) sur I.

2.2 Donc, y est solution de (E_2) sur $J \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \frac{\mathbb{R}^2}{\forall t} \in I, z(t) = \frac{at+b}{\cos(t)}$

$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in J, y(x) = z(Arcsin(x)) = \frac{aArcsin(x)+b}{\cos(Arcsin(x))} = \frac{aArcsin(x)+b}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi, les solutions de (E_2) sur J sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{aArcsin(x)+b}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$ tq a, b constantes réelles.

B. Dans cette partie, on considère f une solution de (E_2) $sur\ J$.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur J .
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$.
5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n .
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction de respectivement $a_1 = f'(0)$ et $a_0 = f(0)$ et à l'aide de factorielles.

3. Alors, f est de la forme $\begin{pmatrix}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{aArcsin(x)+b}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$. Or $Arcsin$ et $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$ sont de classe C^∞ sur J . De plus, $(t \mapsto \sqrt{t})$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x \in J, 1-x^2 > 0$ $donc$ $(x \mapsto \sqrt{1-x^2})$ sont de classe C^∞ sur J et ne s'annule pas sur J. Par conséquent, f est de classe C^∞ sur J .

4. Je sais que $\forall x \in J,\ \underbrace{(1-x^2)}_{\alpha(x)} f''(x) - \underbrace{3x}_{\beta(x)} f'(x) - f(x) = 0$. Comme $\alpha, \beta, f, f', f''$ sont de classe C^∞ sur J , je peux appliquer Leibniz :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J,\ \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(k)}(x)(f'')^{(n-k)}(x)\right] - \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{(k)}(x)(f')^{(n-k)}(x)\right] - f^{(n)}(x) = 0$.

Alors, comme $\forall k \geq 3, \alpha^{(k)} = 0$ et $\forall k \geq 2, \beta^{(k)} = 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in J$,

$\left[(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n(-2x)f^{(n+1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}(-2)f^{(n)}(x)\right] - \left[3xf^{(n+1)}(x) + 3nf^{(n)}(x)\right] - f^{(n)}(x) = 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$

5. On pose $a_n = f^{(n)}(0)$.

En prenant $x = 0 \in J$ dans la relation précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-0^2)f^{(n+2)}(0) - (2 \times n + 3) \times 0 \times f^{(n+1)}(0) - (n+1)^2 f^{(n)}(0) = 0$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - (n+1)^2 a_n = 0$

7. $\forall n \geq 2, a_n = (n-1)^2 a_{n-2}$ et $\forall n \geq 4, a_{n-2} = (n-3)^2 a_{n-4}$ donc $a_n = (n-1)^2(n-3)^2 a_{n-4}$ (…).

Donc si $n = 2p$ est pair alors $a_n = (n-1)^2(n-3)^2\ (n-5)^2(n-7)^2 \ldots\ldots 1^2 a_0$

$a_{2p} = (2p-1)^2(2p-3)^2\ (2p-5)^2(2p-7)^2 \ldots\ldots 1^2 a_0 = [(2p-1)(2p-3)(2p-5)\ldots 3.1]^{2a_0}$

$$a_{2p} = \left[\frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)(2p-4)(2p-5)\ldots 3.2.1}{2p(2p-2)(2p-4)\ldots .2.}\right]^2 a_0 = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!.}\right]^2 a_0.\ Ainsi,\ a_{2p} = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!.}\right]^2 a_0$$

Donc si n est impair alors $a_{2p+1} = (2p)^2(2p-2)^2\ (2p-4)^2(2p-6)^2 \ldots\ldots 2^2 a_1 = [2^p p!]^2 a_1$

Application au DL.

7. En appliquant le théorème de Taylor Young à une bonne solution particulière de (E_2), déterminer le développement limité de g: $(x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$ à l'ordre $2n$ au voisinage de 0 .
8. En déduire le développement limité de $Arcsin$ à l'ordre $2n+1$ au voisinage de 0 .

7.En prenant $a = 0, b = 1$, on prouve que g: $\begin{pmatrix}]-1,1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$est une solution de (E_2). Comme $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$, d' après 6.,

$g^{(2p+1)}(0) = 0$ et $g^{(2p)}(0) = \left[\frac{(2p)!}{2^p p!.}\right]^2$. g étant de classe C^∞ sur J, on peut appliquer Taylor-Young à g en 0 à tout ordre et on obtient alors

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k\ pair}}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^{2n}) = \sum_{0 \leq 2p \leq 2n} \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} x^{2p} + o_0(x^{2n})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{\left[\frac{(2p)!}{2^p p!.}\right]^2}{(2p)!} x^{2p} + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} + o_0(x^{2n}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{4^p}\binom{2p}{p} x^{2p} + o_0(x^{2n})$$

8.g étant la dérivée de Arcsin, le théorème d'intégration terme à terme d'un Dl assure que

$$Arcsin(x) = Arcsin(0) + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{4^p} \frac{\binom{2p}{p} x^{2p+1}}{2p+1} + o_0(x^{2n+1}) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{4^p} \frac{1}{(2p+1)} \binom{2p}{p} x^{2p+1} + o_0(x^{2n+1})$$