PROGRAMME DE COLLE
SEMAINE 5

CHAPITRE 3 : Fonctions usuelles 1.

Rappels :

- Définition d'une fonction , de son domaine de définition, de sa courbe représentative.
- Définition d'une fonction (dé-)croissante, strictement (dé-)croissante.
- Définition d'une fonction majorée, minorée et bornée .
- Définition du maximum (resp. minimum) à ou de la borne supérieure (resp. inf.) d'une fonction .
- Définition d'une fonction paire, impaire, périodique.
- Définition d'une fonction continue en a , continue sur I.
- Définition d'une fonction dérivable en a , du nombre dérivé en a, de la tangente en a, d'une fonction dérivable sur I . Définition d'une tangente verticale.
- Théorème de limite par encadrement (théorème des gendarmes pour les fonctions).
- Théorème : f dérivable en $a \Longrightarrow f$ continue en a.
- Théorème : I intervalle et f dérivable sur I et $f' \geq 0 \Longrightarrow f$ croissante sur I .
- Théorème : I intervalle et f dérivable sur I et $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en des points isolés $\Longrightarrow f$ strictement croissante sur I .
- Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire avec stricte monotonie.
- Définition d'une fonction composée.

II. Trigonométrie

A. sinus et cosinus

- Définition du sinus et cosinus d'un réel à partie du cercle trigonométrie.
- Premières formules de trigonométrie liées aux définitions de cos, sin.
- Valeurs particulières.
- Equations et inéquations trigonométriques : définition de $Arccos(x)$ et de $Arcsin(x)$ d'un réel $x \in [-1,1]$.
- Autres formules de trigonométrie : formules d'addition, d'angle double.
- Formules à savoir retrouver : formules de factorisation et de linéarisation.
- Méthode pour écrire $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$.
- Fonctions sinus et cosinus: parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

B. tangente

- Définition de la tangente d'un réel distinct des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Représentation.
- Valeurs particulières.
- Formules de trigonométrie dont formules d'addition, d'angle double.
- Fonction tangente : parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.
- Equations et inéquations trigonométriques définition de $Arctan(x)$ d'un réel x.

III. Fonctions puissances entières

- Définition, domaine de définition, parité. Dérivabilité et fonction dérivée. Représentation.

IV. Fonctions racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles

- Définition.
- Définition d'une puissance rationnelle. Règles de calculs.
- Etude de la fonction : domaine de définition, parité, dérivabilité et fonction dérivée.
- Représentation dont tangente verticale de la courbe.

CHAPITRE 4 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$:
  - définition, forme algébrique, partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
  - Règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
  - Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
  - Affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$ .Caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O .
- Conjugué d'un nombre complexe :
  - définition et image ponctuelle du conjugué
  - propriétés :
    - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
    - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
    - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
    - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : 4 définitions équivalentes : par parties réelle et imaginaire - par le complexe et son conjugué - par une distance - par une norme de vecteur .
  Propriétés du module :
  - module d'un réel
  - comparaison entre $|Re(z)|$ et $|z|$, entre $|Im(z)|$ et $|z|$
  - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit ou d'un quotient de complexes
  - module de $\frac{z}{|z|}$
  - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.
- Exponentielle imaginaire.
  - Définition
  - Caractérisation des complexes de module 1.
  - Propriétés :
    - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
    - ✓ exponentielle imaginaire d'une somme d'arguments , de l'opposé d'un argument
    - ✓ formules de Moivre, d'Euler, identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
  - Définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
  - Forme trigonométrique d'un complexe non nul
  - Caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
  - Forme quasi-trigonométrique
  - Propriétés des arguments : $arg(zz')$, $arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques »
  - quotient et puissance de complexes
  - linéariser un produit de sinus et cosinus
  - calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}, \sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.
- Applications « géométriques »
  - Distance entre deux points . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
  - Angle entre deux vecteurs.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

La question de cours demandée peut être :

A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .

ET /OU

B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:.

1) La formule d'addition de la fonction tangente.
2) La composée de deux fonctions monotones et de monotonie contraire est décroissante.
3) $\forall (z, z^2) \in \mathbb{C}^2, \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.
4) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$
5) Les deux inégalités triangulaires: $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.
6) Formule d'Euler et identités du losange.

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.