

Programme de colle 14

Chapitre 10 Suites réelles et suites complexes.

- **Définitions :**
 - suite réelle , suite complexe , représentation
 - suite bornée
 - suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante
 - suite réelle ou complexe ayant une limite finie
 - suite réelle ayant une limite infinie
 - suite convergente, suite divergente.
- **Premières propriétés fondamentales des suites :**
 - Toute suite convergente est bornée. Si $a < L < b$ alors toute suite réelle de limite finie L est encadrée, à partir d'un certain rang par a et b . En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive (resp. négative) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang. Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...
 - Théorème Unicité de la limite.
 - Caractérisation d'une suite convergente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - L = \dots \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = \dots \Leftrightarrow \forall n, |u_n - L| \leq \varepsilon_n \text{ tel que } \lim_n \varepsilon_n = 0$$
 - Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement.
- **Borne sup. ou inf. :**
 - Définition d'une borne sup ou inf finie. Extension aux bornées infinies
 - Relation min et inf. Relation max et sup.
 - Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf finie
 - Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).
- **Autres propriétés fondamentales des suites :**
 - Théorème d'opérations sur les limites (« bornée $\times$ limite nulle », somme, produit inverse et quotient, somme d'une « bornée et d'une limite infinie » composition par une fonction)
 - Limite d'une suite monotone
 - Théorème de Césaro
 - Passage à la limite dans une inégalité.
- **Comparaison des suites :**
 - Définition d'une suite négligeable, équivalent ou dominée
 - Caractérisation par le quotient
 - Si $\forall n, u_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ alors ($L \in]0,1[\Rightarrow (u_n)CV \text{ vers } 0$) et ($L \in]1, +\infty[\Rightarrow (u_n)DV \text{ vers } +\infty$)
 - Croissances comparées $\forall (\alpha, \beta, a) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++} \times]1, +\infty[$, $\ln(n)^\alpha \ll_{+\infty} n^\beta \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$.
- **Suites complexes :** Caractérisation de la convergence d'une suite complexe par les suites des parties réelle et imaginaire.
- **Suites extraites :**
 - Définition
 - Théorème de limite d'une suite extraite d'une suite ayant une limite; preuve de la divergence d'une suite
 - Caractérisation de la limite d'une suite u par les deux suites extraites particulières : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
- **Suites adjacentes :**
 - Définition
 - Théorème de convergence et d'approximation de la limite.

CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

Q1) Théorème d'unicité de la limite.

Q2) Soit (u_n) une suite réelle et a, b et L des réels.

Démontrer que : si $a < L < b$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, u_n \in [a, b]$.

Q3) Démontrer que le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Q4) Démontrer que si u et v convergent vers respectivement L_1 et L_2 alors $u + v$ converge vers $L_1 + L_2$.

Q5) Démontrer que si u tend vers $-\infty$ alors $\frac{1}{u}$ converge vers 0^- .

Q6) Toute suite réelle croissante et majorée a une limite finie et toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Q7) Théorème de convergence de deux suites adjacentes.