Corrigé du TD Suites

Généralités sur les suites

Ex 0 Soit L et L' réels ou infinis.

1. **Compléter par un lien logique le plus précis possible :**

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

c. Ici L réel. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^2 = L^2$.

e.

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \iff \lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^3 = L^3$ si u est réelle

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^3 = L^3$ si u est cpxe

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n^2+1} = L \Longleftarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

2. **VRAI ou FAUX :**

a. Une suite positive de limite nulle est décroissante à partir d'un certain rang. FAUX ¢ex : $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

b. Une suite réelle croissante a toujours une limite. VRAI

c. Deux suites bornées u et v telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ convergent vers la même limite. FAUX ¢ex : $u_n = (-1)^n$ et $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

d. Si $(\lfloor u_n \rfloor)$ converge alors u converge. FAUX ¢ex : $u_n = (-1)^n$

e. Si u et v sont deux suites convergentes de limites respectives L et L' telles que : $L < L'$ alors à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$. VRAI

f. Si u et v sont deux suites de limites respectives L et L' alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$. FAUX : si $L + L'$ est une FI

g. Si u et v sont deux suites telles que à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. FAUX : u et v n'ont pas forcément de limite

h. Si u et v sont deux suites admettant des limites et telles que à partir d'un certain rang $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. FAUX les limites peuvent être égales ¢ex : $u_n = -\frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n}$

i. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. VRAI car si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o(1))$ donc $\ln(u_n) = \underbrace{\ln(v_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty} + \underbrace{\ln(1 + o(1))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \sim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$

j. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. FAUX ¢ ex : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1$, $\ln(u_n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \neq 0 \sim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$

k. $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. FAUX pour les deux implications: ¢ex $\Longrightarrow$: $u_n = n + \sqrt{n}$ et $v_n = n$ et ¢ex$\Longleftarrow$: $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

l. Si $u_n \sim v_n$ alors $1 + u_n \sim 1 + v_n$. FAUX on ne somme pas les équivalents ¢ex : $u_n = -1$ et $v_n = -1 + \frac{1}{n}$.

m. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. FAUX on ne compose pas à gauche les équivalents ¢ex : $u_n = n + \sqrt{n}$ et $v_n = n$, alors $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

n. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. VRAI car si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $u_n \sim v_n$ alors $u_n = v_n + o(v_n) =$ donc $\exp(u_n) = \exp(v_n) \times \underbrace{\exp(o(u_n))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \sim_{n\to+\infty} \exp(v_n)$

i. Si $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente alors (u_n) ne tend pas vers 0. FAUX ¢ex : $u_k = \frac{1}{k}$

j. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente FAUX ¢ex : $u_k = \frac{1}{k}$

o. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. FAUX ¢ex : $u_n = \begin{cases} n^2 \text{ si } n \text{ pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} -3 \text{ si } n \text{ pair} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$'

p. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^n = 1$. FAUX ¢ex : $u_n = 1 + \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^n = e$.

q. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ alors $u_n \sim_{+\infty} u_{n+1}$. FAUX ¢ex : $u_n = \begin{cases} n^2 \text{ si } n \text{ pair} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

r. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ et $L \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim_{+\infty} u_{n+1}$. VRAI car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{L}$ et $L \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \mathrm{L}$ et $L \in \mathbb{R}^*$ et $u_n \sim_{+\infty} L \sim_{+\infty} u_{n+1}$.

3. **Pour réfléchir :**

s. Trouver une suite convergente non monotone. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

t. Trouver une suite bornée non convergente. $u_n = (-1)^n$

u. Trouver deux suites équivalentes dont la différence tend vers $+\infty$. $u_n = n + \sqrt{n}$ et $v_n = n$

v. Existe-t-il une suite convergente et non bornée ? NON

w. Trouver une suite u décroissante minorée par 0 et de limite 2. $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

x. Trouver une suite u divergente telle que : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent. $u_n = \begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ pair} \\ -4 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

y. Trouver une suite u convergente telle que : (u_n) et (u_{n+1}) ne sont pas équivalentes. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

z. Existe-t-il une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = -1$? NON car (u_{n+1}) est extraite de (u_n).

aa. Trouver une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$. $u_n = \frac{1}{n}$

bb. Trouver une suite u telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \in \mathbb{R}$. $u_n = \frac{1}{n^2}$

cc. Trouver deux suites u et v telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et mais v n'a pas de limite. $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 2 + (-1)^n$

Compléter alors cette affirmation pour la rendre correcte : ($\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et les $limites$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent) $\Rightarrow$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$)

dd. Trouver une suite donnant la FI $1^{+\infty}$ quand $n \to +\infty$ et dont la limite (après calcul) est 3. $u_n = 1 + \frac{a}{n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^n = e^a$ ...donc il suffit de prendre $a = ln(3)$.

Définition de la limite d'une suite :

Ex 1 Soit u une suite réelle telle que : $\forall (k, n) \in {\mathbb{N}^*}^2$, $0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{k_0}{n} + \frac{1}{k_0} \leq \frac{k_0}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k_0}{n} = 0$ (k_0 étant fixé), **il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que** : $\forall n \geq n_0, \frac{k_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, **$\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n$** $\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}$. J'en conclus , grâce à la **définition 4** de cours, que $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

Ex 2 Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx = 0$.

Soit $\varepsilon \in]0,\pi[$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx$.

D'une part, $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}\right], (\sin(x))^n \le 1$, donc $0 \le \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^n\,dx \le \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \le \sin(x) \le \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Posons $a = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Alors $0 \le \sin^n(x) \le a^n$ .J'en déduis que :

$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n(x)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}a^n dx = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)a^n \le \frac{\pi}{2}a^n$. Comme $a = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right), a \in]0,1[$ et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}a^n = 0$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_0, \frac{\pi}{2}a^n \le \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, $\forall n \ge n_0, 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\sin^n(x)dx \le \frac{\varepsilon}{2}$ et finalement,

$\forall n \ge n_0, 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Par conséquent, si $\varepsilon \ge \pi$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_0, 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx \le \frac{\pi}{2} \le \varepsilon$.

Ainsi **$\forall\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_0, 0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx \le \varepsilon$**. Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)dx = 0$.

Ex 4

A) Césaro revisité : Soit u une suite réelle , L un réel et v la suite définie par $v_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k u_k\right)$.

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}v_n = 0$. En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}v_n = L$.

a. •Je suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

$|v_n| = \left|\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k u_k\right)\right| = \frac{1}{2^n}\left|\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k u_k\right)\right| \overset{1\text{ère } I.T}{\leqq} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|2^k u_k|\right) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k|u_k|\right)$. $(**)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_0, |u_n| \le \frac{\epsilon}{2}$.

Donc $\forall n \ge n_0+1, \sum_{k=n_0}^{n-1}2^k|u_k| \le \sum_{k=n_0}^{n-1}2^k\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n_0}^{n-1}2^k \le \frac{\varepsilon}{2}\frac{2^{n-n_0-1}}{2-1}2^{n_0} = \frac{\varepsilon}{2}(2^{n-n_0}-1)2^{n_0} = \frac{\varepsilon}{2}(2^n-2^{n_0}) \le 2^n\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, $\frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k|u_k|\right) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}2^k|u_k| + \sum_{k=n_0}^{n-1}2^k|u_k|\right) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}2^k|u_k|\right) + \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=n_0}^{n-1}2^k|u_k|\right) \le \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}2^k|u_k|\right) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1}2^k|u_k|$ est indépendant de n , est donc une constante. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha = 0$. Donc, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \ge n_1, \left|\frac{1}{n}\alpha\right| = \frac{1}{n}\alpha \le \frac{\epsilon}{2}$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Alors $\forall n \ge N, \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k|u_k|\right) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc d'après l'inégalité (**),je peux affirmer que $\forall n \ge N,\ |v_n| \le \varepsilon$ J'en conclus que la suite (v_n) converge vers 0.

••Je suppose ici que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = L. \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Posons $a_n = u_n - L$ et $b_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k a_k\right)$. D'après ce ui précède comme $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = 0.$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n = 0$.

De plus, $b_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k a_k\right) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k(u_k-L)\right) = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k u_k\right) - \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)L = v_n - \frac{2^n-1}{2^n}\left[\frac{1}{2^n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^k\right)L\right] = v_n - \frac{2^n-1}{2^n}L$.

Donc,$v_n = b_n + \left(1-\frac{1}{2^n}\right)L$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n = L$.

B) Soit u une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}-u_n = L \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $u_n \sim_{+\infty} Ln$.

Posons $v_n = u_{n+1}-u_n$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}v_k$. Alors, $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \frac{1}{n}(u_n-u_0)$. Or, d'après le théorème de Césaro, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n = L \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n = L$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(u_n-u_0) = L$. Alors, $\frac{1}{n}(u_n-u_0) = L + o_0(1)$ et ensuite, $u_n - u_0 = nL + no_{+\infty}(1)$ et finalement, $u_n = \underbrace{u_0}_{o_{+\infty}(nL)} + nL + \underbrace{n \times o_{+\infty}(1)}_{o_{+\infty}(nL)} \sim_{+\infty} Ln$.

<u>Propriétés : caractère borné, opérations sur les limites, encadrement :</u>

On note $B = \left\{\sqrt{a}-\sqrt{b}/(a;b) \in \mathbb{N}^2\right\}$.Soit u et v deux réels fixés tels que $0 < u < v$.

a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $0 < \sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0} < v-u$ .On pose $z = \sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}$ et $k = \left\lfloor\frac{u}{z}\right\rfloor + 1$.

b) Montrer que : $u < kz < v$.

c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $u < \sqrt{a}-\sqrt{b} < v$.

d) Montrer que B est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. qu'entre deux réels distincts , il y a toujours un élément de B.

a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0^+$.

Posons $\varepsilon = v-u \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $0 < \sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0} < \varepsilon = v-u$.

b) On pose $z = \sqrt{n_0+1}-\sqrt{n_0}$ et $k = \left\lfloor\frac{u}{z}\right\rfloor + 1$. Donc, $0 < z < v-u$ et $k-1 \le \frac{u}{z} < k$.

Alors, comme $k > 0$, $zk - z \le u < kz$ puis $kz \le u+z < u+v-u = v$. Ainsi, $u < kz < v$.

c) $kz = k\sqrt{n_0+1}-k\sqrt{n_0} \underbrace{=}_{car\ k\ge0} \sqrt{k^2(n_0+1)}-\sqrt{k^2(n_0)}$. Donc, $a = k^2(n_0+1)$ et $b = k^2 n_0$ sont deux entiers naturels qui conviennent.

d) Soit x et y deux réels tels que $x < y$.

Si $0 < x < y$ alors d'après $b)$, en $prenant$ $u = x$ et $v = y$, il existe deux entiers naturels a et b tels que : $x < \underbrace{\sqrt{a}-\sqrt{b}}_{\in B} < y$. Donc $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est un élément de B coincé entre x et y.

Si $x < 0 < y$ alors $0 \in B$ et 0 est coincé entre x et y.

Si $x < y < 0$ alors $0 < -y < -x$ et d'après $b)$, en $prenant$ $u = -y$ et $v = -x$ et il existe deux entiers naturels a et b tels que : $-y < \underbrace{\sqrt{a}-\sqrt{b}}_{\in B} < -x$. Donc $y > \underbrace{\sqrt{b}-\sqrt{a}}_{\in B} > x$ et $\sqrt{b}-a$ est un élément de B coincé entre x et y.

Ainsi, entre deux réels, il y a toujours un élément de B. Donc B est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit u et v deux suites réelles telles que ${u_n}^2 + u_n v_n + {v_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Déterminer un réel a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n^2 \le a(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)$

2. Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

1. Notons $A_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 - \frac{1}{4}v_n^2 + v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2$. Donc, $\frac{4}{3}A_n = \underbrace{\frac{4}{3}\left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2}_{\geq 0} + v_n^2$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$. De même, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$.

2. , $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}A_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$, le théorème de limite par encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit u une suite réelle ou cpxe. Montrer que : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que la réciproque est fausse. Que peut-on en déduire sur les suites $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? et sur : $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\geq 2}$?

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}$.
Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$. Par contre, ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conver~~g~~ente) comme le prouve la suite u telle que $u_n = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0 alors que S telle que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ (Cf cours exemple33 ou TD 11 ex 7). Comme les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont divergentes, les suites* $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi divergentes.

Par contre, la suite $\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 , donc je ne peux rien conclure immédiatement sur $S = \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n\geq 2}$. Il faut faire une etude supplémentaire. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ *et* $k \in [\![2, n]\!]$
$\forall x \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{x\ln(x)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$ donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)} dx$ i.e.
$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq [\ln(\ln(u))]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$. Ainsi, $\forall k \in [\![2, n]\!], \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

Par conséquent,$\underbrace{\sum_{k=2} \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)}_{\text{somme télescopique}} \leq \sum_{k=2} \frac{1}{k\ln(k)}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\ln(\ln(n+1)) - \ln\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Le théorème de limite par encadrement permet alors de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} = +\infty$

Des suites définies par des sommes

1)$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que u converge.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. Montrer l'existence puis la valeur de la limite de u.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$. Montrer que $u_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer la limite de u.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Donc u est croissante.
De plus, $\forall k \in [\![2, n]\!], 0 < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Donc, $0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$. Donc, $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$
J'en déduis que la suite u est majorée. Et ainsi u est convergente.

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underbrace{\geq}_{\substack{\text{car } \forall k\in[\![n+1,2n]\!],\\ \frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$. Donc u est croissante. Et par conséquent, u admet une limite notée L telle que réel ou $L = +\infty$.
Si on imagine un instant que L est un réel alors

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ (car (u_{2n}) est extraite de u).
- par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n \underbrace{=}_{\substack{\text{pas de Fi}\\ \text{car } L \text{ réel}}} L - L = 0$.
- Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité: $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$, j'aboutis à $0 \geq \frac{1}{2}$ ce qui est absurde.

J'en déduis que la suite u ne tend pas vers une limite finie et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L = +\infty$.

3)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{n^2+n^2} \leq \frac{1}{k^2+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$ *donc* . $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^2}$ *i.e.* $\frac{n}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{n}{1+n^2}$.

J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq nu_n \leq \frac{n^2}{1+n^2} \leq 1$. La suite $\left(\frac{u_n}{\frac{1}{n}}\right)$ est donc bornée, je peux en conclure que $u_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et par suite la suite u converge vers 0.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Déterminer la limite de u.

Soit $n \in \mathbb{N}$ *tq* $n \geq 4, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{n-3}} + \frac{1}{\binom{n}{n-2}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \ldots . + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1$
$u_n = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

Or, $\forall k \in [\![2, n-2]\!], \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} > 0$ *donc* $0 < \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}$ et par conséquent, $0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = (n-2-2+1)\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \leq \frac{2}{n}$.

Cet encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 0$. Et par suite , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$. En déduire la limite de (S_n).
$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{\text{somme télescopique}} = 2\left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$. Et par suite , $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.

6) $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}[\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)]$
$= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = -\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$.

A. Cas particulier : Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \le \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

B. Cas général . Soit (u_n) une suite telle qu'il existe a et b réels tels que $b - 1 - a \neq 0$ *et* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

Montrons que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{a+1-b}\,[(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

A. Cas particulier

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$(k+p+1)u_{k+1} - (k+1)u_k = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}} = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}}$

$= (k+p+1)\frac{1}{\frac{(k+1+p)!}{p!(k+1)!}} - (k+1)\frac{1}{\frac{(k+p)!}{p!k!}} = (k+p+1)\frac{p!(k+1)!}{(k+1+p)!} - (k+1)\frac{p!k!}{(k+p)!} = \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} - \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} = 0$.

Donc, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.

2. $(k+p+1)u_{k+1} - (k+p)u_k = (k+1)u_k - (k+p)u_k = (1-p)u_k.$ *Donc* ,

$$u_k = \frac{1}{1-p}[(k+1+p)u_{k+1} - (k+p)u_k] = \frac{(k+1+p)u_{k+1}}{1-p} - \frac{(k+p)u_k}{1-p} \underbrace{=}_{\text{en posant } v_k = \frac{(k+p)u_k}{1-p}} v_{k+1} - v_k$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!], u_k = v_{k+1} - v_k$.

Donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k}_{\text{somme télescopique}} = v_{n+1} - v_1 = \frac{(n+1+p)u_{n+1}}{1-p} - \frac{(1+p)u_1}{1-p} \overset{\text{en utilisant 1.}}{=} \frac{(n+1)u_n}{1-p} - \frac{u_0}{1-p} = \frac{(n+1)u_n}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p}(u_n - 1)$

OU BIEN si on n'a pas réussi à traité la question 2.

On a : $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$ donc $(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k = (1-p)u_{k+1}$.

Par conséquent, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}[(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k]}_{\text{somme télescopique}} = \sum_{k=0}^{n-1}(p+1)u_{k+1} = (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}$.

J'en déduis que : $(n+1)u_n - u_0 = (1-p)\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{S_n}$.

Ainsi, $S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - u_0\big) = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)$ *car* $u_0 = \frac{1}{\binom{p}{0}} = \frac{1}{1} = 1$.

4. *Soit* $n \in \mathbb{N}.\, u_n > 0$ *et* $\frac{u_n(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}\frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{n!p!}{(n+p)!}\frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{(n+2)!}{(n+p)!} \le 1$ car $p \ge 2$ donc $0 < (n+2)! \le (n+p)!$. Par conséquent, en multipliant l'inégalité par u_n, j'obtiens : $0 < u_n \le \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. Par suite , $0 < (n+1)u_n \le \frac{(n+1)p!}{(n+1)(n+2)} = \frac{p!}{(n+2)}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{p!}{n+2} = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = 0$. Alors en passant à la limite dans l'égalité obtenue à la question 2., je peux conclure que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p-1}$.

B. Cas général

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}.\, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+a}{k+b}$ donc, $(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k = 0$ et par conséquent $\sum_{k=1}^{n}[(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = 0$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}[(k+b)u_{k+1} - (k+a)u_k] = \sum_{k=0}^{n}[(k+b)u_{k+1} - \underbrace{(k+b-1)u_k}_{v_k} + (b-1-a)u_k]$

$= [\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k)] + [(b-1-a)(\sum_{k=0}^{n} u_k)]$

$= v_{n+1} - v_0 + (b-1-a)S_n$

$= (n+b)u_{n+1} + (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n$.

Par conséquent, $(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0 + (b-1-a)S_n = 0$.

Ainsi, comme $b - 1 - a \neq 0$, $S_n = \frac{1}{a+1-b}\,[(n+b)u_{n+1} - (b-1)u_0]$.

Des suites produits

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \ln(u_n)$.

   a. Démontrer l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.
   b. En déduire la limite de v puis celle de u.
   c. Calculer u_{n+1}. Peut-on facilement conclure à la monotonie de u ?

a. Soit $g: (x \mapsto \ln(1+x) - x)$ *et* $h: \left(x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)$. g et h sont dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \ge 0, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \le 0$ *et* $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \ge 0$. Par conséquent g est décroissante et h est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Et par suite, $\forall x \ge 0, g(x) \le g(0) = 0$ *et* $h(x) \ge h(0) = 0$. J'en conclus que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

b. $\forall n \ge 1, v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Or, $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \le \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \le \frac{k}{n^2}$.

Donc, $\forall n \ge 1, \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$. Donc, $\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} k) - \frac{1}{2n^4}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \le v_n \le \frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} k)$ et finalement,

$\forall n \ge 1, \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^4} \le v_n \le \frac{n(n+1)}{2n^2}$. Or, $\frac{n(n+1)}{2n^4} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ *et* $\frac{n(n+1)}{2n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2n^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)$ Donc, $\frac{n(n+1)}{2n^4} = o_{+\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)$. Alors les suites qui encadrent $v_n$sont équivalentes à $\frac{1}{2}$et tendent donc vers $\frac{1}{2}$. Ainsi, la suite v converge vers$\frac{1}{2}$ et la suite u converge vers $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1 + \frac{k}{(n+1)^2}\right) > 1$.

Alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{k}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} = 2\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)} = 2\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(n+1)^2+k}{(n+1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2+k}{n^2}\right)} = 2\frac{\prod_{k=1}^{n}((n+1)^2+k)}{\prod_{k=1}^{n}(n^2+k)}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]^2$ ...difficile de conclure !

2) Soit a un réel positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + a^k)$ et $v_n = \ln(u_n)$.

   a. Etudier la monotonie et le signe de chaque suite u *et* v.
   b. Montrer que si $a \in]0,1[$ alors v converge . Qu'en est-il de u ?
   c. Monter que si $a \in]1, +\infty[$ alors il existe un réel L tel que : $v_n = \frac{n^2}{2}ln(a) + \frac{n}{2}\ln(a) + L + o_{+\infty}(1)$. Qu'en est-il de u ?

d. Que se passe-t-il quand $a = 1$? quand $a = 0$?

a. $\forall n \geq 1, u_n > 0$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(1+a^k)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)} = 1 + a^{n+1} > 1;$ *par conséquent*, $\forall n \geq 1, u_{n+1} > u_n$ *et par suite* $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) > \ln(u_n) = v_n$. Ainsi, u et v sont strictement croissantes.

b. On suppose que $a \in]0,1[$. Alors, $\forall n > 0, v_n = \ln(\prod_{k=1}^{n}(1 + a^k)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a^k) \leq \sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} a \leq \frac{a}{1-a}$. Donc v est majorée et ainsi v converge.

$\forall n > 0, u_n = e^{v_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$. Donc u est aussi majorée puis convergente.

c. On suppose que $a \in]1, +\infty[$.

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a^k) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(a^k(1 + a^{-k})\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a^k) + \ln(1 + a^{-k}) = \sum_{k=1}^{n} [k\ln(a) + \ln(1 + a^{-k})] = \ln(a)\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a^{-k})}_{\substack{convergente\ car \\ a^{-1}\in]0,1[}}.$$

Posons $w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a^{-k})$.Comme $a^{-1} \in]0,1[, w$ est convergente d^' après b. Notons L la limite de w.

Alors, $w_n = L + o_{+\infty}(1)$ *et* $v_n = \ln(a)\frac{n(n+1)}{2} + L + o_{+\infty}(1) = \frac{n^2}{2}\ln(a) + \frac{n}{2}\ln(a) + L + o_{+\infty}(1)$.

d. Si $a = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + 1) = 2^n$ et $v_n = n\ln(2)$. Donc u *et* v tendent vers $+\infty$.

Si $a = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n}(1) = 1$ et $v_n = 0$. Donc u *et* v sont constantes et donc convergentes.

Ex 9 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$. Montrer que u est convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$. Posons $v_n = \ln(u_n)$.

Alors $v_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$. Donc v est majorée. De plus, $v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right) > 0$. Donc v est strictement croissante. J'en déduis que v est convergente. Notons L sa limite finie. Alors la suite u qui vérifie $\forall n, u_n = e^{v_n}$ est convergente de limite e^L.

Ex 9 4) Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n(x) = \prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)$. Simplifier $p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$.

$p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] sh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=0}^{n-1} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] ch\left(\frac{x}{2^n}\right) sh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \left[\prod_{k=0}^{n-1} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\left(\frac{1}{2}\right) sh\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\prod_{k=0}^{n-2} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] ch\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) sh\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left[\prod_{k=0}^{n-2} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\left(\frac{1}{2}\right) sh\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^2}\left[\prod_{k=0}^{n-2} ch\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] sh\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right) = \cdots$

$p_n(x)sh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} ch\left(\frac{x}{2^0}\right) sh\left(\frac{x}{2^0}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} sh(2x)$.

Donc si $x \neq 0$ alors $sh\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$ *et* $p_n(x) = \frac{sh(2x)}{2^{n+1}sh\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{sh(2x)}{2x} \frac{\frac{x}{2^n}}{sh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Comme $\lim_{t\to0} \frac{t}{sh(t)} = 1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{sh\left(\frac{x}{2^n}\right)} = 1$ et ainsi, $\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \frac{sh(2x)}{2x}$.

Deux suites d'intégrales

A) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$. Montrer que la suite u est convergente .

Soit $\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite u.

$\forall t \in [0,1], t^n \geq t^{n+1}$ donc $0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}} \leq 1$ et par suite $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. Ainsi la suite u est croissante et majorée donc convergente.

$\ell - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt$.

Comme $\forall t \in [0,1], (1 + t)(1 + t + t^n) \geq 1$ donc $0 \leq \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$. Par conséquent, $0 \leq \ell - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Alors, comme les deux suites qui encadrent $(\ell - u_n)$ tendent vers 0, $(\ell - u_n)$ converge aussi vers 0 et ainsi, (u_n) converge vers $\ell = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.ccc

B) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$. appelée INTEGRALE DE WALLIS (il en existe plusieurs formes).

a. Montrer que la suite (W_n) est convergente. On ne demande pas de calculer la limite pour le moment.
b. Etablir une relation de récurrence entre W_n*et* W_{n-2}.
c. En déduire une expression de W_{2p} et de W_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
d. Montrer que (nW_nW_{n-1}) est constante et préciser sa valeur.
e. Déterminer la limite de W.
f. Démontrer par encadrement que : $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire que $\binom{2p}{p} \sim_{p\to+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$.
g. $\forall n \in \mathbb{N}, (t \mapsto (\cos(t))^n)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc W_n existe.

Soit $n \in \mathbb{N}. \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(t) \in [0,1]$ donc, $0 \leq \left(cos(t)\right)^{n+1} \leq \left(cos(t)\right)^n \leq 1$.

Par conséquent, $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$ i.e. $0 \leq W_{n+1} \leq W_n \leq \frac{\pi}{2}$.

J'en déduis que la suite W est décroissante et bornée donc convergente.

h. Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. Je cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $|W_n| = W_n = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(cos(t)\right)^n dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^n dt$.

D' une part, $\forall t \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right], 0 \leq \left(cos(t)\right)^n \leq 1$ *donc*, $0 \leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(cos(t)\right)^n dt \leq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1 dt = \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\forall t \in \left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq cos(t) \leq cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ *donc*, $0 \leq \left(cos(t)\right)^n \leq \left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n$.Or, $0 \leq cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n = 0^+$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \left|\left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n\right| = \left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$.

Alors, $\forall n \geq n_0, \forall t \in \left[\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \left(cos(t)\right)^n \leq \frac{\varepsilon}{\pi}$ et par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(t)\right)^n dt \leq \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2}$.

J'en déduis que $\forall n \geq n_0, |W_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Je peux ainsi conclure que $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

i. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(t))^n (cos(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,(1 - sin^2(t))dt$

$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{-\sin(t)\cos^n(t)}_{u'(t)}\right] \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} dt = W_n + \left[\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\cos(t)\,dt = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}.$

Donc, $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = W_n$ *et* ainsi, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

j. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1[er] cas : n pair i.e. $n = 2p$

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) W_{2p-4} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{2p-4}\right) W_{2p-6} = \cdots = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right) \ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} W_0$$

$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3}{(2p)(2p-2)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2}$ *car* $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 3}{(2p)(2p-2)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 4\times 3\times 2}{(2p)^2(2p-2)^2\ldots 4^2\times 2^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p[p(p-1)\ldots 2\times 1]^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $W_{2p} = \frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}$.

2[ème] cas : n impair i.e. $n = 2p + 1$

$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) W_{2p-3} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\left(\frac{2p-4}{2p-3}\right) W_{2p-5} = \cdots = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \ldots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} W_1$

$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \ldots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ *car* $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$

$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right) \ldots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2p)^2(2p-2)^2 \ldots 4^2\times 2^2 2}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\ldots 4\times 3\times 2} = \frac{4^p[p(p-1)\ldots 2\times 1]^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$. Ainsi, $W_{2p} = \frac{4^p}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$.

k. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = nW_nW_{n-1}$ et montrons que la suite t est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*. t_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_{n-1}W_n = t_n$.

La suite t est donc constante égale à $t_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

l. D'après $a.$, on sait que W est convergente. Notons L sa limite.

Alors en passant à la limite dans l'égalité $W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$, on obtient $L^2 = 0$ soit $L = 0$.

m. W est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ *et* $nW_nW_{n+1} \leq nW_n^2 \leq nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

Or, $nW_nW_{n-1} = \left[\frac{n}{n+1}\right][(n+1)W_nW_{n-1}] = \left[\frac{n}{n+1}\right]\frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Alors, l'encadrement ci-dessus, permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n{}^2 = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent , $nW_n{}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Alors, $W_n{}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ et par conséquent, $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

n. Alors, $\frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} = W_{2n} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Donc, $\binom{2p}{p} \sim_{+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$.

Limite, un équivalent ou un développement asymptotique de suite

Ex 11 Déterminer les limites quand $n \to +\infty$ suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n)$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (ch(n))^{\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$

1. $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n^n)}{n^2} = \frac{n\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{cc}{=} 0$, nous pouvons conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^2} = 0$.

2. $e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n) = e^{-\sqrt{n}} \ln(e^n(e^{-n} - ne^{-n} + 1)) = e^{-\sqrt{n}} n + e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = e^{-\sqrt{n}+\ln(n)} + e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} \overset{cc}{=} 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln\left(e^{-n} - \frac{n}{e^n} + 1\right) = 0$. De plus, $ln(n) = o_{+\infty}(\sqrt{n})$ donc $-\sqrt{n} + \ln(n) \sim_{+\infty} -\sqrt{n}$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} + \ln(n) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}+n} = 0$. J'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} \ln(1 - n + e^n) = 0$.

3. $\left(cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n = e^{n\ln\left[cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]}$. *Posons* $h_n = n\ln\left[cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right]$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ *et* $\ln(t) \sim_1 (t-1)$, $ln\left[cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right] \sim_{+\infty} cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1$.

De plus, cos est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ et $cos'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$; donc, $\cos(t) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sim_{\frac{\pi}{3}} -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$. Alors, $\cos(t) - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + o_{\frac{\pi}{3}}\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.

De même, sin est dérivable en $\frac{\pi}{6}$ et $sin'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$; donc, $\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sim_{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. Alors, $\sin(t) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t - \frac{\pi}{6}\right) + o_{\frac{\pi}{6}}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3}$, $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n\pi}{3n+1} - \frac{\pi}{3}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{n\pi}{3n+1} - \frac{\pi}{3}\right)$ donc $\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\pi}{3(3n+1)}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{-\pi}{3(3n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6(3n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Et Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\pi}{6n+1} = \frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{\pi}{6}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{n\pi}{6n+1} - \frac{\pi}{6}\right)$ donc, $\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\pi}{6(6n+1)}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{-\pi}{6(6n+1)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{-\pi\sqrt{3}}{12(6n+1)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Alors, $cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)-1=\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6(3n+1)}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{-\pi\sqrt{3}}{12(6n+1)}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\left(\frac{2}{3n+1}-\frac{1}{6n+1}\right)+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\left(\frac{9n+1}{(3n+1)(6n+1)}\right)+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Or, $\frac{9n+1}{(3n+1)(6n+1)}\sim_{+\infty}\frac{9n}{18n^2}=\frac{1}{2n}$. Donc, $cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)-1\sim_{+\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\times\frac{1}{2n}$. Ainsi, $h_n\sim_{+\infty}n\times\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\times\frac{1}{2n}=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}\times\frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=\frac{\pi\sqrt{3}}{24}$.

Aet ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n=e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{24}}$.

4. $\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}=e^{\ln\left(n^{\sqrt{n+1}}\right)-\ln\left((n+1)^{\sqrt{n}}\right)}$.Posons, $h_n=\ln\left(n^{\sqrt{n+1}}\right)-\ln\left((n+1)^{\sqrt{n}}\right)$.

$$h_n=\ln\left(n^{\sqrt{n+1}}\right)-\ln\left((n+1)^{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n+1}\ln(n)-\sqrt{n}\ln(n+1)=\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\ln(n)-\sqrt{n}\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}\ln(n)-\sqrt{n}\ln(n)-\sqrt{n}[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)].$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Alors ,

$$h_n=\left[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\sqrt{n}\ln(n)-\sqrt{n}\ln(n)-\sqrt{n}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{2n}-\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{8n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2}\right)-\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{n}}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}-\frac{\ln(n)}{8n\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\underbrace{=}_{\substack{car\\ \frac{1}{2n\sqrt{n}}\ll_{+\infty}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\ll_{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ll_{+\infty}\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}}}\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}\right)\sim_{+\infty}\frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\overset{cc}{=}0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}=e^0=1$.

5. $(ch(n))^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(ch(n))}$. Posons $h_n=\frac{1}{n}\ln(ch(n))$.Alors, $h_n=\frac{1}{n}\ln(ch(n))=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(e^n\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)\right)=\frac{1}{n}\ln(e^n)+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)=1+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(ch(n))^{\frac{1}{n}}=e$.

6. $\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\sim_{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}=1$ et $\ln(t)\sim_1 t-1$. Alors, $\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)\sim_{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}-1=\frac{2}{\sqrt{n}-1}\sim_{+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$. Donc, $\sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)\sim_{+\infty}\sqrt{n}\frac{2}{\sqrt{n}}=2$. Ainsi,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)=2$.

Trouver un équivalent simple puis la limite quand $n\to+\infty$ de :

1. $u_n=\dfrac{n!-2Arctan(n)e^{\frac{n^2}{2}}-9n^n}{\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-100\ln^2(n)}$
2. $u_n=\sin(n^2+1)-(-1)^n n$
3. $u_n=\ln\left(\dfrac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$
4. $v_n=\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln(n)}$.
5. $u_n=(\ln(n)-n)^n\ln\left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
6. $v_n=\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)+a\frac{Arctan(n)}{n}$ où $a\in\mathbb{R}$
7. $w_n=(ch(n))^a-(sh(n))^a$ où $a\in\mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}Arctan(n)=\frac{\pi}{2}\in\mathbb{R}^*$ donc, $Arctan(n)\sim_{+\infty}\frac{\pi}{2}$ et $2Arctan(n)e^{\frac{n^2}{2}}\sim_{+\infty}\pi e^{\frac{n^2}{2}}$

$\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{n^n}=\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{e^{\ln(n^n)}}=e^{\frac{n^2}{2}-\ln(n^n)}=e^{\frac{n^2}{2}-n\ln(n)}=e^{\frac{n^2}{2}\left(1-\frac{2\ln(n)}{n}\right)}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}\overset{cc}{=}0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{n^n}=+\infty$ *et par suite* $n^n\ll_{+\infty}e^{\frac{n^2}{2}}$. De plus, $n!\ll_{+\infty}n^n$.

Donc, $n!\ll_{+\infty}n^n\ll_{+\infty}e^{\frac{n^2}{2}}$ et par suite, $n!-2Arctan(n)e^{\frac{n^2}{2}}-9n^n\sim_{+\infty}-\pi e^{\frac{n^2}{2}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $sin(t)\sim_0 t$, $sin\left(\frac{1}{n}\right)\sim_{+\infty}\frac{1}{n}$ donc, $\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\sim_{+\infty}\frac{n}{5}$.

De plus, $\ln^2(n)\ll_{+\infty}n$. Donc, $100\ln^2(n)\ll_{+\infty}\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ et par suite, $\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-100\ln^2(n)\sim_{+\infty}\frac{1}{5\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\sim_{+\infty}\frac{n}{5}$.

J'en déduis que $u_n\sim_{+\infty}-\frac{\pi e^{\frac{n^2}{2}}}{\frac{n}{5}}=-5\pi\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{n}$.

2. $\frac{sin(n^2+1)}{(-1)^n n}=\underbrace{\frac{sin(n^2+1)}{(-1)^n}}_{suite\ bornée}\times\underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Donc, $sin(n^2+1)\ll_{+\infty}(-1)^n n$. Ainsi, $u_n\sim_{+\infty}-(-1)^n n=(-1)^{n+1}n$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{2}=1$. Et, $\ln(t)\sim_1 t-1$. Donc, $\ln\left(\frac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)\sim_{+\infty}\frac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-1=\frac{2-\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)-2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{2\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\sim_{+\infty}1-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. De plus, $1-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)-\left(1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)=-\frac{1}{24n^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Ainsi, $u_n\sim_{+\infty}-\frac{1}{24n^4}$.

5. $u_n=(\ln(n)-n)^n\ln\left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=(-1)^n(n-\ln(n))^n\ln\left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=(-1)^n(n-\ln(n))^n\ln\left(sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=(-1)^n e^{nln(n-\ln(n))}\ln\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^6}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)$

$$=(-1)^n e^{nln\left(n\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)}\ln\left(\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{6n^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$=(-1)^n e^{nln(n)+nln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)}\left[\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{6n^4}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right]$$

$$=(-1)^n e^{nln(n)}\,e^{nln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}\right)}\left[-2\ln(n)+o_{+\infty}(1)\right]$$

$$=(-1)^n e^{nln(n)}\,e^{n\left[-\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right][}\left[-2\ln(n)+o_{+\infty}(1)\right]$$

$$=(-1)^n e^{nln(n)}\,e^{\left[-\ln(n)-\frac{\ln(n)^2}{2n}o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)\right][}\left[-2\ln(n)+o_{+\infty}(1)\right]$$

$$u_n\sim_{+\infty}(-1)^n e^{nln(n)}\,e^{[-\ln(n)]}e^{-\frac{\ln(n)^2}{2n}o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)}[-2\ln(n)]$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)^2}{n}\overset{cc}{=}0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-\frac{\ln(n)^2}{2n}o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)^2}{n}\right)}=1$. Donc,

$u_n\sim_{+\infty}(-1)^n e^{nln(n)}\,e^{[-\ln(n)]}[-2\ln(n)]=2(-1)^{n+1}n^{n-1}\ln(n)$. Ainsi, $u_n\sim_{+\infty}2(-n)^{n-1}\ln(n)$

Des développements asymptotiques de suites

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^p}$ de $Arctan\,(n)$.

2.Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$.

3.Montrer que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2 + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{(\ln(n))^3}{6n^3} + \frac{(\ln(n))^2}{n^3} + \frac{\ln(n)}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ln(n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln(n)} = e^{\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\ln(n)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]} = e^{\left[\frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)}{2n^2}+\frac{\ln(n)}{3n^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)\right]}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{2n^2} + \frac{\ln(n)}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)}_{=u_n} \overset{CC}{\triangleq} 0\ et\ e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon(t)\ tq\ \lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t) = 0$, $e^{u_n} = 1 + u_n + \frac{{u_n}^2}{2} + \frac{{u_n}^3}{6} + {u_n}^3\varepsilon(u_n)$ et par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(u_n) = 0$.

$$e^{u_n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2 + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{(\ln(n))^3}{6n^3} + \frac{(\ln(n))^2}{n^3} + \frac{\ln(n)}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right).$$

Equivalent par encadrement

1) Montrer que : pour tout entier naturel n non nul $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

2) Soit u une suite positive, décroissante et telle que : $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. On pose $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.

Montrer que : $a_n \le 2nu_n \le \frac{n}{n-1}a_{n-1}$. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

$a_n = n(u_n + u_{n+1}) \le n(u_n + u_n) \le n(u_n + u_{n-1}) = \frac{n}{n-1}(n-1)(u_n + u_{n-1}) = \frac{n}{n-1}a_n$. Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}\ donc\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n = 1$. Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction du u_n.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le n$.
4. Montrer que $u_n = o(n)$.
5. Montrer que $u_n \sim \sqrt{n}$.
6. Déterminer un réel ℓ tel que : $u_n = \sqrt{n} + \ell + o_{+\infty}(1)$.

1.$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ge \sqrt{n}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = n + u_n\ et\ u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$

3.$u_0 = 0 \le 0$. Et $u_n \le n. \Longrightarrow u_{n+1}^2 = n + u_n \le 2n \Longrightarrow u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}^2} \le \sqrt{2n} \underbrace{\Longrightarrow}_{\substack{car\ n+1\ge\sqrt{2n} \\ puisuqe \\ n^2+2n+1-2n>0}} u_{n+1} \le n+1$. CCL : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le n$.

4. et 5. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le n-1+u_{n-1} \le 2n-2$ donc $0 \le \frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n-1+u_{n-1}}}{n} \le \frac{\sqrt{2n-1}}{n}$. Or, $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ donc $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Donc $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui signifie que $u_n = o(n)$. Alors, $n + u_n \sim n\ et\ \sqrt{n+u_n} \sim \sqrt{n}$. Donc $u_{n+1} \sim \sqrt{n}\ \ et$ par conséquent $u_n \sim \sqrt{n-1}\ \sim \sqrt{n}$. Donc, $u_n = o(n)$.

6. , $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \frac{u_{n61}}{\sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}} \underbrace{\sim}_{\substack{u_{n-1}=o(n-1)=o(n)\ donc \\ \sqrt{n+u_{n-1}}=\sqrt{n}+o(\sqrt{n}) \\ et \\ \sqrt{n+u_{n-1}}+\sqrt{n}=2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})\sim2\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)\ et$ finalement, $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$.

Suites extraites:

Montrer que toute suite réelle non majorée a une suite extraite de limite $+\infty$.

On allons construire par récurrence une suite v extraite de u telle que : v strictement croissante et $\forall n, v_n \ge n$.

Initialisation : 0 ne majore pas u donc il existe $p_0\ tel\ que\ u_{p_0} \ge 0$. On pose $v_0 = u_{p_0}$.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose construits les premiers termes $v_0, \dots, v_n$.

Alors, $\forall k \in [\![0,n]\!], v_k \ge k\ et\ v_k = u_{p_k}\ avec\ p_k \in \mathbb{N}\ \ et\ \ p_n > p_{n-1} > \cdots > p_0$ et $v_n > v_{n-1} > \cdots > v_0$.

Posons $M = \max\left(n+1, u_0, u_1, u_2, u_3, \dots .\, u_{p_n-2}, u_{p_n-1}, u_{p_n}\right)$.

M ne majore pas u (puisque u n'est pas majorée) donc il existe un entier p_{n+1} tel que $u_{p_{n+1}} > M$. On pose $v_{n+1} = u_{p_{n+1}}$. Comme $u_{p_{n+1}} \ne M, u_{p_{n+1}} \notin \left\{u_0, u_1, \dots, u_{p_n}\right\}$ et $p_{n+1} \notin \{0,1,2,\dots,p_n\}$ et par suite, $p_{n+1} > p_n$. Comme $u_{p_{n+1}} > \max\left(n+1, u_0, u_1, \dots, u_{p_n}\right), u_{p_{n+1}} > u_{p_n}$ et $u_{p_{n+1}} > n+1$. OK !

CCL : $\forall n,\ v_n = u_{p_n}\ et\ p_n > p_{n-1}\ et\ \ v_{n+1} > v_n \ge n$. Alors $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto p_n \end{pmatrix}$ est strictement croissante donc v est bien une suite extraite de u. De plus, $\forall n, v_{n+1} > v_n$ donc v est strictement croissante . $\forall n, v_n \ge n$. Donc par le théorème de limite par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Ex 15 Soit u une suite telle que : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \le u_{n+p} \le \frac{n+p}{np}$. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

$\forall n > 0, 0 \le u_{n+n} \le \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$. Et $\forall n > 0, 0 \le u_{n+n+1} \le \frac{n+n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n}$.Comme $\frac{2n+1}{n^2+n} \sim \frac{2}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n^2+n} = 0$ et par suite, Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$.
Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 0, le cours assure que u est convergente de limite nulle.

Ex 16 Démontrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sans limites.

$(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées donc si elles ont une limite, ces limites sont finies.
Imaginons un instant que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons L sa limite. Alors $L \in [-1,1]$ puisque $\forall n, -1 \le \cos(n) \le 1$.
De plus, $\forall n, \cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$ donc, $\sin(n) = \frac{1}{\sin(1)}[\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)]$. Comme $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L , $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi ver L et par conséquent, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L' = \frac{1}{\sin(1)}[L\cos(1) - \mathrm{L}] = L\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$.
Enfin , $\forall n, cos^2(n) + sin^2(n) = 1$. Donc, $L^2 + L'^2 = \lim_{n\to+\infty} cos^2(n) + sin^2(n) = 1$. Donc il existe un réel θ tel que $L = \cos(\theta)$ *et* $L' = \sin(\theta)$. Alors par passage à la limite dans les égalités: $\forall n, \begin{cases}\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)\\ \sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)\end{cases}$, j'obtiens :
$\begin{cases}\cos(\theta) = \cos(\theta)\cos(1) - \sin(\theta)\sin(1) = \cos(\theta+1)\\ \cos(\theta) = \sin(\theta)\cos(1) + \cos(\theta)\sin(1) = \sin(\theta+1)\end{cases}$. Par conséquent, il existe un entier k tel que $\theta = \theta + 1 + 2k\pi$ *i.e.* $\underbrace{2k\pi = -1}_{IMPOSSIBLE}$.
Ainsi, le réel L n'existe pas et puisque (L' existe ⟹L existe), le réel L' n'existe pas non plus. Ainsi, les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sans limites.

Borne sup . inf.

Ex 17 Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $A = \left\{\frac{2p}{2pq+3} / (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$

- A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car en prenant $p = q = 1$, on prouve que $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5} \in A$).

De plus, soit $(p,q) \in \mathbb{N}^*. 1 \le q\ donc\ 0 < 2p \le 2pq\ (\ car\ p > 0) et\ par\ suite\ , 0 < \ 2p \le 2pq < 2pq + 3\ donc\ 0 < \frac{2p}{2pq+3} < 1$.
J'en déduis que A est minorée par 0 et majorée par 1. J'en conclus que A admet des bornes supérieure et inférieure finies.

- 0 minore A. Posons $\forall q \in \mathbb{N}^*, u_q = \frac{2}{2q+3}. Alors, \forall q \in \mathbb{N}^*, u_q = \frac{2}{2q+3} \in A$ (il suffit de prendre $p = 1$). De plus, la suite (u_q) tend vers 0.

J'en conclus par la caractérisation séquentielle de la borne inf. que $\inf(A) = 0.$

- 1 miajore A. Posons $\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p = \frac{2p}{2p+3}. Alors, \forall p \in \mathbb{N}^*, v_p = \frac{2p}{2p+3} \in A$ (prendre $q = 1$). De plus, $v_p \sim 1$ donc la suite (v_p) tend vers 1.

J'en conclus par la caractérisation séquentielle de la borne sup. que $\sup(A) = 1.$

Ex 18 Soient $A\ et\ B$ deux parties bornées de $\mathbb{R}$ non vides.

1. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow infB \le infA \le supA \le supB$.
2. On note $A + B = \{x + y\ /\ x\in A\ et\ y\in B\}$. Montrer que $A + B$ *est* bornée et $sup\ (A+B) = supA + supB$ et $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
3. Soit $C = \left\{\frac{|a-a'|}{a} \in A\ et\ a' \in A\right\}$.
Montrer que C admet des bornes sup et inf finies et les exprimer en fonction des bornes sup et inf de A .

1. A et B sont non vides et bornées . Donc, $infB, infA, supA\ et\ supB$ existent et sont finies. De plus, $\forall a \in A, a \in B$ *et* par conséquent, $infB \le a \le supB$. Donc, $infB$ minore A et $supB$ majore A. Comme $infA$ est le plus grand majorant de A, nécessairement, $infB \le infA$ et comme $supA$ est le plus petit minorant de A, nécessairement, $supA \le supB$.
2. $A + B = \{x + y\ /\ x\in A\ et\ y\in B\}$.
$\forall x\in A\ et\ \forall y\in B, x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}\ donc\ x + y \in \mathbb{R}$. Ainsi, $A + B \subset \mathbb{R}$.
A et B étant non vides, A contient au moins un élément a et B contient au moins un élément b et par conséquent $A + B$ contient l'élément $a + b$ et est donc non vide.
De plus, $\forall x\in A$, $\forall y\in B$, $infA \le x \le supA\ \ et\ \ infB \le y \le supB\ \ donc\ \ infA + infB \le x + y \le supA + supB$. Donc, $infA + infB$ minore $A + B$ et $infA + infB$ majore $A + B$.
De plus, d'après la caractérisation séquentielle de la borne inf, il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $infA$ et une suite (b_n) d'éléments de B qui converge vers $infB$. Alorq la suite $(a_n + b_n)$ *est* une suite d'éléments de $A + B$ qui converge vers $infA + infB$. Comme, de plus, $infA + infB$ minore $A + B$, la même caractérisation de la borne inf, permet de conclure que $infA + infB$ est la borne inférieure de $A + B$ i.e. $infA + infB = inf(A+B)$. De même, on prouve que $supA + supB = \sup(A+B)$.
3. $C = \{|a - a'|/a \in A\ et\ a' \in A\}$.

Ex 15 Soient $f: [0,1] \to [0,1]$ croissante et $E = \{a \in [0,1] / f(a) \ge a\}$.

1. Justifier que E admet une borne supérieure notée s.
2. Montrer par l'absurde que $f(s) \le s$.
3. Montrer par l'absurde que $f(s) \ge s$.
4. Qui est s pour la fonction f ?

1.$E \subset [0,1]$. De plus, $f(0) \ge 0\ donc\ 0 \in E\ et\ par\ conséquent, E\ est\ non\ vide$. Donc E amdet une borne sup finie notée s.
2. Imaginons un instant que $f(s) > s$. Considérons $c \in]s, f(s)[$. Alors $c > s$ donc par coirssance de f , $f(c) \ge f(s)$. De plus , comme $c > s = sup(E), c \notin E$ donc $f(c) < c$. Alors $c > f(s)$ ce qui contredit .... . J'en déduis que $f(s) \le s$.
3. Imaginons un instant que $f(s) < s$. Alors $f(s)$ n'est pas un majorant de E (car s est le plus petit majorant de E) donc il existe $b \in E\ et\ f(s) < b \le s$.
Donc d'une part , $b \in E, f(b) \ge b$ etpar suite, $f(s) > f(b)$. *Et*, d'autre part, puisque $b \ge s$ et f *croissante*, $f(b) \ge f(s)$ ce qui contredit...... . J'en conclus que $f(s) = s$.
4 . s est donc un point fixe de f. Nous venons de prouver que toute fonction de [0,1] dans [0,1] croissante admet un point fixe.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. On note $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sup\{u_k/k \ge n\}\ et\ y_n = \inf\{u_k/k \ge n\}$. On définit ainsi deux nouvelles suites x et y . On note $\mathrm{A} = \{u_k/k \in \mathbb{N}\}\ et\ \ \forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{u_k/k \ge n\}$.

1. Justifier que les suites x et y sont bien définies.
2. Montrer que x est décroissante et y est croissante.
3. En déduire que x et y sont convergentes et $\lim_{n\to+\infty} x_n \ge \lim_{n\to+\infty} y_n$.
4. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L$.
5. Prouver en utilisant la définition de la convergence que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = L$.

1. u est bornée donc il existe deux réels m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \le u_n \le M$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \ge n, m \le u_k \le M$. Autrement dit, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A_n} = \{\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{k} \ge \boldsymbol{n}\}$ est bornée donc $\boldsymbol{x_n} = \sup(A_n)\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{y_n} = \inf(A_n)$ existent et sont finies.

2. $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A_{n+1}} \subset A_n$. Donc, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \sup(A_n) \ge \sup(A_{n+1}) \ge \inf(A_{n+1}) \ge \inf(A_n)$ i.e. $\boldsymbol{x_n} \ge \boldsymbol{x_{n+1}} \ge y_{n+1} \ge y_n$. Donc, x est décroissante et y est croissante.

3. $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, m$ minore A_n et M majore A_n donc $M \ge \boldsymbol{x_n} \ge y_n \ge m$. Donc x est minorée par m et décroissante donc convergente. Et y est majorée par M et croissante donc convergente. Alors en passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} x_n \ge \lim_{n\to+\infty} y_n$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A_n\ donc\ x_n \ge u_n \ge y_n$. Donc si $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n$ alors (u_n) converge aussi vers cette limite commune.

5. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$ i.e. $u_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$. Donc, $\forall n \geq n_0$, $L-\varepsilon$ minore A_n et $L+\varepsilon$ majore A_n. Par conséquent, $L+\varepsilon \geq \boldsymbol{x_n} \geq y_n \geq L-\varepsilon$ .Autrement dit,$\forall n \geq n_0, |x_n - L| \leq \varepsilon$ et $|y_n - L| \leq \varepsilon$. Il en résulte que x et y convergent et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L$.

Suites adjacentes

Ex 19 Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $a \leq b$. On définit quatre suites récurrentes de la manière suivante :

$u_0 = w_0 = a$, $v_0 = t_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $t_{n+1} = \frac{w_n + t_n}{2}$ et $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n}\right)$.

1) Justifier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

A. Suites u et v

2) Montrer que u et v sont adjacentes. On note $M(a,b)$ leur limite commune appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.
3) Montrer que $M(a,b) = M(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$. En déduire que $M(a,b) = M(b,a)$.
4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, M(ta,tb) = tM(a,b)$.

1.Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0. Donc, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Alors $\sqrt{\frac{1}{x}\frac{1}{y}} \leq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$ i.e.0< $\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}$ et par suite $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$. Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

2. $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \geq 0$. Donc $\forall n \geq 1, v_n \geq u_n$.

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \underset{\substack{car \\ v_n \geq u_n}}{\geq} 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \underset{\substack{car \\ v_n \geq u_n}}{\leq} 0$. Donc u est croissante et v est décroissante. De plus , $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_1 \geq v_n \geq u_n \geq u_0$. Par conséquent u et v ont chacun une limite finie : notons L celle de u et L' celle de v.

Alors $L' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{L+L'}{2}$. Donc $L = L'$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$ et finalement u et v sont adjacentes. On note $M(a,b)$ la limite commune .

3.Posons $\alpha_n = u_{n+1}$ et $\beta_n = v_{n+1}$Alors, $M(a,b) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $M(a,b) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$. Par conséquent, $M(a,b) = M(u_0, v_0) = M(\alpha_0, \beta_0) = M(u_1, v_1) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Les suites α et β restent inchangées si on échange les valeurs de u_0 et v_0. Donc, $M(a,b) = M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = M\left(\sqrt{ba}, \frac{b+a}{2}\right) = M(b,a)$.

4.Soit t un réel strictement positif. Posons $A_n = tu_n$ et $B_n = tv_n$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = tu_{n+1} = t\sqrt{u_n v_n} = \sqrt{t^2 u_n v_n} = \sqrt{tu_n tv_n} = \sqrt{A_n B_n}$ et $B_{n+1} = tv_{n+1} = t\frac{u_n+v_n}{2} = \frac{tu_n + tv_n}{2} = \frac{A_n + B_n}{2}$.

Ainsi, A et B sont adjacentes de limite commune $M(A_0, B_0) = M(ta, tb)$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} tu_n = t\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = tM(a,b)$. Alors par unicité de la limite, $M(ta,tb) = tM(a,b)$.

B. Suites w et t

5) Montrer que t et w sont monotones.
6) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |t_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|t_n - w_n|$.
7) En déduire que t et w sont adjacentes. On note $L(a,b)$ leur limite commune
8) En calculant $t_n w_n$, déterminer $L(a,b)$.
9) Comparer $L(a,b)$ et $M(a,b)$.
10) Comparer alors u_n et t_n pour n assez grand. Pour quelles valeurs de a et b , a-t-on $L(a,b) = M(a,b)$?

5. $w_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{w_n+t_n}{2}$ et $\frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n}\right)$. On montre facilement par récurrence que $\forall n, w_n > 0$ et $t_n > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{t_{n+1}}{w_{n+1}} = \left(\frac{w_n+t_n}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_n} + \frac{1}{w_n}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{w_n}{t_n} + \frac{t_n}{w_n}\right)$. Or, $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2-2t+1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0$. Donc $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$ et par conséquent, $\frac{w_n}{t_n} + \frac{t_n}{w_n} \geq 2$ et finalement, $\frac{t_{n+1}}{w_{n+1}} \geq 1$. Donc, $t_{n+1} \geq w_{n+1}$. J'en déduis que et $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq w_n$. Alors ,

$t_{n+1} - t_n = \frac{w_n - t_n}{2} \leq 0$ et $\frac{1}{w_{n+1}} - \frac{1}{w_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_n} - \frac{1}{w_n}\right) \leq 0$ $donc$ $w_n \leq w_{n+1}$. Ainsi, t est décroissante et w est croissante.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. $|t_{n+1} - w_{n+1}| = \left|\frac{w_n+t_n}{2} - \left(\frac{2w_n t_n}{t_n+w_n}\right)\right| = \left|\frac{1}{2(t_n+w_n)}(w_n^2 + t_n^2 - 2w_n t_n)\right| = \left|\frac{1}{2(t_n+w_n)}(w_n - t_n)^2\right| = \frac{1}{2(t_n+w_n)}|w_n - t_n||w_n - t_n|$.

$Or, |w_n - t_n| \leq |w_n + t_n| = w_n + t_n. Donc, \frac{|w_n - t_n|}{w_n + t_n} \leq 1$ et finalement, $|t_{n+1} - w_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|w_n - t_n|$.

Alors on montre par récurrence que $\forall n, |t_n - w_n| \leq \frac{1}{2^n}|w_0 - t_0|$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|w_0 - t_0| = 0$ $\left(puisque \left|\frac{1}{2}\right| < 1\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n - w_n| = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n - w_n = 0$. Les suites t et w sont adjacentes et sont donc convergentes de même limite commune finie $L(a,b)$.

$\forall n, t_{n+1} w_{n+1} = \left(\frac{w_n+t_n}{2}\right)\left(\frac{2w_n t_n}{t_n+w_n}\right) = w_n t_n$. Donc, la suite tw est constante égale à $w_0 t_0 = ab$. Donc $L(a,b)^2 = ab$ et $L(a,b) = \sqrt{ab}$.

7)Montrons par récurrence sur n que $\forall n \geq 1, v_n \geq t_n$ et $y_n \geq w_n$. Alors par passage à la limite dans l'un de ces inégalités, j'obtiens : $M(a,b) \geq L(a,b)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - t_n = M(a,b) - L(a,b) \geq 0$.

Si $M(a,b) > L(a,b)$ alors à partir d'un certain rang, $u_n - t_n > 0$.

Si $M(a,b) = L(a,b)$ alors on ne peut rien dire sur le signe de $u_n - t_n$.

Enfin , si $a = b$ alors $M(a,a) = L(a,a) = a$ et toutes les suites sont constantes égales à a.

Ex 20 Soit a_0 et b_0 deux réels tels que : $0 < a_0 < b_0$ et $\forall n, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n b_n}\right) et\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{a_n b_n}\right)$.

Montrer que les deux suites a et b sont bien définies et qu'elles convergent vers une même limite.

On montre facilement par récurrence que $\forall n, a_n$ et b_n existent et sont strictement positifs. Ainsi, les deux suites a et b sont bien définies.

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n b_n} - b_n - \sqrt{a_n b_n}\right) = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$. La suite $a - b$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\forall n, a_n - b_n = \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0)$ $donc$ $0 \leq a_n \leq b_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0^-$.

$\forall n, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \sqrt{a_n b_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n b_n} - a_n\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \underset{\substack{car \\ b_n \geq a_n}}{\geq} 0$. Donc a est croissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{a_n b_n}\right) - b_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n b_n} - b_n\right) = \frac{1}{2}\sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \underset{\substack{car \\ b_n \geq a_n}}{\leq} 0$. Donc b est croissante.

Ainsi, a et b sont adjacentes et par conséquent, a et b convergent vers la même limite.

Ex 21 Soit $\boldsymbol{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ une suite réelle et bornée. On note $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x_n = \sup\{u_k/k \geq n\}}$ ***et*** $\boldsymbol{y_n = \inf\{u_k/k \geq n\}}$. On définit ainsi deux nouvelles suites $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. On note $\boldsymbol{A = \{u_k/k \in \mathbb{N}\}}$ ***et*** $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A_n = \{u_k/k \geq n\}}$.

6. Justifier que les suites x et y sont bien définies.
7. Montrer que x est décroissante et y est croissante.
8. En déduire que x et y sont convergentes et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
9. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

5. Prouver en utilisant la définition de la convergence que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L$.

2.$\forall n, \{\boldsymbol{u_k/k \geq n} + 1\} \subset \{u_k/k \geq n\}$. i. e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$. Par conséquent, $\forall n, \inf(A_n) \leq \inf(A_{n+1})$ *et* $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$. Ainsi, x est décroissante et y est croissante.

3.$\forall n, x_n \geq u_0 \geq y_n$. Donc, x est minorée et y est majorée. Alors, comme x décroissante et y croissante, x et y sont convergentes. Alors , en passant à la limite dans l'inégalité, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq u_0 \geq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

4. On suppose ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L.$. $\forall n, u_n \in A_n$ *donc*, $x_n \geq u_n \geq y_n$. Alors le théorème de limite par encadrement assure que la suite u converge vers L .

5. On suppose ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$. Donc $L - \varepsilon$ minore A_{n_0} et $L + \varepsilon$ majore A_{n_0}. Et comme $\forall n \geq n_0, \quad , A_n \subset A_{n_0}, \forall n \geq n_0, L - \varepsilon$ minore A_n et $L + \varepsilon$ majore A_n . Par conséquent $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq y_n$ et $x_n \leq L + \varepsilon.$ Et ainsi, $\forall n \geq n_0, L - \varepsilon \leq y_n \leq x_n \leq L + \varepsilon.$ J'e, déduis que $\forall n \geq n_0, -\varepsilon \leq y_n - L \leq x_n - L \leq \varepsilon$ et par suite,
$\forall n \geq n_0, |y_n - L| \leq \varepsilon$ *et* $|x_n - L| \leq \varepsilon$. J'en conclus que x et y convergent aussi vers L.

<u>**Suites récurrentes**</u>

Ex 22 Soit u une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et v la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 = v_0 \\ \forall n \geq 1, v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} \end{cases}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n < 1$.
2. Justifier que v est convergente .
3. Déterminer la limite de v.

1. On montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n$ existe et $0 < v_n$

De plus, $v_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ *et* $\left[v_{n-1} < 1 \; v_n - 1 = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} - 1 = \frac{v_{n-1} + u_n - 1 - u_n v_{n-1}}{1 + u_n v_{n-1}} = \frac{(v_{n-1} - 1)(1 - u_n)}{1 + u_n v_{n-1}} < 0\right]$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$.

2. $v_n - v_{n-1} = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}} - v_{n-1} = \frac{v_{n-1} + u_n - v_{n-1} - u_n v_{n-1}^2}{1 + u_n v_{n-1}} = \frac{u_n(1 - v_{n-1}^2)}{1 + u_n v_{n-1}} > 0$. Donc v est strictement croissante et par suite v est convergente. Notons L sa limite.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{v_{n-1} + u_n}{1 + u_n v_{n-1}}$ donc $u_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_n v_{n-1} - 1}$.
   Si $L \neq 1$ alors (u_n) est convergente de limite $\frac{L - L}{L^2 - 1} = 0$ ce qui est impossible puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. J'en conclus que $L = 1.$

Ex 23 Soit a_0 et b_0 deux réels tels que : $0 < a_0 < b_0$ et $\forall n, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$ *et* $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}$

1. Montrer que la suite $a - b$ est constante.
2. Etudier la convergence des suites a et b.

Ex 24 Déterminer une forme explicite des suites récurrrentes suivantes :

1. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = ne^n u_n$
2. $\forall n, \sqrt[5]{u_n}\sqrt[3]{u_{n+1}} = e.$
3. $u_0 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+1} = 2u_n - n + 1.$
4. $u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $u_1 = 1$ *et* $\forall n, u_{n+2} = \frac{2(u_{n+1})^2}{u_n}$.

<u>**Suites récurrentes de la forme $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$.**</u>

Ex 25 Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2 + u_n^2}$. Montrer que u est bornée et divergente.

Soit $f: \left(x \mapsto \frac{6}{2 + x^2}\right)$. $Df = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n > 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3 \neq 0$, les limites possibles de u sont les points fixes de f sur $\mathbb{R}^{+*}$. Or, $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6}{2 + x^2} = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 6 = 0$. Or,$h: (x \mapsto x^3 + 2x - 6)$ est strictement croissante et continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty > 0$ et $h(0) = -6 < 0$. Donc, h s'annule une et une seule fois en un réel λ sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, f admet un seul point fixe λ sur $\mathbb{R}^+$. Donc, ce point fixe λ est la seule limite possible de u. Comme $h(1) < 0 < h(2), \lambda \in]1,2[$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = 6\frac{-2x}{(2 + x^2)^2} < 0$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, f est continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \neq +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3, f(\mathbb{R}^{+*}) \subset [0,3]$ *et* $f([0,3]) \subset [f(3), f(0)] = \left[\frac{6}{11}, 3\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 3\right]$. J' en déduis que $\forall n \geq 2, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$.

Comme f est strictement décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire. Comme (u_n) est bornée, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont bornées et finalement convergentes. On note L et L' leurs limites respectives. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f\left(f(u_{2n})\right) = \frac{6}{2 + \left(\frac{6}{2 + u_{2n}^2}\right)^2}$. Alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} \overset{\substack{car\ f\circ f \\ continue}}{\triangleq} f\left(f(L)\right)$. Donc, L est un point fixe de $f \circ f$.

x	$\frac{1}{2}$		1		λ		2		3
$f(x)$		$\searrow$			λ			$\searrow$	
$f \circ f(x)$		$\nearrow$	1	$\nearrow$	λ	$\nearrow$	2	$\nearrow$	
$f \circ f(x) - x$		+	0	−	0	+	0	−	

$f \circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{6}{2 + \left(\frac{6}{2 + x^2}\right)^2} = x$

$\Leftrightarrow 3(2 + x^2)^2 = x(2 + x^2)^2 + 18x$

$\Leftrightarrow 3(4 + 4x^2 + x^4) = 22x + 4x^3 + x^5$

$\Leftrightarrow x^5 - x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow (x^3 + 2x - 6)(x^2 - 3x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = \lambda \; ou \; x = 1 \; ou \; x = 2.$
Donc $\lambda, 1 \; et \; 2$ sont les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

De plus, $f \circ f(x) - x = \frac{-(x^3+2x-6)(x^2-3x+2)}{2(2+x^2)^2+36} = \frac{-(x-\lambda)\overbrace{(x^2+bx+c)}^{\Delta<0}(x-1)(x-2)}{2(2+x^2)^2+36}$

$f \circ f$est strictement croissante puisque f est strictement décroissante.
Alors d'après ses variations et valeurs, je peux affirmer que :
$f \circ f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; et \; f \circ f([1, \lambda]) \subset [1, \lambda] \;\; et \;\; f \circ f([\lambda, 2]) \subset [\lambda, 2] \; et \;\; f \circ f([2,3]) \subset [2,3]$.
Donc, si $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $\forall n, u_{2n} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et la suite (u_{2n}) ne peut pas converger vers λ qui est la seule limite possible de u. Donc u diverge. Idem si $u_0 \in [2,3]$.
si $u_0 \in [1, \lambda]$ alors $\forall n, \;\; u_{2n} \in [1, \lambda]$ et $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 < 0$. Comme (u_{2n}) est monotone, (u_{2n}) est décroissante et par suite (u_{2n}) converge vers 1. Donc u diverge.
si $u_0 \in [\lambda, 2]$ alors $\forall n, \;\; u_{2n} \in [\lambda, 2]$ et $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 > 0$. Comme (u_{2n}) est monotone, (u_{2n}) est croissante et par suite (u_{2n}) converge vers 2. Donc u diverge.

Ex 26 Soit $a > 0 \;\; et \; u$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*} \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
1) Etudier la monotonie de u et déterminer la limite de la suite u.
2) Soit $v_n = e^{-u_n}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$.
3) En déduire un équivament simple de u_n quand $n \to +\infty$, en appliquant judicieusement le théorème de Césaro.

1) On pose $f : (x \mapsto x + e^{-x})$. $Df = \mathbb{R} \; et$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe . Comme $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*} et \; u_0 > 0 \,, \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$. Donc u est strictement croissante. J'en déduis que u admet une limite L telle que $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$.
Supposons que $L \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + e^{-u_n} = L + e^{-L}$. Donc, $e^{-L} = 0$ ce qui est impossible ! Donc, $L = +\infty$.
2)$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car \; \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-u_n}=0 \\ et \; e^t - 1 \sim_0 t}} e^{u_n} e^{-u_n} = 1$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = 1$.

3)Posons $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right)$. D'après Césaro, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$. Donc, $S_n = 1 + o_{+\infty}(1)$.
Or, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right] = \frac{1}{n}[e^{u_n} - e^{u_0}]$.
Par conséquent, $\frac{1}{n}[e^{u_n} - e^{u_0}] = 1 + o_{+\infty}(1)$ donc $e^{u_n} = n + o_{+\infty}(n) + ne^{u_0} = n[(1 + e^a) + o_{+\infty}(1)]$. Alors $u_n = \ln(\, n) + \ln\,(1 + e^a + o_{+\infty}(1))$ et ainsi, $u_n \sim \ln(\, n)$.

Ex 27 Soit $a > 0 \;\; et \; u$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^{+*} \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u.Tapez une équation ici.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) = f(u_n)$ où $f : \left(x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right)$.

Ex 28 Soit la suite u définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.
1. Etudier la monotonie de u et l'existence et la valeur de la limite de la suite u selon la valeur de u_0.
2. On suppose que $u_0 > 0$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.
a) Montrer que v est croissante
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$.
c) En déduire qu'il existe un entier N tel que : $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$.
d) En déduire que v est convergente .

$u_{n+1} - u_n = u_n(1 + u_n) - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc, (u_n) est croissante. Donc (u_n) admet une limite L finie ou égale à $+\infty$.
Alors si $L \in \mathbb{R}$, alors $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(1 + u_n) \underbrace{=}_{pas \; de \; F.I.} L(1 + L)$. Donc $L^2 = 0 \;\; i.e. L = 0$.
Si $L = +\infty$ alors $+\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(1 + u_n) \underbrace{=}_{pas \; de \; F.I.} +\infty$ donc il n'y a pas de contradiction. Les deux limites possibles sont 0 et $+\infty$.
Posons $f(x) = x(1 + x)$. Donc le tabelau de variation de f est :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

Donc, $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$donc si $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $\forall n, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$et comme (u_n) est croissante, $L = +\infty$.
De plus, $f(]-\infty, -1[) \subset \mathbb{R}^{+*}$donc si $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et par suite $\forall n \geq 1, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$et comme (u_n) est croissante, $L = +\infty$.
Enfin, $f(]-1,0[) \subset]-1,0[$. donc si $u_0 \in]-1,0[$ alors $\forall n, u_n \in]-1,0[$; donc (u_n) est bornée et croissante, et par conséquent, $L = 0$.
2. On suppose que $u_0 > 0$. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$.
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(u_n(1 + u_n)\right) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) = -\frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n) + \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} [\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] > 0.$$

Donc (v_n) est croissante.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} [\ln(1 + u_n) - \ln(u_n)] = \frac{1}{2^{n+1}} \left[\ln\left(\frac{1+u_n}{u_n}\right)\right] = \frac{1}{2^{n+1}} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right]$. Or , $\forall t \geq 0, \ln(1 + t) \leq t$. Donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{u_n}$ et par suite ,
$v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_n}$
c) Comme $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. $L = +\infty$. Donc, existe un entier N tel que : $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{1}{2}$. *Alors*, $\forall n \geq N, \frac{1}{u_n} \leq 2 \; et \; \frac{1}{2^{n+1} u_n} \leq \frac{1}{2^n}$ Donc, $\forall n \geq N, v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}$.

d) Alors, $\forall n \geq N+1, \sum_{k=N}^{n-1} v_{k+1} - v_k \leq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ *donc* $v_n - v_N \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-N+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^N \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Ainsi, $\forall n \geq N+1,\ \ v_n \leq 2 + v_N$. Donc la suite (v_n) est majorée à partir du rang $N+1$ donc est majorée. Comme (v_n) est croissante, (v_n)est convergente.

Suites implicites

Ex 29 a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation $xe^x = n$ admet une seule solution strictement positive notée u_n.

b) Etudier la monotonie de u.

c) Déterminer la limite de u

d) Montrer que : $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

a) Posons $f(x) = xe^x$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et continue . Donc, le TBCSM assure que $f(\mathbb{R}^{+*}) = \mathbb{R}^{+*}$.
Donc tout entier $n \in \mathbb{N}^*$admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}^{+*}$ noté u_n.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1})$. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$,$u_n < u_{n+1}$. Ainsi, u est strictement croissante. Par conséquent, u a une limite L strictement positive ou infinie.

c) e TBCSM assure que f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\forall n, u_n > 0$ *et* $f(u_n) = n$ donc $u_n = f^{-1}(n)$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) $\forall n, f(u_n) = u_n e^{u_n} = n$ donc $\ln(u_n e^{u_n}) = \ln(n)$ i.e. $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$. Comme $\ln(x) = o_{+\infty}(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\ln(u_n) = o_{+\infty}(u_n)$ et par suite $\ln(u_n) + u_n \sim_{+\infty} u_n$. J'en conclus que : $u_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

Ex 30 a) pour tout entier naturel n , justifier que l'équation $(e_n): x^5 + nx = 1$ admet une seule solution notée u_n.

b) Etudier la monotonie et la limite de (u_n).

c) Montrer que : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

a)Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n: (x \mapsto x^5 + nx - 1)$. f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $(x \mapsto x^5)$ l'est et $(x \mapsto nx - 1)$ est croissante. Donc l'équation (e_n) admet au plus une solution. De plus, f_n est continue et $f_n(0) = -1 < 0 \leq n = f_n(1)$. Donc le TVI assure que (e_n) admet au plus une solution. Ainsi (e_n) admet exactement une solution notée u_n. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, {u_n}^5 + nu_n = 1$ *i.e.* $f_n(u_n) = 0$. De plus $f_n(0) < f_n(u_n) \leq f_n(1)$, donc $0 \leq u_n \leq 1$ puisque f_n est strictement croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f_n(u_n)$ *et* $f_n(u_{n+1})$ sont ordonnés dans la même ordre que u_n *et* u_{n+1}.
$f_n(u_n) = 0$ *et* $f_n(u_{n+1}) = {u_{n+1}}^5 + nu_{n+1} - 1 = \underbrace{{u_{n+1}}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1}_{=f_{n+1}(u_{n+1})=0} - u_{n+1} = -u_{n+1} \leq 0$ puisque $0 \leq u_n$. Donc, $f_n(u_{n+1}) \leq f_n(u_n)$ et par suite, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente. Notons L sa limite. Par passage à la limite dans l'inégalité $0 \leq u_n \leq 1$, nous pouvons affirmer que $0 \leq L \leq 1$. $\forall n \in \mathbb{N}, {u_n}^5 + nu_n = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5)$ et par conséquent, $L = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5) = 0 \times (1 - L^5) = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}(1 - {u_n}^5)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} 1 - {u_n}^5 = 0$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$ i.e. $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}(1 + o(1))^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}(1 + o(1)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Alors, $u_n = \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^5\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6}\left(1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$.

Suites complexes

ATTENTION : si Z est un nombre complexe alors $\ln(Z)$ est une horreur !!!!!!

EX 31 Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)$. Calculer $(1-z)P_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} P_n$ lorsque $|z| < 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} T_n = e^z$. (indication : chercher la forme trigonométrique puis algébrique de T_n)

1. $(1-z)P_n = (1-z)\prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = (1-z)(1+z)\prod_{k=1}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = (1-z^2)\prod_{k=2}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = (1-z^2)(1+z^2)\prod_{k=3}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)$

$$= (1-z^4)\prod_{k=3}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = (1-z^4)(1+z^4)\prod_{k=4}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right) = (1-z^8)\prod_{k=4}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right).$$

(…)$(1-z)P_n = \left(1 - z^{2^n}\right)\left(1 + z^{2^n}\right) = 1 - z^{2^{n+1}}$.

Donc si $|z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$ alors la suite extraite $\left(z^{2^{n+1}}\right)$ tend vers 0. Donc, $\lim_{n\to+\infty}(1-z)P_n = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{1-z}$.

2.Posons $z = x + iy$. Alors, $T_n = \left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n \underbrace{=}_{\substack{\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}=1=1 \\ donc, pour\ n\ assez\ grand, \\ \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)\ existe\ et \\ \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)=Arctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}} \left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2}\, e^{iArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} e^{inArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)}$

$$Donc, T_n = \underbrace{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} cos\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{Re(T_n)} + i\underbrace{\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} sin\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right)}_{Im(T_n)}.$$

$r_n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right]}$. $Or, \frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] \sim \frac{n}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right]$.

Et, $\frac{n}{2}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 1\right] = \frac{n}{2}\left[\frac{2x}{n} + \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = x + \frac{x^2+y^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim_0 \begin{cases} x\ si\ x \neq 0 \\ \frac{y^2}{2n}\ si\ x = 0\ et\ y \neq 0. \\ 0\ si\ x = y = 0 \end{cases}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ln\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right] = \begin{cases} x\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} r_n = \begin{cases} e^x\ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases} = e^x$.

$cos\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \underbrace{=}_{\substack{car\ \frac{y}{x+n} \sim_{+\infty} \frac{y}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ et\ Arctan(u) \sim_0 u}} \cos\left(n\left(\left(\frac{y}{n}\right) + o_{+\infty}\left(\frac{y}{n}\right)\right)\right) = \cos(y + o_{+\infty}(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(y)$. De même,

$sin\left(nArctan\left(\frac{y}{x+n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(y)$. J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} T_n = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x e^{iy} = e^z$.