Suites réelles et suites complexes

L'axe réel est orienté et gradué, la plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormé direct.

I. Des définitions de base

- Une suite réelle (resp. complexe) u est une relation qui associe un réel (resp. complexe) u_nà chaque entier naturel $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}\ fixé$. C'est donc une application de $A = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots..\}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Comme A est totalement discret, une suite ne peut pas être continue ou dérivable, n'a pas de limite en un réel mais pourra avoir une limite en $+\infty$.
  u est encore notée $(u_n)_{n\geq n_0}$. Parfois il est assez visuel de la noter $u = (u_0, u_1, u_2, \ldots \ldots \ldots.)$.
  On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ (resp. \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'ensemble des suites réelles (resp. complexes)
- Une suite u est bien définie à partir de n_0 lorsque $\forall n \geq n_0, u_n$ existe.
- Une suite réelle est représentée sur l'axe réel par le « nuage » rectiligne formé des points d'abscisse u_n tels que $n \geq n_0$.
- Une suite complexe est représentée dans le plan complexe par les points de coordonnées $(Re(u_n), Im(u_n))$ tels que $n \geq n_0$.
- **Deux suites $u\ et\ v$ sont égales lorsque : $u\ et\ v$ sont définies à partir du même rang $n_0\ et\ \ \forall n \geq n_0, u_n = v_n$.
- **A partir des suites u et v, on définit les suites : $\alpha u = (\alpha u_n)_{n\geq n_0}$ où α constante, $u + v = (u_n + v_n)_{n\geq n_0}, et\ uv = (u_n v_n)_{n\geq n_0}$
- **La suite u complexe ou réelle est bornée lorsqu'il existe M réel $/\forall n \geq n_0, |u_n| \leq M$.
- La suite réelle u est majorée lorsque :$\exists m \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \leq m$. On dit que m est un majorant de u. m ne dépend pas de n.
- La suite réelle u est minorée lorsque :$\exists m' \in \mathbb{R}/\forall n \geq n_0, u_n \geq m'$ .On dit que m' est un minorant de u. m' ne dépend pas de n.

  Indépendant de n
- La suite réelle est croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement croissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n < u_{n+1}$.
- La suite réelle u est strictement décroissante lorsque : $\forall n \geq n_0, u_n > u_{n+1}$.
- **La suite réelle u est constante lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$ ie. lorsque $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
- **u vérifie une propriété P à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1, u_n$ vérifie P.
- **La suite réelle u est stationnaire lorsque u est constante à partir d'un certain rang.

__Exemple__ : Montrer que la suite u définie par : : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n + \frac{3n+6}{2n+2}$ est stationnaire.

$u_3 = u_2 = u_1 = 3$. Conjecture $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3$. Prouvons cette conjecture par récurrence sur n.

__Init°__ : $u_1 = 3$

__Propag°__ : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $u_n = 3$. Alors $u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n + \frac{3n+6}{2n+2} = \frac{n}{2n+2}3 + \frac{3n+6}{2n+2} = \frac{6n+6}{2n+2} = 3\ OK!$

__CCL__ : le théorème de récurrence assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3$. Il en découle que u est stationnaire.

Prop : Une suite réelle bornée est une suite majorée et minorée.
** Une suite est bornée (resp. minorée ou majorée) à partir d'un certain rang est bornée (resp. minorée ou majorée).
**Un produit fini et une combinaison linéaire de suites bornées sont des suites bornées.

↪ Démo

II. Les définitions des limites finies ou infinies.

****Def :** La suite réelle (resp. complexe) (u_n) tend vers le réel (resp. complexe) L quand $n \to +\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon).$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi proches que je le veux de L dès que n est suffisamment grand. Dans le cas d'une suite réelle , on peut remplacer $|u_n - L| \leq \varepsilon$ par $u_n \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$

Def : La suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A\ )$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Cela signifie que les réels u_n sont aussi grands que je le souhaite à condition de prendre n suffisamment grand . Attention, une suite qui tend vers $+\infty$, n'est par forcément croissante.

Def : La suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$ lorsque : $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq B\ )$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

****Def :**
- Une suite convergente est une suite ayant une limite finie.
- Une suite divergente est une suite non convergente i.e. une suite de **limite infinie ou sans limite** .

NB : Trois cas possibles pour une suite réelle u : u a une limite finie ou bien u a une limite infinie ou bien u n'a pas de limite.
Deux cas possibles pour une suite complexe u : u a une limite finie ou bien u n'a pas de limite.

Application soit $a \in]1, +\infty[\ \ et\ b \in \mathbb{C}/\ |b| < 1$. Montrer grâce aux définitions que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.

Montrons que $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a^n \geq A$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$.Soit n un entier naturel. $a^n \geq A \underset{\substack{car\ a^n>0\ et\ A>0 \\ et\ \ln\ strictement\ croissante}}{\Leftrightarrow} \ln(a^n) \geq \ln(A) \Leftrightarrow n\ln(a) \geq \ln(A) \underset{\substack{car\ a>1 \\ donc\ \ln(a)>0}}{\Leftrightarrow} n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$.

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(A)}{\ln(a)} \right\rfloor + 1$. Alors $\forall n \geq n_0, n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$ $donc\ a^n \geq A$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Montrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |b^n| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|b^n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |b|^n \leq \varepsilon \underset{\substack{car\ |b|^n>0\ et\ \varepsilon>0 \\ et\ \ln\ strictement\ croissante}}{\Leftrightarrow} \ln(|b|^n) \leq \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n\ln(|b|) \leq \ln(\varepsilon) \underset{\substack{car\ |b|<1 \\ donc\ \ln(|b|)<0}}{\Leftrightarrow} n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)}$.

Posons $n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)} \right\rfloor + 1$. Alors $\forall n \geq n_0, n \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|b|)}$ donc $|b^n| \leq \varepsilon$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.

Exemple : Montrons que : une suite de nombres entiers est convergente **sietssi** elle est stationnaire.

$\Leftarrow$évident

$\Rightarrow$ Soit u une suite de nombres entiers convergente de limite finie L. Montrons que u est stationnaire.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, |u_n - L| \leq \frac{1}{4}$.

$\forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - L) - (u_n - L)| \leq |(u_{n+1} - L)| + |(u_n - L)| \leq \frac{1}{2}$. Comme $u_n\ et\ u_{n+1}$sont entiers et leur distance est strictement inférieure à 1 dès que $n \geq N$, nécessairement $\forall n \geq N, u_n = u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) est staionnaire, constante à partir du rang N . J'en déduis que $\forall n \geq N, u_n = u_N = L$.

Premières propriétés fondamentales

1. **CARACTERE BORNÉ :**

- ✓ **Toute suite convergente est bornée.
- ✓ Soit $u = (u_n)$ une suite réelle qui tend vers un réel L. Soit $a \in \mathbb{R}$. si $a < L < b$ alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, a \leq u_n \leq b$.
- ✓ Toute suite réelle de limite strictement positive (resp.négative) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang.
- ✓ Toute suite qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas majorée (resp. minorée) ,mais est minorée (resp. majorée).

2. ****UNICITE DE LA LIMITE** : La limite d'une suite, si elle existe, est unique.
3. ****LIMITE FINIE :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ $où\ L$ finie $\boldsymbol{sietssi}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - L = 0$ $\boldsymbol{sietssi}$ $u_n = L + o_{+\infty}(1)$ $\boldsymbol{sietssi}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$ $\boldsymbol{sietssi}$ il existe une suite réelle (ε_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0\ et\ \forall n, |u_n - L| \leq \varepsilon_n$.
4. **LIMITE PAR ENCADREMENT (Théorème de gendarmes)** Toute suite réelle encadrée par deux suites de même limite finie tend aussi vers cette limite. Toute suite réelle supérieure à une suite de limite $+\infty$ tend vers $+\infty$. Toute suite réelle inférieure à une suite de limite $-\infty$ tend vers $-\infty$.

↪ Démo

Exemples: 1.Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

Posons $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{}{\overset{car\ 1+\frac{1}{n}>0}{\cong}} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Or, $\lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$. Alors, comme $e \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$, il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, u_n \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![n^2, n^2+n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$. Donc, $\sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$

Donc, $\frac{n^2+n-n^2+1}{\sqrt{n^2+n^2+n}} \leq \sum_{k=n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{n^2+n-n^2+1}{\sqrt{n^2+n^2}}$ $puis$ $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n+1}{\sqrt{2n^2}}$.

Or, $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+n}} \sim_{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{n+1}{\sqrt{2n^2}} \sim_{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc les deux suites qui encadrent (u_n), ont la même limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$. J'en déduis que (u_n) converge aussi vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) Soit u et v deux suites réelles telles que : $\forall n, 0 \leq u_n \leq a\ et\ 0 \leq v_n \leq b\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$. Montrer, par encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a\ \ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

$\forall n, 0 \underset{car\ u_n \leq a}{\leq} a - u_n \underset{car\ b-v_n \geq 0}{\leq} (a - u_n) + (b - v_n) = a + b - (u_n + v_n)$. Alors la suite $(a - u_n)$ étant encadrée par deux suites de limite nulle, le théorème de limite par encadrement assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} a - u_n = 0$ $i.e.$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Alors comme $\forall n, v_n = a + b - u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a + b - a = b$.

III. Bornes sup/inf : définition et caractérisation séquentielle

Rappel : Définition d'un maximum et d'un minimum d'une partie. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. m est appelé le **plus petit élément** ou **minimum** de A lorsque m minore A et m est élément de A . m' est appelé le **plus grand élément** ou **maximum** de A lorsque m' majore A et m' est élément de A . On note, le cas échéant, $m = \min(A)$ et $m' = \max(A)$.

Si A est un ensemble de réels minoré (resp. majoré) alors A n'a pas forcément de minimum (resp. de maximum). ex : $A =]1, +\infty[$ est minoré par -3 mais aucun minorant de A n'appartient à A . Donc A n'a pas de minimum. Par contre, on constate que parmi tous les minorants de A, l'un d'entre eux est plus près de A que les autres : il s'agit de 1. 1 est le plus grand minorant de A . 1 est appelé la borne inférieure de A .

Théorème(admis)-Définition :

1) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et majorée alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément appelé la borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.

2) Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, non vide et minorée alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément appelé la borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.

Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors $\sup(A)$ est le plus petit réel qui majore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, on dira que $\sup(A) = +\infty$.
Par définition, si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors $\inf(A)$ est le plus grand réel qui minore A.
Par convention : Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non minorée, on dira que $\inf(A) = -\infty$.

Prop : 1. Si A a un plus grand élément alors A a une borne supérieure finie et $\sup(A) = max\ (A)$.
2. Si A admet une borne supérieure finie et $\sup(A) \notin A$ alors A n' admet pas de maximum.
3. Si A a un plus petit élément alors A a une borne inférieure finie et $\inf(A) = min\ (A)$.
4. Si A admet une borne inférieure finie et $\inf(A) \notin A$ alors A n' admet pas de minimum.

↪Démo

Théorème de caractérisation de la borne supérieure avec des epsilon :

Soit M un réel et A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. $M = supA$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A\ /\ M - \varepsilon < a_\varepsilon. \end{cases}$

Soit m un réel et A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. $m = infA$ **si et ssi** $\begin{cases} \forall a \in A, a \geq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists a_\varepsilon \in A\ /\ m + \varepsilon > a_\varepsilon. \end{cases}$

↪Démo

<u>Théorème :</u> Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $M = \sup(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} M \text{ majore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } M. \end{cases}$

Soit $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. $m = \inf(A)$ <u>sietssi</u> $\begin{cases} m \text{ minore } A \text{ et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ de limite } m. \end{cases}$

↪Démo

Exercices :

1) Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc A est bornée, 0 est un minorant de A et 1 est un majorant de A . De plus, $0 = 1 - \frac{1}{1} \in A$. Donc $0 = \min(A)$.
Enfin, la suite $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers 1. J'en déduis que $1 = \sup(A)$. Comme $1 \notin A$, A n'a pas de maximum.

2) Déterminons les bornes sup *et* inf *de* $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{p+n} / (p, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$.

A est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ *et* $0 < \frac{1}{p+n} \leq \frac{1}{2}$ donc, $-1 < (-1)^n + \frac{1}{p+n} \leq \frac{3}{2}$. Donc A est bornée. Ainsi, A admet une bornée sup. et une borne inf. finies.
(-1) minore A . Posons $v_n = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{n+(2n+1)}$. Alors (v_n) est une suite d'éléments de A telle que : $\lim_{n \to +\infty} v_n = -1$. Donc, le théorème de caractérisation séquentielle de la borne sup permet d'affirmer que $\inf(A) = -1$.
Si n impair alors $(-1)^n + \frac{1}{p+n} = -1 + \frac{1}{p+n} < 0$. Si n pair alors n ≥ 2 donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{p+2} \geq (-1)^n + \frac{1}{p+n} > 0$. Donc, $\frac{4}{3}$ majore A et $\frac{4}{3} = (-1)^2 + \frac{1}{1+2} \in A$. Ainsi, $\sup(A) = \max(A) = \frac{4}{3}$.

3) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée et λ un réel non nul. On définit $\lambda A = \{\lambda a / a \in A\}$. Justifier que A et λA admettent des bornes supérieures et inférieures finies et trouver une relation entre leurs bornes sup et inf.

A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc $\sup(A)$ *et* $\inf(A)$ existent et sont finis et $\forall a \in A, \inf(A) \leq a \leq \sup(A)$.
Alors si $\lambda > 0$, $\forall a \in A, \lambda\inf(A) \leq \lambda a \leq \lambda \sup(A)$; *et* si $\lambda < 0$, $\forall a \in A, \lambda\inf(A) \geq \lambda a \geq \lambda \sup(A)$. Donc, λA est bornée. De plus, A étant non vide, A contient au moins un élément a_0, alors λa_0 est un élément de λA qui est donc non vide. J'en déduis que $\sup(\lambda A)$ *et* $\inf(\lambda A)$ existent et sont finies.
<u>Montrons</u> que $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup(A) & si\ \lambda > 0 \\ \lambda \inf(A) & si\ \lambda < 0 \end{cases}$ et $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup(A) & si\ \lambda < 0 \\ \lambda \inf(A) & si\ \lambda > 0 \end{cases}$.
<u>Supposons $\lambda < 0$.</u> Alors $\lambda \inf(A)$ majore λA et $\lambda \sup(A)$ minore λA. De plus, d'après la caractérisation séquentielle des bornes, il existe une suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n, \begin{cases} u_n \in A \\ v_n \in A \end{cases}$ *et* $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} u_n = \sup(A) \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = \inf(A) \end{cases}$. Alors, $\forall n, \begin{cases} \lambda u_n \in \lambda A \\ \lambda v_n \in \lambda A \end{cases}$ *et* $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda\sup(A) \\ \lim_{n \to +\infty} \lambda v_n = \lambda \inf(A) \end{cases}$. Donc, (λu_n) et (λv_n) sont deux suites d'éléments de λA qui tendent vers $\lambda\sup(A)$ *et* $\lambda\inf(A)$.Alors, la caractérisation séquentielle des bornes permet de conclure que $\lambda \inf(A) = sup(\lambda A)$ *et* $\lambda \sup(A) = inf(\lambda A)$.
De même on montre le cas $\lambda < 0$.

4) Soit $A = \left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / (x, y) \in [0,1]^2\right\}$. Déterminer $\sup(A)$ *et* $\inf(A)$.

Tout d'abord, A est non vide car $0 = \frac{0+2\times 0}{0+0+1} \in A$.

De plus, $\forall (x,y) \in [0,1]^2, 0 < 1 \leq x+y+1 \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+y+1} \leq 1$ *et* $0 \leq x+2y \leq 3$ et par suite, $0 \leq \frac{x+2y}{x+y+1} \leq 3$. J'en déduis que A est bornée.
J'en conclus que $Sup(A)$ et $\inf(A)$ existent et sont finis. De plus, 0 minore A et $0 \in A$. Donc $0 = \min(A) = \inf(A)$.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $f_x : (y \mapsto \frac{x+2y}{x+y+1})$. f_x est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall y \in [0,1], f_x'(y) = \frac{2(x+y+1)-(x+2y)}{(x+y+1)^2} = \frac{x+2}{(x+y+1)^2} > 0$. Donc f_x est strictement croissante sur $[0,1]$. Alors $f_x(1) = max_{[0,1]} f_x$; autrement dit, $\forall x \in [0,1]$, $f_x(1) = \frac{x+2}{x+2} = 1 = max_{[0,1]} f_x = max\left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / y \in [0,1]\right\}$. J'en déduis que 1 mjore A et $1 \in A$. J'en conclus que $1 = maxA = max\left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / x \in [0,1] \text{ et } y \in [0,1]\right\}$.

IV. Autres propriétés essentielles.

5. ****OPERATION SUR LES LIMITES** :
- Le produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée est une suite de limite nulle.
- Soit u et v deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = L'$. Alors,

✓ $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$.
✓ pour tout scalaire $\boldsymbol{\lambda}$ non nul , $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda L$
✓ si $L + L'$ n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = L + L'$.
✓ si LL' n'est pas une FI alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = LL'$.
✓ si L/L' n'est pas une FI et v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = L/L'$.
✓ si $L' = 0$ et $v_n > 0$ $(resp < 0)$ à partir d'un certain rang $(v_n\ réel)$ alors $\lim_{n\to+\infty} 1/v_n = +\infty\ (resp\ .-\infty\ )$

6. **LIMITE D'UNE SUITE MONOTONE** : Toute suite réelle monotone a toujours une limite. Une suite réelle u croissante a une limite qui est $sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$, cette limite est finie si u est majorée et vaut $+\infty$ sinon. Une suite u décroissante a toujours une limite $inf\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ qui est finie si u minorée et vaut $-\infty$ sinon.

7. **COMPOSITION** : Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que à partir d'un certain rang, $f(u_n)$ *existe*.

✓ Si $\lim_{t\to L} f(t) = m$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ *et* alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = m$.
✓ Si $f(t) \sim_{t\to L} g(t)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ *et* alors $f(u_n) \sim_{n\to+\infty} g(u_n)$.
✓ Si $f(t) = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k + o_0(t^p)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* alors $f(u_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (u_n)^k + (u_n)^p \underbrace{o_{+\infty}(1)}_{\substack{une\ suite\\ de\ limite\\ nulle}}$.

NB :
1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |L|$. La réciproque est fausse pour $L \neq 0$. (pour $L = 0$, on retrouve $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - L| = 0$)
2. $\forall n, {u_n}^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}$. Ces suites donnent les FI : $1^{+\infty}, 0^0, +\infty^0$ ... pour lever ces indéterminées, il faut étudier $h_n = v_n \ln(u_n)$.

NB : dès que vous savez que votre suite u une limite, donnez un nom à cette limite. Pour trouver sa valeur, il suffit souvent de passer à la limite dans la relation (implicite ou récurrente) vérifiée par u.

Exemples :
1)Soient u et v deux suites réelles convergentes. On note $M_n = \max(u_n, v_n)$ *et* $m_n = \min(u_n, v_n)$. Justifier que : (M_n) *et* (m_n) sont convergentes et exprimer leur limite en fonction de celles de u et de v.
Notons L le limite de u et L' celle de v.
$\forall n, \max(u_n, v_n) = \frac{u_n+v_n+|u_n-v_n|}{2}$ *et* $\min(u_n, v_n) = \frac{u_n+v_n-|u_n-v_n|}{2}$. D'après le théorème d'opérations sur les limites, comme $\frac{L+L'+|L-L'|}{2}$ et $\frac{L+L'-|L-L'|}{2}$ ne sont pas des formes indéterminées, (M_n) *et* (m_n) sont convergentes et $\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{L+L'+|L-L'|}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} m_n = \frac{L+L'-|L-L'|}{2}$.
2)Soit u une suite définie par : $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n$. Montrer que u est monotone à partir d'un certain rang et qu'elle diverge.
On montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$: $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ *et* $\forall n, (u_{n+1} > 0, u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+2} = nu_{n+1} + 2u_n > 0)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+2} - u_{n+1} = \underbrace{(n-1)}_{\geq 0} \underbrace{u_{n+1}}_{>0} + \underbrace{2u_n}_{>0} > 0$. Donc, la suite u est strictement croissante à partir du 1. J'en déduis que la suite u admet une limite notée L telle que $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$. Alors $L = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+2}$.
Imaginons un instant $L \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n} u_n$. Donc $0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} u_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + \frac{2}{n} u_n = L + 0$. Donc $L = 0$ ce qui est impossible. Ainsi, $L = +\infty$.

Théorème de Césaro (SAVOIR REFAIRE et connaitre le résultat) : Soit u une suite réelle , L un réel et v la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.
a. ** Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = L$. Démo.
b. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Démo.

a. •Je suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall n, |v_n| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)\right| = \overset{1ère\ I.T}{\leqq} \sum_{k=0}^{n-1}|u_k|$. $(**)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2} = (n-n_0)\frac{\varepsilon}{2} \leq n\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, Donc $\forall n \geq n_0+1 > 0$, $\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k| + \sum_{k=n_0}^{n-1}|u_k| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k| + n\frac{\varepsilon}{2}$. Et, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| \leq \left(\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|}_{noté\ \alpha}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|$ est indépendant de n , est donc une constante. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha = 0$. Donc, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, \left|\frac{1}{n}\alpha\right| = \frac{1}{n}\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Alors $\forall n \geq N, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc d'après l'inégalité (**),je peux affirmer que $\forall n \geq N$, $|v_n| \leq \varepsilon$ J'en conclus que la suite (v_n) converge vers 0.

••Je suppose ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L. \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Posons $a_n = u_n - L$ et $b_n = v_n - L$.

Alors d'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. D'autre part, $b_n = v_n - L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) - L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}u_k\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}L = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(u_k - L)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\right)$.

Donc, d'après ce qui précède, je peux affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

b) Je suppose ici que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, u_n \geq 2A$. Donc $\forall n \geq n_0+1, \sum_{k=n_0}^{n-1}u_n \geq \sum_{k=n_0}^{n-1}2A = (n-n_0)2A$.

Et $\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}u_n \geq \frac{(n-n_0)}{n}2A$. Alors, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}u_k \geq \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}u_k}_{=\alpha} + \frac{1}{n}(n-n_0)2A$.

Comme $\frac{1}{n}(n-n_0) \sim_{+\infty} 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(n-n_0) = 1$ et par conséquent, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1, \frac{1}{n}(n-n_0) \geq \frac{3}{4}$ et par suite, $\frac{1}{n}(n-n_0)2A \geq \frac{3}{2}A$.

De plus, $\alpha = \sum_{k=0}^{n_0-1}|u_k|$ est indépendant de n , est donc une constante. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha = 0$. Donc, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ / $\forall n \geq n_2, \left|\frac{1}{n}\alpha\right| \leq \frac{A}{2}$ donc $\frac{1}{n}\alpha > -\frac{A}{2}$. Posons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$. Alors $\forall n \geq N, v_n \geq -\frac{A}{2} + \frac{3}{2}A = A$. J'en conclus que la suite (v_n) diverge et tend vers $+\infty$.

PASSAGE A LA LIMITE DANS UNE INEGALITE : Si deux suites (réelles) u et v ont chacune une limite notée respectivement L et L' et qu' $à$ $partir$ $d'un$ $certain$ $rang, u_n \leq v_n$ alors $L \leq L'$.
Par contraposée, Si deux suites (réelles) u et v ont chacune une limite notée respectivement L et L' telles que $L > L'$ alors à partir d'un certain rang, $u_n > v_n$.

Démo

MISES EN GARDE :
il ne faut pas confondre cette propriété et le théorème des gendarmes. Le théorème des gendarmes permet de prouver (sous hypothèse) qu'une suite converge (et de déterminer cette limite). La passage à la limite dans une inégalité permet de comparer des limites de suites dont on connait l'existence des limites.

Exemples : Soit u une suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
a. Montrer que u admet une limite.
b. Montrer que $\forall n, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite u.

$\forall n > 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$. La suite u est donc croissante et par suite admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$\forall n > 0$, $u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Imaginons un instant que $L \in \mathbb{R}$. Comme (u_{2n}) est extraite de u, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_{2n} \underbrace{=}_{\substack{pas\ de\ FI\\ car\ L\ est\ réel}} L - L = 0$. Alors en passant à la limite dans l'inégalité $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$, j'aboutis à l'absurdité $0 \geq \frac{1}{2}$. j'en conclus que L ne peut pas être réel et ainsi, $L = +\infty$.

V. Comparaison des suites

Comparer au sens (négligeable , dominée ou équivalent) deux suites , tout comme chercher la limite d'une suite, n'a de sens que pour $n \to +\infty$. On ne précise donc pas toujours que $n \to +\infty$.

1. Définitions

Définition Soit u et v deux suites réelles.
1. On dit que u est négligeable devant v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite $\mathcal{E}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times \varepsilon_n$. On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$ ou $u_n \ll_{+\infty} v_n$.
2. On dit que u est équivalente à v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite φ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n = 1$ et à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times \varphi_n$. On note alors $u_n \sim_{+\infty} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.
3. On dit que u est dominée par v (au voisinage de $+\infty$) lorsqu'il existe une suite b telle que : à partir d'un certain rang ,$u_n = v_n \times b_n$ et b est bornée , c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel M tel que $\forall n, |u_n| \leq M|v_n|$. On note $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ ou $u = O(v)$.

Exemple : $u_n = ln(n^2 - n + sin(n)) = 2ln(n)\left(1 + \frac{1}{2ln(n)}ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{sin(n)}{n^2}\right)\right) \sim_{+\infty} 2ln(n)$.

Caractérisation : si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors :
1. $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$.

2. $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. *ATTENTION :* $u_n \sim v_n \not\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

3. $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est bornée.*

Exemples : 1) Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$. Montrer par encadrement que : $u_n \sim_{+\infty} n!$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$, $\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$.

Or, $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $0 \le \frac{k!}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$. Donc, $0 \le \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \le \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$. Il en découle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$. J'en conclus que $u_n \sim_{+\infty} 1$.

2)Soit u la suite définie par $\forall n, u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \, si\ n\ pair \\ -\frac{2}{n^2}\ si\ n\ impair \end{cases}$. Montrons que $u_{n+1}\ et\ u_n$ ne sont pas équivalentes. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Posons $t_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{-2n}{(n+1)^2} si\ n\ pair \\ \frac{-n^2}{2(n+1)}\ si\ n\ impair \end{cases}$. Alors, $t_{2n} = \frac{-4n}{(2n+1)^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$ et $t_{2n+1} = \frac{-(2n+1)^2}{2(2n+2)} \sim_{+\infty} -n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n} = 0$,

Comme $(t_{2n})\ et\ (t_{2n+1})$ ont des limites différentes, la suite (t_n) n'a pas de limite. Ainsi, les suites $(u_{n+1})\ et\ (u_n)$ ne sont pas équivalentes.

Par contre, $\forall n, u_{2n} = \frac{1}{2n}\ et\ u_{2n+1} = \frac{-2}{(2n+1)^2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Et par conséquent, toute suite extraite de u tend aussi vers 0 . Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemples de référence et autres écritures.

1. $u_n = o(0) \Leftrightarrow u_n = O(0) \Leftrightarrow u_n \sim 0 \Leftrightarrow \grave{a}\ partir\ d'un certain\ rang, u_n = 0$.

CELA N'ARRIVE QUASIMENT JAMAIS …. Donc ***vous ne devez jamais écrire à $u_n \sim 0$***.

2. $o(1)$ désigne une suite de limite nulle *et* $O(1)$ désigne une suite bornée .

3. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ et on dit que u et v sont équivalentes.

4. $\boldsymbol{o(u_n) = u_n o(1)}$.

5. $\boldsymbol{v_n \sim u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + o(u_n)}$ **Donc,** $\boldsymbol{u_n + o(u_n) \sim u_n}$

2. Comparaison de suites de référence

Prop : Soit u une suite réelle, strictement positive et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$

Montrer que si $L \in]0,1[$ alors $u_n = O\left(\left(\frac{L+1}{2}\right)^n\right)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Montrer que si $L \in]1,+\infty[$ alors $\left(\frac{L+1}{2}\right)^n = O(u_n)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démo

Exercice : redémontrer la propriété précédente en remplaçant la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L\ par\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

Théorème: Pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et tout $a \in]1,+\infty[$,

$$(\ln(n))^\beta \ll_{+\infty} (n^\alpha)) \ll_{+\infty} n^\alpha \ll_{+\infty} \underbrace{a^n}_{\substack{=e^{\ln(a)n} \\ =e^{\gamma n} \\ avec\ \gamma>0}} \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$$

Démo

3. Propriétés

Autre écriture d'une fonction négligeable : $\boldsymbol{o(u_n) = u_n o(1)}$

Autre écriture d'un équivalent : $\boldsymbol{u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n) = v_n(1 + o(1))}$

Théorème : équivalent et limite /signe

- Si $u_n \sim v_n$ alors à partir d'un certain rang, $u_n\ et\ v_n$ ont le même signe strict.
- Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ $(L\ finie\ ou\ inifinie)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ tel que L réel non nul alors $u_n \sim L$.

Théorème de comparaison et d'OPERATIONS : Remplacer , dans la version « fonction », $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{u_n}$, $\boldsymbol{g\ par\ v_n, h\ par\ w_n\ et\ a\ par\ +\infty}$ (sauf pour la composition à droite !!! car on ne compose pas les suites).

- Soit u , v, w, $A\ et\ B$ des suites.
- $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n) \Longrightarrow$ ………..
- $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n) \Longrightarrow$ ………… En particulier, $u_n = o(v_n)$ et $(v_n \sim w_n\ ou\ v_n = o(w_n)) \Longrightarrow$ ………..
- $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Longrightarrow$ ………… En particulier, $(u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n))$ et $v_n = o(w_n) \Longrightarrow$ ………..
- $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ $\Longrightarrow$ ………..
- $u_n \sim v_n$ et $A_n \sim B_n$ $\Longrightarrow$ ………..

- $u_n \sim v_n$ et $A_n \sim B_n$ et à partir d'un certain rang, $A_n \neq 0 \Longrightarrow$ ....
- $u_n \sim v_n$ et à partir d'un certain rang, $(u_n)^\alpha$existe $\Longrightarrow$ ....
- Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \sim_{+\infty} g(u_n)$.
- Si f admet le $DL_p(0)$ suivant : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + +a_p x^p + o_{x\to 0}(x^p)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors

$\forall n$ *assez grand*, $f(u_n) = a_0 + a_1 u_n + a_2 {u_n}^2 + \cdots + +a_p {u_n}^p + o_{n\to+\infty}({u_n}^p)$. (c'est un développement asymptotique de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$)

Dans la recherche d'équivalent : Produit , quotient , puissance indépendante de n , composition à droite sont **autorisés**

Dans la recherche d'équivalent :

il est **interdit** de sommer $u_n \sim v_n \quad \not\Rightarrow u_n + w_n \sim v_n + w_n$

ni de mettre à une puissance qui « bouge » : $u_n \sim v_n \not\Rightarrow {u_n}^{w_n} \sim {v_n}^{w_n}$

<u>Exemples</u> : 1) Equivalent simple de $e^{\frac{\sin(n)}{n}} - 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$; donc, $e^{\frac{\sin(n)}{n}} - 1 \sim \frac{\sin(n)}{n}$. Je ne peux pas aller plus loin !

2) Equivalent simple de $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Donc, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; Donc, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. Ainsi, $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$.

3) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$.

$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n = e^{n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right]}$. Comme $\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} \sim_{+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = 1$. De plus, $\ln(X) \sim_1 (X-1)$ donc par composition à droite, $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) \sim_{+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1\right) = \frac{2n}{n^2-n+1} \sim_{+\infty} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Donc, $n\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) \sim_{+\infty} 2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right) = 2$. Et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n = e^2$.

4) Trouver un équivalent simple de $t_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n - 1$.

$\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^n = e^{n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right]}$.

Et $h_n = n\ln\left[\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right] = n[\ln[n^2+n+1] - \ln[n^2+n-1]] = n\left\{\ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] - \ln\left[n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right]\right\}$

$h_n = n\left\{2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right\} = n\left\{\ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}_{=u_n}\right) - \ln\left(1+\left(\underbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}_{=v_n}\right)\right)\right\}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ *tq* $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$,

$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{{u_n}^2}{2} + u_n^2\varepsilon(u_n)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(u_n) = 0$ et $\ln(1+v_n) = v_n - \frac{{v_n}^2}{2} + v_n^2\varepsilon(v_n)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(v_n) = 0$.

De plus, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $u_n^2 = \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $v_n^2 = \frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc, $h_n = n\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc, Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$ et $e^t = 1 + t + o_0(t)$, $e^{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. *Et ainsi,* $t_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}$.

5) Soit $a \in [0,1]$ et u la suite définie par : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$. Montrer que u tend vers 1 et $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

Tout d'abord , on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,2]$. En effet, $(init)$ $u_0 = a \in [0,1]$ *et* $u_1 = 1 + a \in [1,2]$. $(Propag)$ *Fixons* $n \in \mathbb{N}^*$; alors , $u_n \in [0,2] \Longrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1} \in \left[1, 1+\frac{2}{n+1}\right] \underset{car\, n\geq 1}{\subseteq} [1,2]$. Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure.

La suite u est donc bornée ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ ce qui signifie aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = 1$ i.e. $u_{n-1} \sim_{+\infty} 1$. Et par conséquent, $\frac{u_{n-1}}{n} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et ainsi, $u_n - 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

6) Déterminons un équivalent simple de $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1$.

Soit $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \neq 0$. Donc, $f(x) - f(0) \sim_0 2(x-0)$ i.e. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 1 \sim_0 2x$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - 1 \sim_0 \frac{2}{n}$.

VI. <u>**Suites de nombres complexes ou suites complexes.</u>

****Def :** La suite complexe (u_n) tend vers le nombre complexe L quand $n \to +\infty$ lorsque :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon)$.On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

NB : Une suite complexe n'a pas de limite infinie.

****Prop :** u_n tend vers le complexe L qd $n \to +\infty$ **sietssi** $\lim\limits_{n\to+\infty} Re(u_n) = Re(L)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} Im(u_n) = Im(L)$. **Démo.**

****Prop :** Toutes les définitions ou propriétés étoilées (**) sont valables pour des suites complexes. Toutes les propriétés nécessitant la monotonie ou caractère majoré ou minorée d'une suite réelle ne sont pas valables pour les suites complexes.

****SAVOIR REFAIRE** Soit u une suite complexe, L un complexe et M un réel tel que $M \in [0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - L| \leq M|u_n - L|$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Démo : On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - L| \leq \underbrace{M^n|u_0 - L|}_{\varepsilon_n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, le cours assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

VII. Suites extraites

****Def :** (v_n) est une suite extraite de la suite (u_n) lorsqu' il existe une application strictement croissante $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que : $\forall n, v_n = u_{\varphi(n)}$

NB : Nécessairement, une telle fonction φ vérifie : $\varphi(n) \geq n$.

Exemples: les suites $(u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2})$ sont extraites de (u_n).

****Théo :** Si la suite (u_n) tend vers L alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers L.

Démo.

Exemple : Etudier la convergence de $u_n = 2^n + (-2)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

$u_{2n} = 2^{2n} + (-2)^{2n} \sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 4^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$u_{4n+1} = 2^{4n+1} + (-2)^{4n+1} \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 16^n - 2 \times 16^n = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme deux suites extraites de u n'ont pas la même limite, u n'a pas de limite.

La réciproque est vraie d'après le théorème suivant :

****Théo:** $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L)$ *si etssi* $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = L)$.

Démo

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ *si etssi* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n+2}$.

Exemples : 1) Montrer que si u est croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit u une suite réelle croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$. Alors comme u est croissante, lors $\forall n, u_{2n} \leq u_{2n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$. Donc le théorème des gendarmes assurent que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$. Les suites extraites (u_{2n+1}) *et* (u_{2n}) ayant la même limite, u tend aussi vers cette limite commune i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Montrer que si $(u_{2n}), (u_{3n})$ *et* (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.

Soit u une suite telle que : $(u_{2n}), (u_{3n})$ *et* (u_{2n+1}) convergent.

Notons L_1 la limite de $(u_{2n}), L_2$ la limite de (u_{3n}) *et* L_3 la limite de (u_{2n+1}).

La suite (u_{6n}) étant extraite à la fois de (u_{2n}) mais aussi de (u_{3n}) tend à la fois vers L_1 et vers L_2. Par unicité de la limite d'une suite, $L_1 = L_2$.

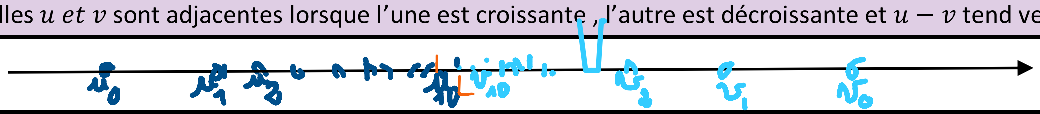
La suite (u_{6n+3}) étant extraite à la fois de (u_{2n+1}) mais aussi de (u_{3n}) tend à la fois vers L_3 et vers L_2. Par unicité de la limite d'une suite, $L_3 = L_2$.

J'en déduis que $L_1 = L_2$. Les suites extraites (u_{2n+1})*et* (u_{2n}) ayant la même limite finie, u converge aussi vers cette limite commune i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_1 = L_2 = L_3$.

VIII. Suites adjacentes

Déf.: Deux suites réelles u *et* v sont adjacentes lorsque l'une est croissante , l'autre est décroissante et $u - v$ tend vers 0 .

Représentation :



Théorème :

1. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.
2. Si u *et* v sont adjacentes de même limite L telle que u croissante et v décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n - L \leq v_n - u_n$ et $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \cdots \leq L \leq \cdots v_{p+1} \leq v_p \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$.

Démo

Exemples 1) Soit $\forall n, u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que u et v sont adjacentes .

$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ *et* $v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = u_n - \frac{1}{n} \leq u_n$. Donc, $v_n - u_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $\forall n, v_n \leq 0$, montrons que u décroît et v croit.

$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+(k+1)} = \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{n+j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = v_n + \left(\underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{\substack{\geq 0\ car \\ 2n+1 \leq 2n+2}}\right) \geq v_n$. Donc v est croissante.

$u_{n+1} - u_n = \left(v_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(v_n + \frac{1}{n}\right) = v_{n+1} - v_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{2(n+1)n + (2n+1)n - (2n+1)(2n+2)}{2(2n+1)n(n+1)} = \frac{-2}{2(2n+1)n(n+1)} < 0$. Donc u est décroissante.

J'en conclus que u et v sont adjacentes.

1) Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$.

a) Montrer que u *et* v sont adjacentes .

b) Donner une valeur approchée de la limite commune à 10^{-1} *près* par défaut.

c) Trouver un équivalent simple de $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) $\forall n\in\mathbb{N}, v_n-u_n=2\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $donc\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n-u_n=0. De\ plus\ \forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq v_n$. Montrons que u décroit et v croit. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$u_{n+1}-u_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0$.

$$v_{n+1}-v_n=\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+2}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+2\sqrt{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}>0.$$

Donc, u décroit et v croit. Je peux donc conclure que u et v sont adjacentes et convergent donc vers une même limite finie notée L.

b) $\forall n\in\mathbb{N}, v_n\leq L\leq u_n$. Donc , $0\leq L-v_n\leq u_n-v_n=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc v_n *est* une valeur approchée de L à 10^{-1} près par défaut dès que n vérifie $\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 10^{-1}$. Or, $\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 10^{-1}\Leftrightarrow\sqrt{n}\geq 10\Leftrightarrow n\geq 100$. Ainsi, v_{100} *est* une valeur approchée de L à 10^{-1} *près* par défaut. On calcule v_{100} très facilement avec le programme en python ci-dessous :

```python
from math import*
s=0
for i in range (1,101):
  s=s+(1/sqrt(i))
print(s-2*sqrt(101))
```

Réponse : -1.51 .

c) $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}=u_n=L+o_0(1)$. Donc, $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=2\sqrt{n}+L+o_{+\infty}(1)\ \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car\\ \lim\limits_{n\to+\infty} L+o_{+\infty}(1)=L\\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}=+\infty}}\ 2\sqrt{n}$.

3. Soit $\forall n, S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln(n)$.

a) Montrer par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$. (on pourra montrer que$\forall k\geq 1, \frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$)

b) Montrer en utilisant les suites u et v qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que : $S_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$.

c) Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} *près*.

d) Calculer la limite de $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}$.

a) Soit $k\in\mathbb{N}^*. \forall x\in[k,k+1], \frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{k}$. Donc, $\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$ i.e. $\frac{1}{k+1}\leq[\ln(x)]_k^{k+1}\leq\frac{1}{k}$.

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{N}^*\ \frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!], \frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln(k)\leq\frac{1}{k}$ donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leq\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln(k)]\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Donc,

$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\leq\ln(n+1)-\ln(1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ i.e. $S_n-1+\frac{1}{n+1}\leq\ln(n+1)\leq S_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$.

b) Montrons que u et v sont adjacentes : $\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n\leq u_n$. Donc prouvons que u est décroissante et v est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

$u_n-v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln(n)\ \right]=\frac{1}{n}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\ \right]$

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \overset{\forall x\geq 0, \ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}}{\leq}\ \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}=\frac{1-n}{2n^2(n+1)}\leq 0$. Donc, (u_n) est décroissante.

$v_{n+1}-v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln(n)\ \right]=\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n)=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \overset{\forall x>0, \ln(1+x)\leq x}{\geq}\ 0$. Donc, (v_n) est croissante. J'en déduis que u et v sont adjacentes. Par conséquent, u et v sont convergentes vers une limite commune γ.

Alors, $u_n=\gamma+o_{+\infty}(1)$ i.e. $S_n-\ln(n)=\gamma+o_{+\infty}(1)$. Et ainsi, $S_n=\ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1)$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\leq\gamma\leq u_n$ donc $0\leq\gamma-v_n\leq u_n-v_n=\frac{1}{n}$. Ainsi, $\gamma-v_n\leq 10^{-2}$ dès que $\frac{1}{n}\leq 10^{-2}$. Or, $\frac{1}{n}\leq 10^{-2}\Leftrightarrow n\geq 100$.

Donc, v_{100} est une valeur approchée de γ par défaut à 10^{-2}près. Calculons numériquement v_{100}:

```python
from math import*
v=1
for i in range(2,100):
  v=v+1/i
v=v-log(100)
print(v)
```

```
0.572207331651529
```

d) $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}-\frac{2}{(2k+1)}+\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)}=S_n-2\left(S_{2n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-1\right)$

$T_n=S_n+2-2\left(S_{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=S_n+2-2\left(S_{2n+1}-\frac{1}{2}S_n\right)=2+2(S_n-S_{2n+1})$

$T_n=2+2(\ln(n)+\gamma+\varepsilon_n-\ln(2n+1)-\gamma-\varepsilon_{2n+1})=2-2\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)+2(\varepsilon_n-\varepsilon_{2n+1})$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{2n+1}=0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=2-2\ln(2)$.

Vérifions numériquement ce résultat :

```python
from math import*
v=0
for i in range(1,100000):
  v=v+1/(i*(2*i+1))
v=v-2+2*log(2)
print(v)
```

```
-5.000012503586504e-06
```

tout petit !

OK !

<u>Théo</u> . Soit x un réel. $\forall n\in\mathbb{N}$, on pose : $u_n=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor\ et\ v_n=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor+10^{-n}$.

Alors, $\forall n, x-10^{-n}\leq u_n\leq x<v_n\leq x+10^{-n}$.

Les suites $u\ et\ v$ sont adjacentes de limite commune x .

u_n est appelée la valeur décimale approchée de $x\ à\ 10^{-n}$près par défaut.

Démo : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n - u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. *Comme* $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. *De plus* $\forall n\in\mathbb{N}, u_n \le v_n$. Montrons que u croit et v décroit.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = 10^{-(n+1)}\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor = 10^{-(n+1)}\left(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor\right)$.
Or, $\lfloor 10^n x\rfloor \le 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$ donc, $10\lfloor 10^n x\rfloor \le 10^{n+1}x < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$. L'entier $10\lfloor 10^n x\rfloor$ étant inférieur à $10^{n+1}x$, je peux affirmer que $10\lfloor 10^n x\rfloor \le \lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor$ puisque $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$. J'en déduis que $u_{n+1} - u_n \ge 0$. Ainsi, u croit.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = 10^{-(n+1)}\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 10^{-(n+1)} - 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor - 10^{-n} = 10^{-(n+1)}\left(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1 - 10\lfloor 10^n x\rfloor - 10\right) = 10^{-(n+1)}\left(\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor - 10\lfloor 10^n x\rfloor - 9\right)$.
Or, $10\lfloor 10^n x\rfloor \le 10^{n+1}x < 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$. L'entier $10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$ étant strictement supérieur à $10^{n+1}x$, je peux affirmer que $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1 \le 10\lfloor 10^n x\rfloor + 10$ puisque $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor + 1$ est le plus petit strictement supérieur à $10^{n+1}x$.
J'en déduis que $\lfloor 10^{(n+1)}x\rfloor \le 10\lfloor 10^n x\rfloor + 9$ et par suite que $v_{n+1} - v_n \le 0$. Ainsi, v décroit.
Je peux donc conclure que u et v sont adjacentes et convergent donc vers une même limite finie notée L.
Montrons que $L = x$: :
$\forall n\in\mathbb{N}, \lfloor 10^n x\rfloor \le 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \le x < 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor + 10^{-n}$ i.e. $u_n \le x < v_n$.
Les trois suites de cette inégalité ayant une limite, je peux passer à la limite dans cette inégalité et j'obtiens : $L \le x \le L$. Ainsi, $L = x$.

Attention, quand on passe à la limite dans une inégalité, l'inégalité stricte entre les suites devient large sur les limites (le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes)

Conséquence . Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et d'une suite de nombres irrationnels.

Démo

Théorème des segments emboîtés: Soit (I_n)une suite de segments telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+1}\subset I_n$ et la longueur de I_n tend vers 0. Alors il existe un unique point commun à tous les I_n.

Démo

IX. Suites explicites

Def : Une suite u est dite explicite lorsqu'on connait le terme général u_n en fonction de n i.e. on connait une expression de u_n.

Exemples : $u_n = (-1)^n n!$ ou $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)$

Parmi ces suites, on trouve les suites de la forme $u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Prop : Soit L un réel ou un infini et u telle que : $\forall n, u_n = f(n)$ où f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Si $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ alors $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
- Si f est monotone alors u est monotone de même monotonie que f.
- Si f est bornée alors u est bornée.

NB : pour l'étude de ces suites $u_n = f(n)$, on pourra donc étudier f. Lorsque vous définissez f , indiquer clairement que sa variable est réelle en l'appelant x et non n , de façon à être autoriser à dériver f.

Exemple : Soit $A = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n / n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $supA$ et $infA$.

Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\forall x\in[1,+\infty[, f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{par\ def°}{=} e^{xln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ et $h(x) = xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x\in[1,+\infty[, h'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{1+x}\right)$.Or, $\forall t\ge 0, \ln(1+t) \ge t - \frac{t^2}{2}$. Donc, $\forall x\in[1,+\infty[, h'(x) \ge \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{2x^2(x+1)} > 0$. Par conséquent, h est strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ donc $f = exp\circ h$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ (comme composée de fonctions strictement croissantes). J'en déduis que la suite u est aussi strictement croissante. Il en découle que $\inf(A) = \min(A) = u_1 = \frac{3}{2}$, $\sup(A) = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et enfin A n'a pas de maximum. Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$:
$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{car\ 1+\frac{1}{n}>0}{=} e^{nln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$. Or, $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$donc par composition, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$. Ainsi, $\sup(A) = \lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

X. Suites récurrentes

Def : Une suite u est dite récurrente lorsqu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que u vérifie une relation qui exprime u_{n+p} en fonction de $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}$. Une telle suite est dite récurrente d'ordre p.
Dans ce cas, pour déterminer les valeurs de tous les termes u_n, il faut et il suffit de connaitre les valeurs de $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.

NB : Une suite est récurrente d'ordre p et entièrement définie par la relation de récurrence et les valeurs de ses p premiers termes

Ex : Soit u la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+3} - n^2u_{n+1} + ln(n)u_n = \sqrt{n}$ et $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -1$. Calculons u_4 *et* u_5.
Déterminons une autre suite vérifiant la même relation de récurrence .

Parmi ces suites récurrentes, on retrouve les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, périodiques, récurrentes d'ordre 1 de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$… Cf ci-dessous !

XI. Suites arithmétiques , géométriques – arithmético-géométriques (Rappel)

Def : (u_n) est une suite arithmétique lorsqu' il existe un réel ou complexe b tel que :$\forall n\in\mathbb{N}$, $\underbrace{u_{n+1} = u_n + b}_{relation\ de\ récurrence}$. b est sa raison .

Prop : *Soit* (u_n) est une suite arithmétique de raison b . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{u_n = u_0 + nb}_{expression\ explicite}$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} -\infty \text{ si } b \text{ réel et } b < 0 \\ u_0 \text{ si } b = 0 \\ +\infty \text{ si } b \text{ réel et } b > 0 \end{cases} \quad et \ \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} b$$

Def : (u_n) est une suite géométrique lorsqu'il existe un réel ou complexe a tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$. a est sa raison .

Prop : *Soit* (u_n) est une suite géométrique de raison a . Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ u_0 \text{ si } a = 1 \\ sgn(u_0)\infty \text{ si } a \text{ réel et } a > 1 \text{ et } u_0 \neq 0 \\ n'existe\ pas \text{ si } a \text{ réel et } a \leq -1 \end{cases} \quad et \ \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u_0 \text{ si } a \neq 1 \\ (n+1)u_0 \text{ si } a = 1 \end{cases}$$

Def : (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu' il existe deux réels ou cpxes a et b tel que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

<u>Méthode :</u> On cherche alors LE réel L tel que : $L = aL + b$ (i.e. la suite constante qui vérifie la même relation de récurrence) puis on montre que la suite $(u_n - L)$ est géométrique de raison a. On peut alors écrire que : $u_n - L = a^n(u_0 - L)$.

XII. <u>Suites récurrentes linéaires d'ordre 2</u>

Théo (admis pour l'instant) :

On cherche toutes les *suites* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ où a et b constantes.

Suite complexe : Soit a et b deux complexes fixés. Posons $(e.c)\ : r^2 + ar + c = 0$ *équation caractéristique*

Si $\Delta_{e.c} \neq 0$ $i.e.$ $(e.c)$ a deux solutions complexes distinctes r_1 *et* r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes complexes.

Si $\Delta_{e.c} = 0$ $i.e.$ $(e.c)$a une solution complexe double r_0 alors *les suites* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes complexes.

Suite réelle : Soit a et b deux réels fixés . Posons $(e.c): r^2 + ar + c = 0$.

Si $\Delta_{e.c} > 0$ $i.e.$ $(e.c)$a deux solutions réelles distinctes r_1 *et* r_2 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $(\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles.

Si $\Delta_{e.c} = 0$ $i.e.$ $(e.c)$a une solution réelle double r_0 alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha + \beta n)r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles.

Si $\Delta_{e.c} < 0$ $i.e.$ $(e.c)$a deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ *et* $\bar{r}$ alors les suites $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$ sont les suites de la forme $((\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que α *et* β deux constantes réelles.

Rque : les constantes α *et* β se déterminent grâce aux valeurs des deux premiers termes de la suite : h_0 *et* h_1.

Def : (u_n)est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants lorsqu' il existe deux réels a *et* b et une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$.

NB : Une telle suite est entièrement définie par la relation de récurrence et ses deux premiers termes .

Prop : *Soit* deux réels a *et* b et une suite v. On note E l'ensemble des suites u vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n$. S'il existe une suite t telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$ alors les suites éléments de E sont toutes les suites de la forme: $(t_n + h_n)$ où h est une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$.

Démo

<u>Méthode</u> pour étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{tq}$ $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = v_n}$.

1. **Limite :** si $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $L' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et $L + aL + bL$ n'est pas une FI alors $L + aL + bL = L'$.
2. **Expression explicite de $\boldsymbol{u}$:**
   a. Je cherche une suite t particulière vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} + at_{n+1} + bt_n = v_n$. Bien souvent t «ressemble» à v.
   b. J'applique le théorème précédent pour donner toutes les suites h vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+2} + ah_{n+1} + bh_n = 0$
   c. La suite u est alors de la forme : $u = h + t$. (Cf chapitre application linéaire § équations linéaires)

<u>Exemples</u>

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_0 = 1$ *et* $u_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n .
2. Trouver toutes les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = e^n + n$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_0 = 1$ *et* $u_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 4u_n = 0$. Déterminer u_n en fonction de n .

Posons $(e.c): r^2+2r+4=0$. Alors $\Delta_{(e.c)}=4-16=-12=i^2 2^2\sqrt{3}^2=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ et les solutions de $(e.c)$ sont $r_1=-1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $r_2=-1-i\sqrt{3}$. Donc, il existe deux constantes réelles α et β telles que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\left(\alpha\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\beta\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)2^n$. De plus, $u_0=1=\alpha$ et $u_1=1=\left(\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\beta\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)2=\left(-\frac{1}{2}+\beta\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2$. Donc $\alpha=1$ et $\beta=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)2^n$

La suite u est divergente car (u_{3n}) et (u_{3n+2}) tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

Trouver toutes les suites réelles vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=e^n+n$.

■Cherchons d'abord Trouver toutes les suites réelles (h_n) vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, h_{n+2}+2h_{n+1}+h_n=0$.

Posons $(e.c): r^2+2r+1=(r+1)^2=0$. Alors les suites (h_n) recherchées sont les suites $((\alpha+\beta n)(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■une suite v vérifiant : $(*)\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}+2v_{n+1}+v_n=e^n$. Cherchons cette suite de la forme $v_n=ae^n$ tq a cste réelle. Alors $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}+2v_{n+1}+v_n=ae^{n+2}+2ae^{n+1}+ae^n=(ae^2+2ae+a)e^n$. Donc pour que v vérifie $(*)$, il suffit de choisir a tel que $ae^2+2ae+a=1$. Donc, $a=\frac{1}{e^2+2e+1}=\frac{1}{(e+1)^2}$ convient.

■Cherchons une suite w vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n=n$. Cherchons cette suite de la forme $v_n=an+b$ tq a,b cstes réelles. Alors $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}+2v_{n+1}+v_n=a(n+2)+b+2a(n+1)+2b+an+b=4an+3a+4b$. Donc pour que v vérifie $(*)$, il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases}4a=1\\3a+4b=0\end{cases}$ Donc, $\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{3}{16}\end{cases}$ conviennent.

■CCL : les solutions de notre problème initial sont toutes les suites $\left((\alpha+\beta n)(-1)^n+\frac{e^n}{(e+1)^2}+\frac{1}{16}(4n-3)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall x>0, f\big(f(x)\big)=6x-f(x)$.

<u>Analyse</u> : supposons qu'il existe une fonction $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ telles que : $\forall x>0, f\big(f(x)\big)=6x-f(x)$.

Soit $x>0$ et $u_0=x$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$. On montre facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n>0$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}, f\big(f(u_n)\big)=6u_n-f(u_n)$ i.e. $u_{n+2}+u_{n+1}-6u_n=0$. Posons $(e.c): r^2+r-6=(r-2)(r+3)=0$. Donc, il existe deux constantes réelles α et β telles que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha 2^n+\beta(-3)^n$.

Montrons par l'absurde que $\beta=0$. Imaginons un instant que $\beta\neq 0$. Alors comme $|-3|>|2|$, $2^n=o_{=\infty}((-3)^n)$ et par conséquent, puisque $\beta\neq 0$, $u_n\sim_{+\infty}\beta(-3)^n$. Cela implique que u_n change sans cesse de signe quand $n\to+\infty$ puisque c'est le cas de son équivalent. Or c'est impossible puisque $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$. J'en déduis que $\beta=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha 2^n$. De plus, $\alpha=u_0=x$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=x2^n$. En particulier , $f(x)=u_1=x2^1=2x$.

CCL° de l'analyse : la seule candidate solution de notre problème est la fonction $(x\mapsto 2x)$.

<u>Synthèse</u> : Soit $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}\\x\mapsto 2x\end{pmatrix}$. Alors $\forall x>0, f\big(f(x)\big)=f(2x)=2(2x)=6x-2x=6x-f(x)$ OK! Donc f est solution et d'après l'analyse f est l'unique solution de notre problème.

Remarque : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{n\ fois}$ existe et est une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\underbrace{f\circ f\circ f\ldots\circ f}_{n\ fois}(x)$.

XIII. <u>Suites périodiques</u>

Def : (u_n) est une suite périodique lorsqu' il existe un entier naturel p non nul tel que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+p}=u_n$. p est une période de u.

NB : Une suite p –périodique est une suite de la forme $u=\left(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{p-1},\ldots\right)$ i.e. $u=a_0u^{(0)}+a_1u^{(1)}+a_2u^{(2)}+..+a_{p-1}u^{(p-1)}$ où $u^{(l)}=\left(u_n^{(l)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n^{(l)}=\begin{cases}1\ si\ n\equiv l[p]\\0\ si\ n\not\equiv l[p]\end{cases}$.

Ex : les suites 3-périodiques sont les suites de la forme $\forall n, u_n=\begin{cases}a\ si\ n\equiv 0[3]\\b\ si\ n\equiv 1[3]\\c\ si\ n\equiv 2[3]\end{cases}$ i.e. de la forme :

$u=(a,b,c,a,b,c,a,b,c,a,\ldots\ldots)=au^{(0)}+bu^{(1)}+bu^{(2)}$

où $\forall n,\quad u_n^{(0)}=\begin{cases}1\ si\ n\equiv 0[3]\\0\ si\ n\equiv 1[3]\\0\ si\ n\equiv 2[3]\end{cases}, u_n^{(1)}=\begin{cases}0\ si\ n\equiv 0[3]\\1\ si\ n\equiv 1[3]\\0\ si\ n\equiv 2[3]\end{cases}, u_n^{(2)}=\begin{cases}0\ si\ n\equiv 0[3]\\0\ si\ n\equiv 1[3]\\1\ si\ n\equiv 2[3]\end{cases}$.

Propriétés : *Toute* suite p –périodique prend au plus p valeurs distinctes, est bornée et ne tend jamais vers l'infini .
Une suite périodique est convergente sietssi elle est constante.

Démo

XIV. <u>Suites récurrentes vérifiant une relation de la forme : $u_{n+1}=f(u_n)$</u>

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur D . Soit u une suite réelle telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.
On dit que u est une suite récurrente associée à f .

Alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})$ ie. (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f\circ f$.

1) <u>Définition de u :</u> pour que u soit bien défini il faut et il suffit que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in D$.

Prop : Si $f(D)\subset D$ et $u_0\in D$ alors $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in D$ et u est bien définie .

Désormais, $f(D)\subset D$ et $u_0\in D$ donc u est bien définie .

<u>**Conséquence :**</u> Si D est bornée ou f est bornée (resp. majorée, minorée) sur D alors **u est bornée** (resp. majorée, minorée).

2) Limites possibles de u :

Prop : Si $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $L' = \lim_{x\to L} f(x)$ alors $L = L'$.
En particulier, Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ réel et f est continue en L alors $L = f(L)$ i.e. L est un point fixe de f.

Démo

Conséquence : Si f est continue sur D et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$ alors les limites possibles de u sont les points fixes de f dans D et les bords de D qui n'appartiennent pas à D.

3) Monotonie de u :

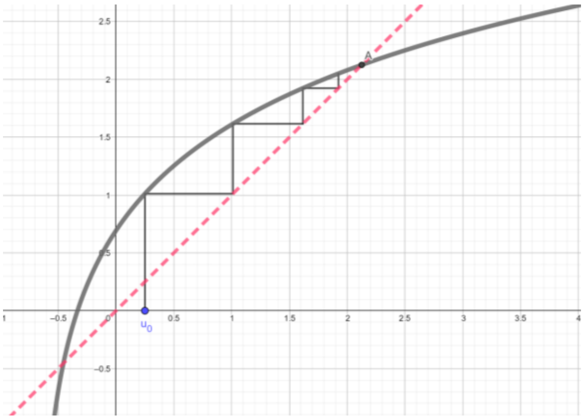
Prop : Si f est croissante alors u est monotone (croissante si $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \geq 0$ *et* décroissante si $u_1 - u_0 \leq 0$ et lorsque u_0 n'est pas connu , on étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$ en fonction de x pour connaître le sens de monotonie suivant la valeur de u_0.

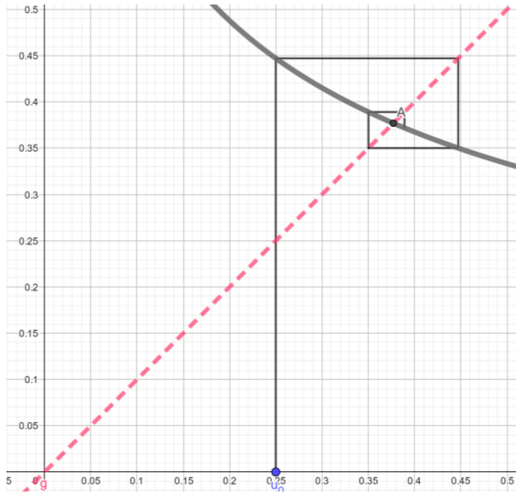
Démo

Prop : Si f est décroissante alors les suites extraites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire.
Lorsque la valeur de u_0 n'est pas connue, on doit étudier le signe de $h(x) = f \circ f(x) - x$ pour connaitre le sens de monotonie.

Démo

Illustration :





4) Cas où f est contractante i.e. lipschitzienne de rapport $M \in [0,1[$.

Etapes et preuve à connaitre :

Def : f est lipschitzienne sur D lorsqu'il un réel M tel que pour tous a *et* b de D , $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$. M est le rapport de Lipchitz de f. f est contractante sur D lorsqu'il un réel $M \in [0,1[$ tel que pour tous a *et* b de D , $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ i.e. lorsque f est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1. NB : toute fonction lipschitzienne sur D est continue sur D.

A savoir démontrer : si f est contractante sur D, de rapport M et L est un point fixe de f dans D alors L est l'unique point fixe de f sur D et $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\forall n, |u_n - L| \leq M^n|u_0 - L|$. Démo

Exemples :

1) Soit u une suite définie par : u_0 réel et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{1 + {u_n}^2}$. Etudiez la convergence de u et trouvez-en un équivalent simple.
2) Etudier la convergence de u telle que : $\forall n,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et $u_0 = \alpha$ réel . Illustrer ce résultat.
3)Soit u la suite définie par : $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que u converge vers 0 .
4) Etudier la convergence de u telle que $u_0 \geq 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ln(1 + 2u_n)$. Illustrer ce résultat.
5) Soit u la suite définie par :$u_0 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} sin\frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que u est bien définie et que u n' a qu'une seule limite possible notée λ .
b) Montrer que (u_{2n}) *et* (u_{2n+1})sont monotones et convergentes.
c) Prouver la convergence de la suite u.
d) Montrer que $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
e) Ecrire un programme en python qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et qui retourne une valeur approchée de λ à ε près.

Soit u une suite définie par : u_0 réel et $\forall n, u_{n+1} = \sqrt{1 + {u_n}^2}$. Etudiez la convergence de u et trouvez-en un équivalent simple.

On miontre facilement par un récurrence simple que $\forall n \geq 1, u_n \geq 1$. De plus, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1 > 0$. Donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite u est strictement croissante. Donc u admet une limite L , réelle supérieure à 1 ou égale à $+\infty$.

Imaginons un instant que L soit réelle. Alors $L = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + {u_n}^2} = \sqrt{1 + L^2}$. Donc $L^2 = 1 + L^2$ ce qui est impossible. Par conséquent, $L = +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1$. Donc , $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} 1$ Donc, $u_n^2 - u_0^2 = n$. Ainsi, $u_n = \sqrt{n + u_0^2} \sim \sqrt{n}$.

Etudier la convergence de u telle que : $\forall n,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ et $u_0 = \alpha$ réel . Illustrer ce résultat.

$\forall n, u_n$ *existe et* $\forall n,\ u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Donc, (u_n) est croissante donc a une limite L réelle ou $L = +\infty$.
Si L est finie alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 + u_n = L^2 + L$ et par suite $L^2 = 0$ donc $L = 0$. Ainsi, 0 et $+\infty$ sont les seules limites possibles de u.
$\forall n,\ u_{n+1} = u_n(u_n+1) = f(u_n)$ où $f: (x \mapsto x(x+1))$.
$f(]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Donc, si $u_0 \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[, u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
$f(]-1{,}0[) \subset]-1{,}0[$. Donc, si $u_0 \in]-1{,}0[, \forall n,\ u_n \in]-1{,}0[$ *et* par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$			
$f(x)$		$+$	0		$-\frac{1}{4}$		0	$+$	

Soit u la suite définie par : $u_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Montrer que u converge vers 0 .

Etudier la convergence de u telle que $u_0 \geq 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = ln(1+2u_n)$. Illustrer ce résultat.
Soit $f: (x \mapsto \ln(1+2x))$. $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ *et* $u_0 \in \mathbb{R}^+$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 0$. Donc u est minorée.
Limites possibles de u : comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$et $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^+$, les limites possibles de u sont les points fixes de f sur $\mathbb{R}^+$, s'ils existent, et $+\infty$. Cherchons les points fixes de f sur $\mathbb{R}^+$. Posons $g: (x \mapsto f(x) - x)$. Alors g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$.

g s'annule donc une et une seule fois en un réel a et $a > 1/2$. Donc f admet un et un seul point fixe a.

x	0		$\frac{1}{2}$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$			
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$			a	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante (puisque $(x \mapsto 1+2x)$ *et* ln le sont). Par conséquent u est monotone.
De plus, 1er cas : $u_0 \in]0,a[$. Alors $g(u_0) \geq 0$ *i.e.* $u_1 - u_0 \geq 0$ donc u est croissante. De plus, $f(]0,a[) \subset]0,a[$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,a[$. Donc u est majorée et par suite u converge vers a la seule limite possible de u.
Et si $u_0 \in]a,+\infty[$ alors $g(u_0) < 0$ *i.e.* $u_1 - u_0 < 0$ donc u est décroissante. De plus, $f(]a+\infty[) \subset]a+\infty[$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]a+\infty[$. Donc u est minorée et par suite u converge vers a la seule limite possible de u.
si $u_0 = 0$ alors u est constante nulle. si $u_0 = a$ alors u est constante égale à a.

Soit u la suite définie par :$u_0 \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}sin\frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que u est bien définie et que u n' a qu'une seule limite possible notée λ .
b) Montrer que (u_{2n}) *et* (u_{2n+1})sont monotones et convergentes.
c) Prouver la convergence de la suite u.
d) Montrer que $|u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
e) Ecrire un programme en python qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et qui retourne une valeur approchée de λ à ε près.

Soit $f: \left(x \mapsto 1 + \frac{1}{4}sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ $Df = \mathbb{R}^*$ *et* $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ donc $f\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) \subset \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$. Comme de plus, $u_0 \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n$existe et $u_n \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$. Donc u est bornée. Comme f est continue sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, les limites possibles de u sont donc les points fixes de f dans $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$.
Posons $g: (x \mapsto f(x) - x)$. g est continue et dérivable sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, $g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{4x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ tout comme f. De plus, $g\left(\frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(1 + \sin\left(\frac{4}{3}\right)\right) > 0$ *et* $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\sin\left(\frac{4}{5}\right) - 1\right) < 0$.
Donc g s'annule une et une seule fois sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ en un réel λ.
Comme f est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, (u_{2n}) *et* (u_{2n+1})sont monotones de monotonie contraire. Comme elles sont extraites de u, elles sont bornées et par conséquent, elles sont convergentes.
<u>Montrons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.</u>
Comme (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f \circ f$,fonction continue sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les limites possibl de $f \circ f$. Posons $h: (x \mapsto f \circ f(x) - x)$. h est continue et dérivable sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ et $\forall x \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, $h'(x) = f'(x)f'(f(x)) - 1$. Or, $\forall x \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$, $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{4x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}$. Donc, $|f'(x)f'(f(x))| \leq \frac{16}{81}$i.e. $-\frac{16}{81} \leq f'(x)f'(f(x)) \leq \frac{16}{81}$et par conséquent, $h'(x) < 0$. Donc h est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$. Donc h s'annule au plus une fois sur $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$. Or, $h(\lambda) = f(f(\lambda)) - \lambda = f(\lambda) - \lambda = 0$. Donc λ est l'unique point fixe de $f \circ f$ et donc l'unique limite possible de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}). Comme ces deux suites convergent, (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) convergent vers λ.
$|u_{n+1} - \lambda| = |f(u_n) - f(\lambda)| = \left|\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| = \frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) - \sin\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| = \frac{1}{4}\left|2\sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right)\cos\left(\frac{1}{2u_n} + \frac{1}{2\lambda}\right)\right|$
$|u_{n+1} - \lambda| = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{1}{2u_n} + \frac{1}{2\lambda}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{1}{2u_n} - \frac{1}{2\lambda}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\lambda - u_n}{2\lambda u_n}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda - u_n}{2\lambda u_n}\right| = \frac{1}{4\lambda}\frac{1}{|u_n|}\ |u_n - \lambda|$
$|u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{16}{4\times9}\ |u_n - \lambda| \leq \frac{4}{9}\ |u_n - \lambda| \leq \frac{1}{2}|u_n - \lambda|$.
Alors, par récurrence, on montre alors $\forall n, |u_n - \lambda| \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}|u_0 - \lambda|}_{\varepsilon_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. (Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et par conséquent, on retrouve bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda)$.

```
from math import*
def approximation(e) :
        s=1
        i=0
        While 1/(2^i)>e :
                s=1+sin(1/s)/4
                i=i+1
        print(s,i)
```

XV. Suites implicites

Déf : Une suite implicite est une suite dont le terme de rang n, u_n, est la solution d'une équation $\varphi_n(x) = 0$ dans un intervalle I_n donné. u_n est alors entièrement défini par : $\begin{cases} \varphi_n(u_n) = 0 \\ u_n \in I_n \end{cases}$.

Exemples :

1. Soit $n \geq 2$ et (E_n) l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ d'inconnue x réelle.

a. Justifier que : pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution positive. On note λ_n cette solution.

b. Montrer que la suite (λ_n) est monotone et convergente.

c. Déterminer la limite de la suite (λ_n).

a. Soit $n \geq 2$. $\varphi_n: (x \mapsto (\sum_{k=1}^{n} x^k) - 1)$ est polynomiale donc continue et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, φ_n est la somme de fonctions strictement croissantes : $(x \mapsto x - 1), (x \mapsto x^2), \dots, (x \mapsto x^n)$. Donc φ_n est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Donc, le TBCSM assure que φ_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{+\infty} f\,[= [-1, +\infty[$. Alors comme $0 \in [-1, +\infty[$, 0 admet un unique antécédent par φ_n. Ainsi, l'équation (E_n) admet une unique solution positive. Notons λ_n cette solution positive. De plus $\varphi_n(0) = -1$ *et* $\varphi_n(1) = n - 1 > 0$. Donc $0 < \lambda_n < 1$.

Alors pour tout $n \geq 2$, $0 < \lambda_n < 1$ *et* $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_n)^k = 1$ *i.e.* $\varphi_n(\lambda_n) = 0$. Ainsi, la suite (λ_n) existe et est bornée.

b. Soit $n \geq 2$. $\varphi_n(\lambda_n) = 0$ et $\varphi_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0$ *i.e.* $\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda_{n+1})^k = 1$.

Alors, $\varphi_n(\lambda_{n+1}) = [\sum_{k=1}^{n} (\lambda_{n+1})^k] - 1 = [\sum_{k=1}^{n+1} (\lambda_{n+1})^k] - {\lambda_{n+1}}^{n+1} - 1 = \varphi_{n+1}(\lambda_{n+1}) - {\lambda_{n+1}}^{n+1} = -{\lambda_{n+1}}^{n+1} < 0$ *car* $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$.

Donc, $\varphi_n(\lambda_{n+1}) < \varphi_n(\lambda_n)$. Comme φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $\lambda_{n+1} < \lambda_n$. Ainsi, la suite (λ_n) est strictement décroissante et bornée donc convergente. Notons L la limite de la suite (λ_n).

c. Soit $n \geq 2$. $\forall x \in [0,1[, \varphi_n(x) = (\sum_{k=1}^{n} x^k) - 1 = x\frac{1-x^n}{1-x} - 1 = \frac{-1+2x-x^{n+1}}{1-x}$.

Donc $\frac{-1+2\lambda_n-(\lambda_n)^{n+1}}{1-\lambda_n} = 0$ et par suite, *comme* $\lambda_n > 0$, $-1 + 2\lambda_n - e^{(n+1)\ln(\lambda_n)} \underbrace{=}_{**} 0$ et par suite $2\lambda_n - 1 = e^{(n+1)\ln(\lambda_n)}$; j'en déduis que $1 > \lambda_n > 1/2$ et comme la suite suite (λ_n) est décroissante, $1 > L \geq \frac{1}{2}$.

Alors, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\ln(\lambda_n) = -\infty$ et ^par passage à la limite dans $(**)$, $0 = \lim_{n\to+\infty} 2\lambda_n - 1e^{(n+1)\ln(\lambda_n)} = 2L - 1$ et ainsi, $L = \frac{1}{2}$.

2. On définit la suite u par : pour tout entier naturel n, u_n est l'unique solution de l'équation $\tan(x) = x$ dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

a. Justifier que $\forall n, u_n$ est bien défini. Représenter la suite u.

b. Etudier la monotonie et la limite de la suite u.

c. Montrer que $u_n - n\pi \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

d. Déterminer des réels a, b et c tels que : $u_n = an + b + \frac{c}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

a. *Soit* $\varphi(x) = \tan(x) - x$. φ est continue et dérivable sur chaque intervalle $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

$\forall x \in I_n, \varphi'(x) = 1 + tan^2(x) - 1 = tan^2(x) \geq 0$ *et* $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$. Donc φ' ne s'annule qu'au point isolé $n\pi$ de l'intervalle I_n. Donc φ est continue et strictement croissante sur chaque intervalle I_n.

Donc φ est bijective de $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ sur $\varphi(I_n) = \left]\lim_{(-\frac{\pi}{2}+n\pi)^+} \varphi, \lim_{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^-} \varphi\right[= \mathbb{R}$. Alors 0 a un unique antécédent u_n par φ dans caque intervalle I_n. Ainsi, $\forall n, u_n$ est défini par : $\begin{cases} tan(u_n) = u_n \\ u_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\end{cases}$.

b. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ *et* $u_{n+1} \in \left]-\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[= \left]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{3\pi}{2} + n\pi\right[$ Donc, $u_n < \frac{\pi}{2} + n\pi < u_{n+1}$. Ainsi, (u_n) est une suite strictement croissante. Et $\forall n, -\frac{\pi}{2} + n\pi < u_n$, comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\pi}{2} + n\pi = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. $tan(u_n) = u_n$ *et* $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ *donc* $.tan(u_n - n\pi) = u_n$ *et* $u_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent, $u_n - n\pi = Arctan(u_n)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} Arctan(u_n) = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^*$. J'en déduis que $u_n - n\pi \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$.

d. Alors $u_n - n\pi = \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)$ donc $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)$ i.e. $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Cherchons un équivalent de ε_n quand $n \to +\infty$.

$u_n - n\pi = Arctan\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o_{+\infty}(1)}\right)$. Et $\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o_{+\infty}(1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $Arctan(t) \sim_{t\to 0} t$ donc

$Arctan\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o_{+\infty}(1)}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o_{+\infty}(1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{n\pi}$. Donc, $Arctan\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}+o_{+\infty}(1)}\right) = \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $u_n - n\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ i.e. $u_n = \underbrace{\pi}_{=a} n + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=b} + \underbrace{\left(\frac{-1}{\pi}\right)}_{=c}\frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Méthode : Etude d'une telle suite :

1) **Définition :** on fixe n arbitrairement, on écrit l'équation donnée sous la forme $\varphi_n(x) = 0$ et on vérifie que cette équation a bien une et une seule solution dans l'intervalle I_n : on étudie φ_n et on prouve que φ_n s'annule une et une seule fois sur I_n grâce au TVI et à la stricte monotonie … (TBCSM).

On justifie ainsi que la suite (u_n) est bien définie .

NB : φ_n est parfois bijective sur I_n alors $0 = \varphi_n(u_n)$ s'écrit $u_n = \varphi_n{}^{-1}(0)$. Il suffit alors d'étudier $\varphi_n{}^{-1}$ au voisinage de 0.

2) **Monotonie :** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement . Sinon.

b) on cherche le signe de $\varphi_n(u_{n+1})$ (en utilisant $\varphi_{n+1}(u_{n+1}) = 0$) et on utilise la monotonie de φ_n pour conclure .

Si par exemple $\varphi_n(u_{n+1}) > 0 = \varphi_n(u_n)$ et φ_n décroissante alors $u_n > u_{n+1}$ et la suite (u_n) est décroissante .

3) **Bornée :** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement . Sinon.

b) Par le TVI appliqué à φ_n entre deux valeurs bien choisies, on peut encadrer la suite .

4) **Convergence:** a) les intervalles I_n permettent parfois de conclure directement .

b)Si l'on sait que u a une limite (parce que u monotone par exemple), on passe à la limite dans la relation $\varphi_n(u_n) = 0$, il est parfois utile de la transformer et d' utiliser les propriétés de la suite (u_n) et notamment son caractère borné.

5) **Développement asymptotique :** le plus souvent on l'obtient en plusieurs étapes :

a) On obtient un équivalent α_n de u_n pour n au voisinage de +∞ en utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(\,u_n) = 0$. On pose alors :

$u_n = \alpha_n + \varepsilon_n$ tel que $\varepsilon_n = o_{+\infty}(\alpha_n)$.

b) On obtient un équivalent δ_n de ε_n pour n au voisinage de +∞ en réinjectant dans $\varphi_n(\alpha_n + \varepsilon_n) = 0$ utilisant des développements limités et équivalents usuels dans la relation $\varphi_n(\,u_n) = 0$ On pose alors :

$\varepsilon_n = \delta_n + \mu_n$ tel que $\mu_n = o_{+\infty}(\varepsilon_n)$ …

c) Et on recommence !!!!

NB : D'autres méthodes sont parfois suggérées par l'énoncé. Laissez-vous guider.