Corrigé du DL 5

Ex 1 Soit a un réel ou un infini. Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage V de a.

1. Montrer que $e^f \sim_a e^g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.
2. Déterminer deux fonctions f et g telles que $f \sim_0 g$ et $e^f \cancel{\sim}_0 e^g$.
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \; ou + \infty$ et $f \sim_a g \Longrightarrow \ln(f) \sim_a \ln(g)$.
4. Donner un exemple de deux fonctions f et g telles que $f \sim_0 g$ et $\ln(f) \cancel{\sim}_0 \ln(g)$.

1. $e^f \sim_a e^g \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, \forall x, e^{g(x)} \neq 0} \lim\limits_{x\to a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} e^{f(x)-g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$.

2. Posons $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $f \sim_0 g$ mais $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ donc $e^f \cancel{\sim}_0 e^g$.

3. Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \; ou + \infty$ et $f \sim_a g$. Alors au voisinage de a, $f(x) > 0$ $\left(puisque \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \; ou + \infty\right)$ et $g(x) > 0$ $(puisque\ f \sim_a g\ donc\ g\ a\ le\ même\ signe\ que\ f\ au\ voisinage\ de\ a)$ d*onc $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies au voisinage de a.

De plus, $g(x) = f(x) + f(x)o_a(1) = f(x)(1 + o_a(1))$ donc $\ln(g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(1 + o_a(1))$. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \; ou + \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \ln(f(x)) = \infty$. Comme $\lim\limits_{x\to a} \ln(1 + o_a(1)) = 0$, $\ln(1 + o_a(1)) = o_a(\ln(f(x)))$. Ainsi, je peux conclure que $\ln(g(x)) \sim_{x\to a} \ln(f(x))$.

4. Posons $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \sim_0 g(x)$ mais $\ln(e^x) = x$ et $\ln(1) = 0$ et $x \cancel{\sim}_0 0$ i.e. $\ln(f) \cancel{\sim}_0 \ln(g)$.

Ex 2 Soit a un réel et $f_a : (x \mapsto \frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{Arctan(x)})$.

1. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de 0 .
   b. Donner l'équation de la tangente à C_{f_a} en 0 et la position, au voisinage de 0, de la courbe C_{f_a} par rapport à cette tangente (suivant les valeurs de a).
2. a. Déterminer un équivalent simple de f_a au voisinage de $+\infty$.
   b. Montrer que C_{f_a} a deux asymptotes obliques et étudier la position, au voisinage de $\pm\infty$, de C_{f_a} par rapport à ses asymptotes (suivant les valeurs de a).
   c. Vérifier que ces deux asymptotes se coupent orthogonalement sur (Ox).

1. a. $\lim\limits_{x\to 0} f_a(x) = 1 \in \mathbb{R}^*$. Donc $f_a(x) \sim_0 1$.

   b. Cherchons un DL en 0 d'ordre suffisant pour faire apparaitre un terme significatif supplémentaire par rapport à un DL_1.

$\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} = (1 - ax + x^2)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - ax + x^2)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)\right) = 1 - ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}x^3 + o_0(x^3)$.

$e^{Arctan(x)} = e^{x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + o_0(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)x^3 + o_0(x^3)$

$e^{Arctan(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Donc, $f_a(x) = \left(1 - ax + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a}{2}x^3 + o_0(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)\right)$

$f_a(x) = 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o_0(x^3)$. Ainsi, $f_a(x) \overset{(**)}{=} 1 + (1-a)x + (1-a)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$.

Donc, l'équation de la tangente à Cf_a en 0 est $y = 1 + (1-a)x$.

Et si $a \neq 1$ alors $f_a(x) - 1 - (1-a)x \sim_0 (1-a)x^2$. Donc au voisinage de 0, $f_a(x) - 1 - (1-a)x > 0$ si $a < 1$ et $f_a(x) - 1 - (1-a)x < 0$ si $a > 1$. Donc, si $a > 1$ alors Cf_a est sous sa tangente en 0 et si $a < 1$ alors Cf_a est au-dessus de sa tangente en 0.

Et si $a = 1$ alors la tangente à Cf_1 en 0 est horizontale d'équation $y = 1$ et $f_1(x) - 1 \sim_0 \frac{1}{3}x^3$. Donc si $x > 0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x) - 1 > 0$ et si $x < 0$ et x au voisinage de 0, $f_1(x) - 1 < 0$. Donc Cf_1 traverse sa tangente en 0 et est au-dessus de cette tangente au voisinage de 0^+ et en dessous au voisinage de 0^-.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{Arctan(x)} = e^{\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}^*$. Donc $e^{Arctan(x)} \sim_{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}}$. De plus, $\frac{1-ax+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} \underbrace{=}_{car\ x>0\ donc\ \sqrt{x^2}=|x|=x} x$. Ainsi, $f_a(x) \sim_{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}}x$. De

   même $f_a(x) \sim_{-\infty} -e^{-\frac{\pi}{2}}x$

   b. Posons $g(t) = tf_a\left(\frac{1}{t}\right)$

   Alors, pour t au voisinage de 0^+,

$tg(t) = t\frac{1 - \frac{a}{t} + \frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} e^{Arctan\left(\frac{1}{t}\right)} = t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}} e^{\frac{\pi}{2} - Arctan(t)} \underbrace{=}_{t>0\ donc\ \sqrt{t^2}=t} t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}} e^{\frac{\pi}{2}} e^{-Arctan(t)} = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-at+t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{Arctan(-t)}$

$tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-a)(-t)+t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{Arctan(-t)} = e^{\frac{\pi}{2}} f_{-a}(-t) \underbrace{=}_{d'après\ (**)\ avec\ \lim\limits_{t\to 0} -t = 0} e^{\frac{\pi}{2}}[1 + (1-(-a))(-t) + (1-(-a))(-t)^2 + \frac{1}{3}(-t)^3 + o_0(t^3)]$.

Ainsi, $tg(t) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)t^2 - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}t^3 + o_0(t^3)$. Donc, $\frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}g\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} + (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x^2} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Ainsi, $f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a) + e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

J'en déduis que si $a \neq -1$ alors $f(x) - (e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)) \sim_{+\infty} (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} = 0$ et $\begin{cases}(1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} > 0 \; si \; a > -1 \\ (1+a)\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x} < 0 \; si \; a < -1\end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) = 0$ et $\begin{cases} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) > 0 \; si \; a > -1 \\ f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}(x-(1+a)) < 0 \; si \; a < -1\end{cases}$ (puisque des fonctions équivalentes au voisinage de a ont en commun limite en a et signe au voisinage de a). De même, si $a = -1$ alors $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x \sim_{+\infty} -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2}$. Et par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x = 0$ et $f(x) - e^{\frac{\pi}{2}}x < 0$.

Ainsi la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et Cf est $\begin{cases} au-dessus \; de \; cette \; asymptote \; si \; a > -1 \\ en-dessous \; de \; cette \; asymptote \; si \; a \leq -1\end{cases}$.

Alors, pour t au voisinage de 0^-,

$$tg(t) = t\frac{1-\frac{a}{t}+\frac{1}{t^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}e^{Arctan\left(\frac{1}{t}\right)} = t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}}e^{-\frac{\pi}{2}-Arctan(t)} \underbrace{=}_{\substack{t<0 \\ donc \; \sqrt{t^2}=-t}} t\frac{\frac{t^2-at+1}{t^2}}{\frac{1}{-t}\sqrt{1+t^2}}e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-Arctan(t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1-at+t^2}{\sqrt{1+t^2}}e^{Arctan(-t)} = -e^{-\frac{\pi}{2}}f_{-a}(-t)$$

Donc, en utilisant les mêmes calculs que précédemment, je peux en déduire que :

$$f(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a) - e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)\frac{1}{x} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{3}\frac{1}{x^2} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ainsi la droite d'équation $y = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)$ est asymptote à Cf en $-\infty$ et Cf est $\begin{cases} au-dessus \; de \; cette \; asymptote \; si \; a \leq -1 \\ en-dessous \; de \; cette \; asymptote \; si \; a > -1\end{cases}$.

d. L'asymptote à Cf en $+\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $e^{\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + e^{\frac{\pi}{2}}\vec{\jmath}$ est directeur de l'asymptote $+\infty$. L'asymptote à Cf en $-\infty$ a pour coefficient directeur (pente) $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ donc le vecteur $\vec{v} = \vec{\imath} - e^{-\frac{\pi}{2}}\vec{\jmath}$ est directeur de cette asymptote en $-\infty$. Alors, $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 + e^{\frac{\pi}{2}} \times \left(-e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = 1 - 1 = 0$. J'en conclus que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et ainsi les deux asymptotes sont perpendiculaires. De plus, l'asymptote en $+\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A(x,0)$ tel que $0 = e^{\frac{\pi}{2}}x - e^{\frac{\pi}{2}}(1+a)$ $i.e. \; x = 1+a$. Et l'asymptote en $-\infty$ coupe l'axe des abscisses au point $A'(x,0)$ tel que $0 = -e^{-\frac{\pi}{2}}x + e^{-\frac{\pi}{2}}(1+a)$ $i.e. \; x = 1+a$. Donc, $A = A'$ et ainsi, les deux asymptotes se coupent perpendiculairement au point A de la droite des abscisses.

Ex 3 Soit $f : \begin{pmatrix}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}}\end{pmatrix}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f peut se mettre sous la forme :
   $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$, où P_n est une fonction polynomiale. Donner une relation entre $P_n'(t), P_n(t)$ et $P_{n+1}(t)$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note $\tilde{f}$: $\begin{pmatrix} & [1,+\infty[\; \to \; \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases}\frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} \; si \; x > 1 \\ 0 \; si \; x = 1\end{cases}\end{pmatrix}$.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $[1,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}^{(n)}$: $\begin{pmatrix} & [1,+\infty[\; \to \; \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} \; si \; x > 1 \\ 0 \; si \; x = 1\end{cases}\end{pmatrix}$.
5. Déterminer , par conjecture puis récurrence , le degré et le coefficient dominant de P_n .
6. Montrer que f est solution de : $(1-x)^2y' = (2-x)y$.
7. En déduire que :$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^{-*}, P_{n+1}(t) = [(2n+1)t + t^2]P_n(t) - n^2t^2P_{n-1}(t)$.

1. $Df =]1,+\infty[\; car \; \forall x > 1, 1-x \neq 0$.

L'expression de f n'étant constituée que de fonctions de la classe C^∞sur leur propre domaine de définition, f est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.

2. Posons $H(n)$: "il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x > 1, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$".

$init$: $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = P_0\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$" en posant $P_0(t) = t$. Donc $H(0)$ est vraie.

$propag$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $H(n)$ est vraie.

Alors il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x > 1, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = P_n(u(x))e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{1-x}$.

Donc, $\forall x > 1, f^{(n+1)}(x) = u'(x)P_n'(u(x))e^{u(x)} + P_n(u(x))u'(x)e^{u(x)} = u'(x)[P_n'(u(x)) + P_n(u(x))]e^{u(x)}$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\left[\left[P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right) + P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]e^{\frac{1}{1-x}} \underbrace{=}_{t=\frac{1}{1-x}} t^2[P_n'(t) + P_n(t)]e^t\right.$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}, P_{n+1}(t) = t^2[P_n'(t) + P_n(t)]$. Comme P_n est polynomiale, P_n' est polynomiale et par suite, P_{n+1} est polynomiale.

De plus, $\forall x > 1, \; f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Donc, $H(n+1)$ est vraie.

CCL: le théorème de récurrence simple assure que pour tout entier naturel n, $H(n)$ est vraie i.e. il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x > 1, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, P_0(t) = 1 \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(t) = t^2[P_n'(t) + P_n(t)]$.

3. Etudions la limite de f en 1^+ :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} te^t \overset{CC}{=} 0$ donc , par composition, $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = 0$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 1 par la valeur 0.

Donc, $\tilde{f}:\left(\begin{array}{ccc} & [1,+\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} & si\ x>1 \\ 0\ si\ x=1 & \end{cases}\end{array}\right)$ est définie et continue en 1.

4. Appliquons le critère de classe C^∞:

$\tilde{f}$ est continue en $1 et\ f$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. Et pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x > 1, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. Etudions la limite de $f^{(n)}(x)$ quand $x \rightarrow 1$.

Posons $P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + .. + a_N t^N$ où $a_0, a_1, \dots, a_N$ réels .

Alors, $\forall x > 1, f^{(n)}(x) = \left[a_0 + a_1\frac{1}{1-x} + a_2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 + .. + a_N\left(\frac{1}{1-x}\right)^N\right]e^{\frac{1}{1-x}}$.

Or, si $k \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\frac{1}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\rightarrow -\infty} t^k e^t \overset{CC\ si\ k>0}{\cong} 0$; donc , par composition, $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\left(\frac{1}{1-x}\right)^k e^{\frac{1}{1-x}} = 0$. Alors, $f^{(n)}(x)$ est la somme finie de fonctions de limite nulle en 1. J'en conclus que $\lim\limits_{x\rightarrow 1} f^{(n)}(x) = 0$. Cette limite étant finie, le critère de classe C^∞ assure alors que $\tilde{f}$ est de classe C^∞ sur $[1,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{f}^{(n)}:\left(\begin{array}{ccc} & [1,+\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} & si\ x>1 \\ 0\ si\ x=1 & \end{cases}\end{array}\right)$.

5. $\forall t \in \mathbb{R}, P_0(t) = t\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(t) = t^2[P_n'(t) + P_n(t)]$. Notons $d_n = \deg(P_n)$.

Alors $d_0 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \deg(P_{n+1}) = 2 + \deg(P_n' + P_n) \underbrace{=}_{car\ \deg(P_n')<\deg(P_n)} 2 + \deg(P_n) = 2 + d_n$. Donc la suite (d_n) est arithmétique de raison 2 . Par conséquent, $\forall n, d_n = 0 + 2n$. $Ainsi, \forall n, \deg(P_n) = 2n + 1$.

Notons $a_n = le\ coefficient\ dominant\ de\ P_n$. Alors, $a_0 = 1\ et\ \forall n, a_{n+1} = 1 \times a_n = a_n$. Donc, (a_n) est constante gale à $a_0 = 1$.

Ainsi, t^{2n+1} est la terme dominant de $P_n(t)$.

6. $\forall x > 1, (1-x)^2 f'(x) = (1-x)^2\left[\frac{1}{(1-x)^2}e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^3}e^{\frac{1}{1-x}}\right] = e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = \left(1 + \frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{2-x}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = (2-x)f(x)$.

Donc f est une solution sur $]1,+\infty[$ de l'équation différentielle $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.

$\forall x > 1, \underbrace{\underbrace{(1-x)^2}_{=u(x)} f'(x)}_{=H(x)} = \underbrace{\underbrace{(2-x)}_{=v(x)} f(x)}_{=G(x)}$. H et G sont de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ car $u, v, f\ et\ f'$ le sont. Alors, $\forall n, \forall x > 1, H^{(n)}(x) = G^{(n)}(x)$.

De plus, d'après Leibniz,

$$H^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)(f')^{(n-k)}(x) \overset{car\ \forall k\geq 3, u^{(k)}=0}{\cong} \binom{n}{0}u^{(0)}(x)(f')^{(n)}(x) + \binom{n}{1}u^{(1)}(x)(f')^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}u^{(2)}(x)(f')^{(n-2)}(x)$$

$$= (1-x)^2 \times f^{(n+1)}(x) + n \times 2(x-1) \times f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times f^{(n-1)}(x)$$

$$= (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x)$$

De même, $G^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x) \overset{car\ \forall k\geq 2, v^{(k)}=0}{\cong} \binom{n}{0}v^{(0)}(x)f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}v^{(1)}(x)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 1, (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$.

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) + [(2n+1)x - 2(n+1)]f^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Ce qui s'écrit encore : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 1,$

$$(1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} + [(2n+1)x - 2(n+1)]P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} + n^2 P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = 0$$

$(1-x)^2 P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) + [(2n+1)x - 2(n+1)]P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) + n^2 P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0\ (**)$

Posons $t = \frac{1}{1-x}$. Alors comme $x > 1, t < 0\ et\ x = 1 - \frac{1}{t}$.

Et , $(**)$ s'écrit : $\forall t < 0, \left(1 - 1 + \frac{1}{t}\right)^2 P_{n+1}(t) + \left[(2n+1)\left(1 - \frac{1}{t}\right) - 2(n+1)\right]P_n(t) + n^2 P_{n-1}(t) = 0$.

$P_{n+1}(t) + t^2\left[-(2n+1)\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right]P_n(t) + n^2 t^2 P_{n-1}(t) = 0$.

Ainsi, $\forall t < 0, P_{n+1}(t) = [t^2 + (2n+1)t]P_n(t) - n^2 t^2 P_{n-1}(t)$.

Ex 4 Raccord en 0

Soit (E): $|x|y' + (x-1)y = x^3$ équation différentielle d'inconnue y fonction à valeurs réelles.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
3. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On pensera à utiliser les développements limités dans les calculs des limites lors de ce raccord en 0.

(E): $|x|y' + (x-1)y = x^3$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec les fonctions coefficients et le second membre sont continue sur $\mathbb{R}$.

1. Sur $\mathbb{R}^{+*}, (E): xy' + (x-1)y = x^3$ et (EH): $y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = 0$.

Résolution de (EH) : Posons $a(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Alors A: $(x \mapsto x - \ln(x))$ est une primtive de a sur $\mathbb{R}^{+*}\ et\ \forall x > 0, e^{-A(x)} = e^{-x+\ln(x)} = xe^{-x}$.

Donc les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions de la forme $\left(\begin{array}{c}\mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto kxe^{-x}\end{array}\right)\ tq\ k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière de (E) : cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f(x) = k(x)xe^{-x}$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = k'(x)xe^{-x} + k(x)e^{-x} - k(x)xe^{-x}$.

Par suite, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \forall x > 0, xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, x[k'(x)xe^{-x} + k(x)e^{-x} - k(x)xe^{-x}] + (x-1)[k(x)xe^{-x}] = x^3$

$\Leftrightarrow \forall x > 0, x^2k'(x)e^{-x} = x^3$
$\Leftrightarrow \forall x > 0, k'(x) = xe^x$
$\Leftrightarrow k$ *est une primitive de* $g: (x \mapsto xe^x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
g étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, g admet une primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminons une primitive de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.
$\int^x te^t dt = [te^t]^x - \int^x e^t dt = xe^x - e^x + cste.$
Prenons $k_0(x) = (x-1)e^x$ *et* $f_0(x) = k_0(x)xe^{-x}$. Alors $f_0: (x \mapsto x(x-1))$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$: les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x + kxe^{-x} \end{pmatrix}$ $tq\ k \in \mathbb{R}$.

2. Sur $\mathbb{R}^{-*}, (E): -xy' + (x-1)y = x^3$ et $(EH): y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = 0$.

Résolution de (EH) : Posons $a(x) = \frac{1}{x} - 1$. Alors $A: (x \mapsto \ln(x) - x)$ est une primtive de a sur $\mathbb{R}^{-*}$ $et\ \forall x > 0, e^{-A(x)} = e^{x - \ln(x)} = \frac{e^x}{x}$. Donc les solutions de (EH) sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{-*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k\frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$ $tq\ k \in \mathbb{R}$.

Recherche d'une solution particulière de (E) : cherchons une solution particulière de (E) de la forme $f(x) = k(x)\frac{e^x}{x}$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\forall x < 0, f'(x) = k'(x)\frac{e^x}{x} - \frac{k(x)e^x}{x^2} + \frac{k(x)e^x}{x}$.
Par suite, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow \forall x < 0, -x\left[k'(x)\frac{e^x}{x} - \frac{k(x)e^x}{x^2} + \frac{k(x)e^x}{x}\right] + (x-1)k(x)\frac{e^x}{x} = x^3$
$\Leftrightarrow \forall x < 0, -k'(x)e^x + e^x k'(x)\left[\frac{1}{x} - 1 + 1 - \frac{1}{x}\right] = x^3$
$\Leftrightarrow \forall x < 0, k'(x) = -x^3e^{-x}$
$\Leftrightarrow k$ *est une primitive de* $g: (x \mapsto -x^3e^{-x})$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.
g étant continue sur $\mathbb{R}^{-*}$, g admet une primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$. Déterminons une primitive de g sur $\mathbb{R}^{-*}$.
$\int^x t^3e^{-t}dt = [-t^3e^{-t}]^x + \int^x 3t^2e^{-t}dt = -x^3e^{-x} + 3\{[-t^2e^{-t}]^x + \int^x 2te^{-t}dt\} = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} + 6\{[-te^{-t}]^x + \int^x e^{-t}dt\}$
$\int^x t^3e^{-t}dt = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + cste.$
Prenons $k_0(x) = x^3e^{-x} + 3x^2e^{-x} + 6xe^{-x} + 6e^{-x}$ *et* $f_0(x) = \frac{k_0(x)e^x}{x}$.
Alors $f_0: \left(x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right)$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$: les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont toutes les fonctions de la forme $\begin{pmatrix} \mathbb{R}^{-*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k\frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$ $tq\ k \in \mathbb{R}$.

3. Solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$il existe k_1, k_2 *réels tels que* : $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + kxe^{-x}\ si\ x > 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k_2\frac{e^x}{x}\ si\ x > 0 \end{cases}$
et f est définie, continue et dérivable en 0 et $(-0)f'(0) + (0-1)f(0) = 0^3$.
Considérons f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 - x + k_1xe^{-x}\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k_2\frac{e^x}{x}\ si\ x < 0 \end{cases}$ où k_1, k_2 *réels* à déterminer de sorte que f soit continue et dérivable en 0.
f est continue en $0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} x^2 - x + k_1xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k_2\frac{e^x}{x} = 0 \end{cases}$. Or, pour tout réel k_1, $\lim_{x \to 0^+} x^2 - x + k_1xe^{-x} = 0$. Mais par contre,
$x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k_2\frac{e^x}{x} = x^2 + 3x + 6 + \frac{k_2e^x + 6}{x} = x^2 + 3x + 6 + \frac{k_2(1 + x + o_0(x)) + 6}{x} = x^2 + 3x + 6 + \frac{k_2 + 6}{x} + k_2 + o_0(1)$.
$\lim_{x \to 0^-} x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k_2\frac{e^x}{x} = \begin{cases} \pm\infty\ si\ k_2 \neq -6 \\ 0\ si\ k_2 = -6 \end{cases}$. Donc, f est continue en $0 \Leftrightarrow k_2 = -6$.
Désormais $k_2 = -6$ *et* $f(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 - x + k_1xe^{-x}\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + \frac{6 - 6e^x}{x}\ si\ x < 0 \end{cases}$.
f est dérivable en $0 \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ *existe et est réel* $\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x + k_1xe^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - e^x}{x}}{x} \in \mathbb{R}$.
Or, $\frac{x^2 - x + k_1xe^{-x}}{x} = x - 1 + k_1e^{-x}$. Donc, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x + k_1xe^{-x}}{x} = -1 + k_1$.
Et $\frac{x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - e^x}{x}}{x} = x + 3 + 6\frac{x + 1 - e^x}{x^2} = x + 3 + 6\frac{x + 1 - (1 + x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2))}{x^2} = x + 3 - 3 + o_0(1)$. Donc, $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - e^x}{x}}{x} = 0$.
Donc, f est dérivable en $0 \Leftrightarrow -1 + k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1$.
Ainsi, $f: \left(x \mapsto \begin{cases} f(x) = x^2 - x + xe^{-x}\ si\ x > 0 \\ 0\ \ si\ x = 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 6 + 6\frac{1 - e^x}{x}\ si\ x < 0 \end{cases}\right)$ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

PROBLEME 1 Une famille d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non constants
On appelle équation d'Euler, toute équation différentielle linéaire de la forme : $(E): ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$
où a, b *et* c sont des réels fixés, a non nul et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donnée et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $(EH): ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E).
Une solution de (E) *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ est une fonction y dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant : $\forall x > 0, ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$.

1. **Propriétés des solutions.** On suppose que y_0 est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1a. Démontrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$sont toutes les fonctions de la forme $y_0 + \varphi$ où φ solution de $(EH)\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$.

1b. Démontrer que y_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1c. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, ax^2{y_0}^{(n+2)}(x) + (2an+b)x{y_0}^{(n+1)}(x) + (an^2 + (b-a)n + c){y_0}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

2. **Résolution de (EH) et (E) par deux méthodes**

Première méthode :

2a. Démontrer que l'équation (EH) admet une solution de la forme $(x \mapsto x^\alpha)$ tq $\alpha \in \mathbb{R}$ **sietssi** $(b-a)^2 - 4ac \geq 0$.

2b. On suppose que $(b-a)^2 - 4ac \geq 0$ et $\varphi_0 : (x \mapsto x^\alpha)$ est solution de (EH).

Soit y une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $k(x) = y(x)x^{-\alpha}$.

Montrer que : y est solution de(E) **sietssi** k' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on donnera.

Deuxième méthode :

2c. On effectue le changement de variable $t = \ln(x)$ et le changement de fonction associée $z(t) = y(x)$.

Montrer que : y est solution de(E) **sietssi** z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on donnera.

3. **APPLICATION :** Résoudre les équations suivantes, vous appliquerez l'une des deux méthodes précédentes pour l'une des équations et l'autre méthode pour l'autre équation.

3a. Résoudre $(E_1): x^2y'' + xy' + y = x^2\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$.

3b. Résoudre $(E_2): x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x)\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$.

1.1a. Soit $y: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Posons $\varphi = y - y_0$ i.e. $y = \varphi + y_0$. Alors φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $y\ et\ y_0$ le sont. Et, $y' = \varphi' + y_0'\ \ et\ y'' = \varphi'' + {y_0}''$.

Alors, y solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2[\varphi''(x) + y_0''(x)] + bx[\varphi'(x) + y_0'(x)] + c[\varphi(x) + y_0(x)] = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2\varphi''(x) + bx\varphi'(x) + c\varphi(x) + \underbrace{ax^2y_0''(x) + bxy_0'(x) + cy_0(x)}_{=f(x)\ car\ y_0\ est\ solution\ de\ (E)} = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2\varphi''(x) + bx\varphi'(x) + c\varphi(x) + f(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2\varphi''(x) + bx\varphi'(x) + c\varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ φ est solution de (EH) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont toutes les fonctions $y_0 + \varphi$ où φ solution de $(EH)\ sur\ \mathbb{R}^{+*}$.

1b. Soit $y_0: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$. Alors y_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}\ et\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2{y_0}''(x) + bx{y_0}'(x) + cy_0(x) = f(x)$. Posons $H(k)$: " y_0 est $k-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$". Alors $H(2)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}\ tel\ que\ k \geq 2$. Je suppose $H(k)\ vraie\ i.e.\ y_0$ est $k-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Je sais que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2{y_0}''(x) + bx{y_0}'(x) + cy_0(x) = f(x)$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, {y_0}''(x) \overset{(**)}{\triangleq} -\frac{1}{ax^2}(bx{y_0}'(x) + cy_0(x) - f(x))$. Comme y est $k-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, $y_0\ et\ {y_0}'$ sont $(k-1)-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\left(x \mapsto -\frac{1}{ax^2}\right), (x \mapsto bx)\ et\ f$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $(k-1)-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. J'en déduis, grâce à l'égalité $(**)$, que ${y_0}''\ est\ \ (k-1)-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ ce qui signifie que $y_0\ est\ \ (k+1)-$ fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $H(k+1)\ est\ \ vraie$ dès que $H(k)\ vraie$. J' peux alors conclure par le théorème de récurrence simple que : $\forall k \geq 2$ $H(k)\ vraie$ ce qui signifie que y_0 est de classe C^∞sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1.c. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, a\underbrace{x^2{y_0}''(x)}_{\alpha(x)} + b\underbrace{x{y_0}'(x)}_{\beta(x)} + cy_0(x) = f(x)$.

Comme $\alpha, \beta, y_0\ et\ f$ sont de classe $C^\infty\ sur\ \mathbb{R}^{+*}\ et\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ a\alpha(x) + b\beta(x) + cy_0(x) = f(x),\ \ je\ peux\ affirler\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ a\alpha^{(n)}(x) + b\beta^{(n)}(x) + c{y_0}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$. De plus , la formule de Leibniz assure que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\alpha^{(n)}(x) = \binom{n}{0}x^2{y_0''}^{(n)}(x) + \binom{n}{1}2x{y_0''}^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}2{y_0''}^{(n-2)}(x) + \underbrace{\binom{n}{3}0{y_0''}^{(n-1)}(x) + .. + \binom{n}{n}0y_0''\ \ (x)}_{=0}$$

$$\alpha^{(n)}(x) = x^2{y_0}^{(n+2)}(x) + 2nx{y_0}^{(n+1)}(x) + n(n-1){y_0}^{(n)}(x)$$

$$\beta^{(n)}(x) = \binom{n}{0}x{y_0'}^{(n)}(x) + \binom{n}{1}1{y_0'}^{(n-1)}(x) + \underbrace{\binom{n}{2}0{y_0'}^{(n-2)}(x) + .. + \binom{n}{n}0y_0'\ \ (x)}_{=0} = xy_0^{(n+1)}(x) + ny_0^{(n)}(x)\ .$$

Alors , $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ a(x^2{y_0}^{(n+2)}(x) + 2nx{y_0}^{(n+1)}(x) + n(n-1){y_0}^{(n)}(x))\ + b(xy_0^{(n+1)}(x) + ny_0^{(n)}(x)) + c{y_0}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Ainsi,$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, ax^2{y_0}^{(n+2)}(x) + (2an+b)x{y_0}^{(n+1)}(x) + (an^2 + (b-a)n + c){y_0}^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

4. **Résolution de (EH) et (E) par deux méthodes**

Première méthode :

2a. il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x \mapsto x^\alpha)$ soit solution de (EH)

sietssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}\ tel\ que$: $\forall x > 0, ax^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + bx\alpha x^{\alpha-1} + cx^\alpha = 0$.

sietssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}\ tel\ que$: $\forall x > 0, a\alpha(\alpha-1) + b\alpha + c = 0$.

Car $\forall x > 0, x^\alpha = 0$.

sietssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}\ tel\ que$: $a\alpha^2 + (b-a)\alpha + c = 0$.

sietssi l'équation $at^2 + (b-a)t + c = 0$ admet une solution réelle

sietssi $(b-a)^2 - 4ac \geq 0$

2b. On suppose que $(b-a)^2 - 4ac \geq 0$ et $\varphi_0 : (x \mapsto x^\alpha)$ est solution de (EH).

Soit y une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $k(x) = y(x)x^{-\alpha}$.

Alors k est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$

et $\forall x > 0, y(x) = k(x)x^\alpha, y'(x) = \left(k'(x)x + \ \alpha k(x)\right)x^{\alpha-1}\ \ et\ y''(x) = (k''(x)x^2 + (2\alpha)xk'(x) + \alpha(\alpha-1)k(x))x^{\alpha-2}$.

Par conséquent,

y est solution de(E)
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2(k''(x)x^2 + (2\alpha)xk'(x) + \alpha(\alpha-1)k(x))x^{\alpha-2} \quad + bx\big(k'(x)x + \alpha k(x)\big)x^{\alpha-1} + ck(x)x^{\alpha} = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, a(k''(x)x^2 + (2\alpha)xk'(x) + \alpha(\alpha-1)k(x)) \quad + b\big(k'(x)x + \alpha k(x)\big) + ck(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ak''(x)x^2 + (2a\alpha + b)xk'(x) + (\underbrace{a\alpha^2 + (b-a)\alpha + c}_{\substack{=0\ car\ (x\mapsto x^{\alpha}) est \\ solution\ de\ (EH)}})k(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ak''(x)x^2 + (2a\alpha + b)xk'(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow$ k' est solution, sur $\mathbb{R}^{+*}$, de l' équation différentielle linéaire d'ordre 1 $ak''(x)x^2 + (2a\alpha + b)xk'(x) = f(x)$.

Deuxième méthode :

2c. Soit y une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\forall x > 0$, *on pose* $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(x)$. Alors $t \in \mathbb{R}, x = e^t$ *et* $y(x) = z(\ln(x))$ *et* $z(t) = y(e^t)$.
y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $z: (t \mapsto y(e^t))$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et, $\forall x > 0, y(x) = z(\ln(x)), y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x))$ et $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$.

Alors

y est solution de(E)
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ax^2[-\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))\ ] + bx\left[\frac{1}{x}z'(\ln(x))\right] + c[z(\ln(x))] = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, az''(\ln(x)) \ + (b-a)z'(\ln(x)) + cz(\ln(x)) = f(x)$
$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, az''(\mathrm{t}) \ + (b-a)z'(\mathrm{t}) + cz(\mathrm{t}) = f(e^t)$
$\Leftrightarrow$ z est solution de l' équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $az''(\mathrm{t}) \ + (b-a)z'(\mathrm{t}) + cz(\mathrm{t}) = f(e^t)$

5. APPLICATION :

$(E_1): x^2y'' + xy' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ici $a = b = c = 1$. $(b-a)^2 - 4ac = -4 < 0$ donc la première méthode ne s'applique pas .
$(E_2): x^2y'' + 3xy' + y = \ln(x)$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. Ici $a = 1 = c$ *et* $b = 3$ donc $(b-a)^2 - 4ac = 0 \geq 0$ donc la première méthode s'applique.
Donc, j'applique la méthode 1 pour résoudre (E_2) et la méthode 2 pour résoudre (E_1).
Soit y une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit Résolution de (E_1) : $\forall x > 0$, *on pose* $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(x)$. Alors $t \in \mathbb{R}, x = e^t$ *et* $y(x) = z(\ln(x))$ *et* $z(t) = y(e^t)$.
Alors y est solution de(E_1) $\Leftrightarrow$ z est solution de $z''(\mathrm{t}) \ + z(\mathrm{t}) = e^{2t}$
$\Leftrightarrow$il existe α *et* β constantes réelles telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = z(\ln(x)) = \frac{1}{3}e^{2\ln(x)} + \alpha\cos(\ln(x)) + \beta\sin(\ln(x)) = \frac{1}{3}x^2 + \alpha\cos(\ln(x)) + \beta\sin(\ln(x))$

Résolution de (E_2) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* : $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ *i.e.* $\alpha = -1$. On pose $k(x) = y(x)x$.
Alors y est solution de(E_2) $\Leftrightarrow \forall x > 0, k''(x)x^2 + xk'(x) = \ln(x)$
$\Leftrightarrow$il existe α constante réelle telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, k'(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{ln^2(x)}{2x}$
$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, k(x) = \alpha\ln(x) + \frac{1}{6}(\ln(x))^3 + \beta \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = \frac{k(x)}{x} = \alpha\frac{\ln(x)}{x} + \beta\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{6}(\ln(x))^3}{x}$