

Programme de colle 15

Chapitre 10 Suites réelles et suites complexes.

- **Définitions :**
 - suite réelle , suite complexe , représentation
 - suite bornée
 - suite réelle majorée, minorée, croissante, décroissante
 - suite réelle ou complexe ayant une limite finie
 - suite réelle ayant une limite infinie
 - suite convergente, suite divergente.
- **Premières propriétés fondamentales des suites :**
 - Toute suite convergente est bornée. Si $a < L < b$ alors toute suite réelle de limite finie L est encadrée, à partir d'un certain rang par a et b . En particulier, toute suite ayant une limite strictement positive (resp. négative) est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang. Toute suite réelle ayant une limite infinie n'est pas bornée...
 - Théorème Unicité de la limite.
 - Caractérisation d'une suite convergente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - L = \dots \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = \dots \Leftrightarrow \forall n, |u_n - L| \leq \varepsilon_n \text{ tel que } \lim_n \varepsilon_n = 0$$
 - Théorème des gendarmes ou de limite par encadrement.
- **Borne sup. ou inf. :**
 - Définition d'une borne sup ou inf finie. Extension aux bornées infinies
 - Relation min et inf. Relation max et sup.
 - Caractérisation par les epsilon d'une borne sup. ou inf finie
 - Caractérisation séquentielle d'une borne sup. ou inf. (même infinie).
- **Autres propriétés fondamentales des suites :**
 - Théorème d'opérations sur les limites (« bornée $\times$ limite nulle », somme, produit inverse et quotient, somme d'une « bornée et d'une limite infinie » composition par une fonction)
 - Limite d'une suite monotone
 - Théorème de Césaro
 - Passage à la limite dans une inégalité.
- **Comparaison des suites :**
 - Définition d'une suite négligeable, équivalent ou dominée
 - Caractérisation par le quotient
 - Si $\forall n, u_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ alors $(L \in]0,1[\Rightarrow (u_n)CV \text{ vers } 0)$ et $(L \in]1, +\infty[\Rightarrow (u_n)DV \text{ vers } +\infty)$
 - Croissances comparées $\forall (\alpha, \beta, a) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times]1, +\infty[$, $\ln(n)^\alpha \ll_{+\infty} n^\beta \ll_{+\infty} a^n \ll_{+\infty} n! \ll_{+\infty} n^n$.
- **Suites complexes :** Caractérisation de la convergence d'une suite complexe par les suites des parties réelle et imaginaire.
- **Suites extraites :**
 - Définition
 - Théorème de limite d'une suite extraite d'une suite ayant une limite; preuve de la divergence d'une suite
 - Caractérisation de la limite d'une suite u par les deux suites extraites particulières : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
- **Suites adjacentes :**
 - Définition
 - Théorème de convergence et d'approximation de la limite.
 - Valeur décimale approchée d'un réel.
 - Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et aussi limite d'une suite de nombres irrationnels.
- **Suites explicites :**
 - ✓ Définition
 - ✓ Suite de la forme à $u_n = f(n)$.
- **Suites récurrentes :**
 - ✓ Définition ; calcul des termes.
- **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**
 - ✓ Définition
 - ✓ Théorème donnant l'expression explicite quand le second membre est nul
 - ✓ Méthode quand le second membre est non nul (suite particulière + suite « homogène »)
- **Suites périodiques**
 - ✓ Définition. Ecriture sous forme d' « infini-uplets ».

- ✓ Propriétés : valeurs, caractère borné et convergence.
- **Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.**
 - ✓ Définition.
 - ✓ Limites possibles de u
 - ✓ Lien entre monotonie de f et celle de (u_n) ou de (u_{2n}) et (u_{2n+1})
 - ✓ Utilisation de $g: (x \mapsto f(x) - x)$:
 - pour connaître le nombre de points fixes de f
 - pour connaître le signe de $u_1 - u_0$ (et donc le sens de monotonie de u lorsque f est croissante)
 - ✓ Cas où f est contractante.
- **Suites implicites**
 - ✓ Définition
 - ✓ Méthodes d'étude.

CONNAITRE ET SAVOIR ENONCER TOUS LES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DU COURS.

Savoir énoncer et démontrer les résultats suivants :

Q1) Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Q2) si u et v convergent vers respectivement L_1 et L_2 alors $u + v$ converge vers $L_1 + L_2$

Q3) Toute suite croissante et majorée a une limite finie et toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Q4) Théorème de convergence de deux suites adjacentes.

Q5) Soit a, b et c des constantes et $a \neq 0$ et (v_n) une suite. Si (t_n) vérifie $\forall n, at_{n+2} + bt_{n+1} + ct_n = v_n$ alors les suites (u_n) telles que : $\forall n, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = v_n$ sont les suites de la forme $(t_n + h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que (h_n) vérifie $\forall n, ah_{n+2} + bh_{n+1} + ch_n = 0$.

Q6) Soit u une suite bien définie vérifiant $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n \in D$.
- b) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et f est continue en L alors $f(L) = L$.
- c) si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est montone.
- d) si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont montones et de monotonie contraire.