Limites et continuité d'une fonction réelle de variable réelle

1 **RAPPELS préliminaires :**

1. Tout réel est la limite d'une suite de nombres rationnels et la limite d'une suite de nombres irrationnels.
2. si λ est un réel tel que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq \lambda \leq \varepsilon$ alors $\lambda = 0$.

Définition préliminaire : Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur un domaine D.

La bornée supérieure de f sur D est $sup_D f = \sup(f(D)) = sup\{f(x)/x \in D\}$.

La bornée inférieure de f sur D est $inf_D f = inf(f(D)) = inf\{f(x)/x \in D\}$

I Limites d'une fonction.

2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

■Soit a un point ou un bord réel ou infini de Df .

Si a est un réel alors $Df \cap [a-\delta, a+\delta]$ tel que $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$ est un voisinage de a dans Df.

Si $a = +\infty$ alors $Df \cap [M, +\infty[$ tel que $M \in \mathbb{R}^{+*}$ est un voisinage de $+\infty$ dans Df.

Si $a = -\infty$ alors $Df \cap]-\infty, M]$ tel que $M \in \mathbb{R}^{-*}$ est un voisinage de $-\infty$ dans Df.

a est un point ou un bord de Df non isolé lorsque tout voisinage de a dans Df contient un autre réel que a.
Si I est un intervalle non trivial inclus dans Df et a est un bord ou un élément de I alors a est non isolé dans Df.

■Soit L un réel ou un infini. (en utilisant la notation $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ on écrira $L \in \overline{\mathbb{R}}$) .

Si L est un réel alors $[L-\varepsilon, L+\varepsilon]$ tel que $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ est un voisinage de L (dans $\mathbb{R}$).

Si $L = +\infty$ alors $[A, +\infty[$ tel que $A \in \mathbb{R}^{+*}$ est un voisinage de $L = +\infty$ (dans $\mathbb{R}$).

Si $L = -\infty$ alors $]-\infty, B]$ tel que $B \in \mathbb{R}^{-*}$ est un voisinage de $L = -\infty$ (dans $\mathbb{R}$).

■NB : l'intersection de deux voisinages de a dans Df est encore un voisinage de a dans Df et est donc non vide.

Si a et b sont deux réels ou infinis distincts alors il existe un voisinage V_a de a et un V_b de b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$.

NB : si a est un point isolé de Df alors pour x très proche et distinct de a, $f(x)$ n'existe pas et il est donc insensé d'étudier la limite de f en a. **Désormais, a est un point non isolé de Df. Il existe alors des réels dans Df aussi proches de a que je le souhaite.**

3 **Définition générale** :Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un point non isolé de Df.

$f(x)$ tend L quand x tend vers a lorsque quel que soit le voisinage V de L dans $\mathbb{R}$, il existe un voisinage W de a dans Df tel que $\forall x \in W, f(x) \in V$.

Cela signifie que tous les réels $f(x)$ sont aussi proches que je le souhaite de L dès que x est suffisamment proche de a .

Autrement dit, On note $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $L = \lim\limits_{a} f$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$ et L est la(**) limite de f en a . (**) unicité de cette limite.

4 **■Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$** : $f(x)$ tend vers le réel L qd x tend vers le réel a lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (|x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon).$$

$$\text{Ou } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \in [a-\delta, a+\delta] \Longrightarrow f(x) \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]).$$

$$\text{Ou encore } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta_{(\varepsilon)} \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in \underbrace{Df \cap [a-\delta, a+\delta]}_{\substack{un\ voisinage \\ de\ a\ dans\ Df}}, f(x) \in \underbrace{[L-\varepsilon, L+\varepsilon]}_{\substack{un\ voisinage \\ de\ L\ dans\ \mathbb{R}}}.$$

https://www.geogebra.org/classic/guu523jb

Cela signifie que la distance entre $f(x)$ et L est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite dès que la distance entre x et a est suffisamment petite (proche de 0). Graphiquement, Cf se rapproche du point $A(a, L)$ quand x tend vers a.

5 **■Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$: $f(x)$ tend le réel L qd x tend vers $+\infty$ lorsque :**

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \geq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$ ou de manière équivalente lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in \underbrace{Df \cap [M, +\infty[}_{\substack{un\ voisingae\ de \\ +\infty\ dans\ Df}}, \ f(x) \in \underbrace{[L-\varepsilon, L+\varepsilon]}_{\substack{un\ voisinage\ de \\ L\ dans\ \mathbb{R}}}.$$

Cela signifie que la distance entre $f(x)$ et L est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite de L dès que x est suffisamment grand. Graphiquement, Cf se rapproche de la droite d'équation $y = L$ quand x s'approche de $+\infty$.

https://www.geogebra.org/classic/fckqrckr

6 **■Cas $L \in \mathbb{R}$ et $a = -\infty$: $f(x)$ tend le réel L quand x tend vers $-\infty$ lorsque**

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}^{-*} / \forall x \in Df, (x \leq M \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon)$ ou de manière équivalente lorsque

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M \in \mathbb{R}^{-*} / \forall x \in \underbrace{Df \cap]-\infty, M]}_{\substack{un\ voisingae\ de \\ -\infty\ dans\ Df}},\ f(x) \in \underbrace{[L-\varepsilon, L+\varepsilon]}_{\substack{un\ voisinage\ de \\ L\ dans\ \mathbb{R}}}.$

Cela signifie que la distance entre $f(x)$ et L est aussi petite (proche de 0) que je le souhaite de L dès que x est suffisamment petit (très négatif). Graphiquement, Cf se rapproche de la droite d'équation $y = L$ quand x s'approche de $-\infty$.

7 **■Cas L =$+\infty$ et $a \in \mathbb{R}$:** $f(x)$ tend vers $+\infty$ qd x tend vers le réel a lorsque :

$\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta_A \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (|x - a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A)$

Cela signifie que $f(x)$ est aussi grand que je le veux dès que x est suffisamment proche de a. Graphiquement, Cf se rapproche de la droite d'équation $x = a$ quand x s'approche de a.

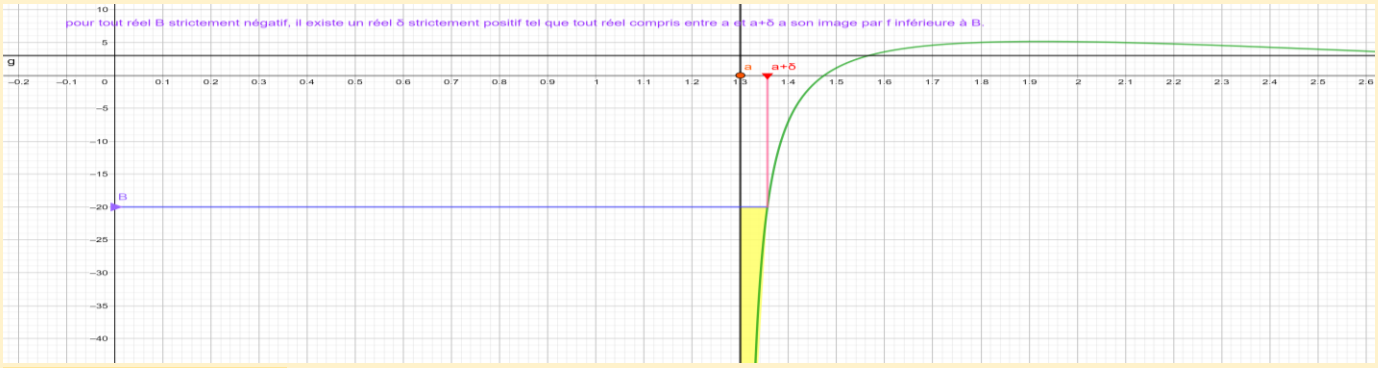
8 **■Cas L =$-\infty$ et $a \in \mathbb{R}$:** $f(x)$ tend vers $-\infty$ qd x tend vers le réel a lorsque :

$\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists \delta_{(B)} \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (|x - a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq B)$

ou encore lorsque $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in \underbrace{Df \cap [a-\delta, a+\delta]}_{\substack{un\ voisinage \\ de\ a\ dans\ Df}}, f(x) \in \underbrace{]-\infty, B]}_{\substack{un\ voisinage \\ de -\infty\ dans\ \mathbb{R}.}}$.

Cela signifie que $f(x)$ est aussi petit (dans le sens « très négatif ») que je le veux dès que x est suffisamment proche de a. Graphiquement, Cf se rapproche de la droite d'équation $x = a$ quand x s'approche de a.

https://www.geogebra.org/classic/p3rrxszd



9 **■Cas L =$+\infty$ et $a = +\infty$:** $f(x)$ tend vers $+\infty$ qd x tend vers $+\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \geq M \Longrightarrow f(x) \geq A)$.

Cela signifie que $f(x)$ est aussi grand que je le veux dès que x est assez grand. Graphiquement, Cf s'éloigne dans la direction Nord-Est. **https://www.geogebra.org/classic/guu523jb**

10 **■Cas L =$-\infty$ et $a = +\infty$:** $f(x)$ tend vers $-\infty$ qd x tend vers $+\infty$ lorsque $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists M \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \geq M \Longrightarrow f(x) \leq B)$.

cela signifie que $f(x)$ est aussi petit (très négatif) que je le veux dès que x est assez grand. Graphiquement, Cf s'éloigne dans la direction Sud-Est.

11 **■Cas L =$-\infty$ et $a = -\infty$:** $f(x)$ tend vers $-\infty$ qd x tend vers $+\infty$ lorsque $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists M \in \mathbb{R}^{-*} / \forall x \in Df, (x \leq M \Longrightarrow f(x) \leq B)$.Cela signifie que $f(x)$ est aussi petit (très négatif)que je le veux dès que x est assez petit(très négatif). Graphiquement, Cf s'éloigne dans la direction Sud-ouest.

12 **■Cas L =$+\infty$ et $a = -\infty$:** $f(x)$ tend vers $-\infty$ qd x tend vers $+\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists M \in \mathbb{R}^{-*} / \forall x \in Df, (x \leq M \Longrightarrow f(x) \geq A)$.

Cela signifie que $f(x)$ est aussi grand que je le veux dès que x est assez petit (très négatif). Graphiquement, Cf s'éloigne dans la direction Nord-Ouest.

13 **Exemples : 1)**Montrons avec la définition que $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Je cherche $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x \in [-2-r, -2+r], x^2 \in [4-\varepsilon, 4+\varepsilon]$.

Considérons $x \in [-4,0]$. Alors, $x^2 \in [4-\varepsilon, 4+\varepsilon] \Leftrightarrow |x^2-4| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x-2||x+2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x+2| \leq \frac{\varepsilon}{|x-2|}$.

De plus, $2 \leq |x-2| \leq 6$ donc $\frac{1}{|x-2|} \leq \frac{1}{2}$. Donc $\frac{\varepsilon}{|x-2|} \geq \frac{\varepsilon}{6}$.

Par suite, posons alors $r = \min\left(\frac{\varepsilon}{6}, 2\right)$. $Alors\ r \geq |x+2| \Longrightarrow \begin{cases} x \in [-4,0] \\ \frac{\varepsilon}{|x-2|} \geq |x+2| \end{cases} \Longrightarrow\ x^2 \in [4-\varepsilon, 4+\varepsilon]$.

Donc $r = \min\left(\frac{\varepsilon}{6}, 2\right)$convient.

2) Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique et admettant une limite en $+\infty$ est constante.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodique (où T réel strictement positif) et admettant une limite L en $+\infty$.

<u>Montrons que f est constante.</u>

- Imaginons un instant que L soit infinie.

Soit $B \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in [A, +\infty[, f(t) \geq B$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} nT = +\infty$ il existe un entier naturel n tel que $nT \in [A, +\infty[$. Et par suite $f(nT) \geq B$. Or $f(0) = f(nT)$ puisque f est T −périodique. Donc, $f(0) \geq B$.

J'en déduis que $\forall B \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(0) \geq B$. Donc, $f(0)$ est un réel supérieur à tous les réels positifs….. ce qui est impossible !!!

Donc L n'est pas infinie. J'en conclus que <u>L est finie</u>.

- Montrons que f est constante égale à L.

Soit x un réel. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in [A, +\infty[, |f(t) - L| \leq \varepsilon$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} x + nT = +\infty$ il existe un entier naturel n tel que $x + nT \in [A, +\infty[$. Et par suite $|f(x+nT) - L| \leq \varepsilon$. Or $f(x) = f(x+nT)$ puisque f est T −périodique. Donc, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

J'en déduis que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. Donc, $|f(x) - L|$ est un réel positif inférieur à tous les réels strictement positifs. Cela signifie que $|f(x) - L| = 0$ autrement dit, $f(x) = L$.

J'en conclus que f est constante égale à L.

14 **Définition d'une limite à gauche ou à droite :**

a. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ ou \ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ lorsque $\forall A \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \in]a, a+\delta] \Longrightarrow f(x) \in [A, +\infty[)$.

b. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$ lorsque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in \underbrace{Df \cap]a, a+\delta]}_{voisinage\ à\ droite\ de\ a\ dans\ Df}, f(x) \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon]$.

c. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ lorsque $\forall B \in \mathbb{R}^{-*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in Df, (x \in [a-\delta, a[\Longrightarrow f(x) \in]-\infty, B])$

d. Lorsqu'elle existe, $\lim\limits_{x \to a^{+(-)}} f(x)$ est la limite à droite (à gauche) de f en a.

Définition d'une limite par valeurs supérieures :

a. La notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et sur un voisinage de a, $f(x) \geq L$. On dit que f tend vers L en a par valeurs supérieures.

b. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L^- \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et sur un voisinage de a, $f(x) \leq L$.

15 **Exemple :** Montrons avec cette définition que $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$.

Soit $A < 0$. Je cherche $r > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$, $(0 < 1-x \leq r \Longrightarrow \frac{2-x}{x-1} < A)$.

Soit x un réel tel que $0 < x < 1$.

$$\frac{2-x}{x-1} < A(<0) \Leftrightarrow \frac{2-x}{1-x} > -A(>0) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2-x} < \frac{-1}{A} \Leftrightarrow 1-x < \frac{-1}{A}(2-x).$$

Or, $0 > 2-x > 1\ et\ 0 > \frac{-1}{A}(2-x) > \frac{-1}{A}$.

Posons donc $r = \min\left(1, \frac{-1}{A}\right)$.

Alors $0 < 1-x < r \Longrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1-x < \frac{-1}{A}(2-x) \end{cases} \Longrightarrow \frac{2-x}{x-1} < A$. Donc $r = \min\left(1, \frac{-1}{A}\right)$ convient.

J'en conclus que $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$.

16 **Propriété d'**UNICITE de la limite

a. Il y a <u>unicité de la limite</u> d'une fonction en un « point » donné si cette limite existe. (on dit LA limite de de f en a). Idem il y a unicité de la limite à droite ou à gauche lorsqu'elle existe.

b. Si $a \in Df$ alors $f(a)$ est la seule limite possible de f en a .

17 **Caractère borné**

a. Si f a une limite finie L en a alors f est bornée sur un voisinage de a dans Df et pour tous réels u et v tels que : $u < L < v$, il existe un voisinage V de a tel que : $\forall x \in V, u < f(x) < v$.
b. Si f tend vers une limite strictement positive (respectivement négative) en a alors f est strictement (négative) positive sur un voisinage de a dans Df. (la réciproque est fausse)
c. Une fonction ayant une limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) « quelque part » n'est pas majorée (resp. minorée).

18 **Exemples** : Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe un réel A tel que : $\forall x > A, \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \in \left[\frac{\sqrt{ab}}{2}, \frac{3\sqrt{ab}}{2}\right]$.

<u>Etudions la limite de</u> $f(x) = \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ <u>quand $x \to +\infty$</u> :

$f(x) = \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \overset{car\ \frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}>0}{\triangleq} e^{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}$. Posons $h(x) = x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} = 1\ et\ \ln(t) \sim_1 (t-1)$, $h(x) = x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right) \sim_{+\infty} x\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} - 1\right]$.

De plus, $\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} - 1 = \frac{e^{\frac{\ln(a)}{x}}+e^{\frac{\ln(b)}{x}}-2}{2} = \frac{1+\frac{\ln(a)}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(a)}{x}\right)^2+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)+1+\frac{\ln(b)}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(b)}{x}\right)^2+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)-2}{2} = \frac{\frac{\ln(ab)}{x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\ln(a)}{x}\right)^2+\left(\frac{\ln(b)}{x}\right)^2\right]+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}$

Ainsi, $\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} - 1 = \frac{\ln(ab)}{2x} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\ln(a)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\ln(b)}{x}\right)^2\right] + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Donc, $x\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} - 1\right] = \frac{\ln(ab)}{2} + \frac{1}{4x}[(\ln(a))^2 + (\ln(b))^2] + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2} - 1\right] = \frac{\ln(ab)}{2}$. Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{\frac{\ln(ab)}{2}} = e^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$.Comme $\frac{\sqrt{ab}}{2} < \sqrt{ab} < \frac{3\sqrt{ab}}{2}$, il existe donc un réel A tel que : $\forall x > A, \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \in \left[\frac{\sqrt{ab}}{2}, \frac{3\sqrt{ab}}{2}\right]$.

19 **Caractérisation d'une LIMITE FINIE Ici <u>L est un réel</u>.**
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) - L = 0 \iff f(x) - L = o_a(1) \iff f$ s'écrit sous la forme $f(x) = L + \delta(x)\ et\ \lim\limits_{x\to a} \delta(x) = 0$.
$\iff \lim\limits_{x\to a} |f(x) - L| = 0$
$\iff$il existe une fonction h telle que pour tout x de Df au voisinage de a, $|f(x) - L| \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$

20 **Caractérisation par la limite à droite et à gauche**
Ici a désigne un point non isolé de Df tel que $\forall r > 0,]a, a + r[\cap Df \neq \emptyset\ et\ ]a - r, a[\cap Df \neq \emptyset$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
<u>1er cas $a \notin Df$.</u>Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
<u>2er cas $a \in Df$.</u>Alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff L = f(a)\ et\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \iff f$est continue en a.

21 **Exemples :**

1) Etudier la limite de $h(x) = \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}}$ quand $x \to \frac{1}{2}$.

$\forall x > \frac{1}{2}, \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}} = \frac{2x-1}{2-2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)}{1-\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{2x}+1) \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} -1$.

$\forall x \in]0, \frac{1}{2}[, \frac{|1-2x|}{2-\sqrt{8x}} = -\frac{2x-1}{2-2\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-\sqrt{2x}} = -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{2x}-1)(\sqrt{2x}+1)}{1-\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2x}+1) \underset{x\to\frac{1}{2}^-}{\longrightarrow} 1$.

2) Etudier les limites de $g(x) = \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ en 0^+et en 0^- et en $+\infty$.

$\forall x \in]0,1[, \lfloor x\rfloor = 0\ donc\ \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 0$ et par suite, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 0$.

$\forall x \in]-1,0[, \lfloor x\rfloor = -1\ donc\ \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = -\frac{1}{x}$ et par suite, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = -\infty$.

3) Existe un réel L tel que f: $\left(x \mapsto \begin{cases} \frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}}-x}{x^2\ln(x)} & si\ x > 0 \\ L\ si\ x = 0 & \\ \left(\frac{sinx}{x}\right)^{1/x^2} & si\ x < 0 \end{cases}\right)$ soit continue en 0 ?

$\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}}-x}{x^2\ln(x)} = \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}\ln(1+x)}-x}{x^2\ln(x)} = \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)}-x}{x^2\ln(x)} = \frac{e^{\ln(x)\left(1-\frac{x}{2}+o_0(x)\right)}-x}{x^2\ln(x)} = \frac{e^{\ln(x)-\frac{x\ln(x)}{2}+o_0(x\ln(x))}-x}{x^2\ln(x)} = \frac{xe^{-\frac{x\ln(x)}{2}+o_0(x\ln(x))}-x}{x^2\ln(x)} =$

$\frac{e^{-\frac{x\ln(x)}{2}+o_0(x\ln(x))}-1}{x\ln(x)} \underbrace{\sim_0}_{car\ \lim\limits_{x\to0} -\frac{x\ln(x)}{2}+o_0(x\ln(x)) \overset{CC}{\triangleq} 0\ et\ e^t-1\sim_0 t} \frac{\left[-\frac{x\ln(x)}{2}+o_0(x\ln(x))\right]}{x\ln(x)} \sim_0 -\frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}}-x}{x^2\ln(x)} = -\frac{1}{2}$. Donc si L existe alors $L = -\frac{1}{2}$.

$\left(\frac{sinx}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o_0(x^2)\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+o_0(x^2)\right)} = e^{-\frac{1}{6}+o_0(1)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{6}}$. Donc si L existe alors $L = e^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{2}$.Ainsi L n'existe pas.

22 **Théorème de caractérisation séquentielle de la limite *TCSL***

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff$ toute suite (u_n) de nombres réels telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

23 **APPLICATIONS** : 1) Au calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. si $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a\\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = L\end{cases}$ alors « par composition » ou par (TCSL⟹), $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

2) Pour montrer qu'une fonction f ne tend pas vers L en a, il suffit de trouver une suite (u_n) telle que $\forall n, u_n \in Df$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq L$ par (TCSL⟸).

3) Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) nombres réels telle que $\forall n, u_n \in Df, v_n \in Df$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$ par (TCSL⟸).

24 **Exemples :** 1) Justifier que sinus, cosinus et tangente et cotangente n'ont pas de limite en $\pm\infty$.

2) Démontrer que $f: \left(x \mapsto \begin{matrix} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) \; si \; x > 1 \\ 0 \; si \; x = 1 \end{matrix} \right)$ n'a pas de limite en 1.

Comme $f(1)$ existe , La seule limite possible de f en 1 est $f(1) = 0$. Montrons que f ne tend pas vers 0 en 1.

Cherchons une suite (u_n) telle que $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^+\\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq 0\end{cases}$ .Et pour cela on va construire une suite (u_n) telle que $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\\ f(u_n) = \frac{1}{2}\end{cases}$

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{u_n-1}}\right) = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{u_n-1}} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \Leftarrow \frac{1}{u_n-1} = \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)^2 \Leftarrow u_n - 1 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)^2} \Leftarrow u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)^2}$.

Posons $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)^2}$.Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ *et* $\forall n, f(u_n) = \frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq 0$. J'en déduis que f ne peux pas tendre vers 0 en 1 donc f n'a pas de limite en 1.

3) Soit $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$. Montrer que f n'a pas limite en$+\infty$.

$f(2n) = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $f(2n+1) = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1$, je peux affirmer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

II Propriétés

25 **Théorème d'opérations sur les limites** : Soit b, f *et* g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définis sur un même voisinage de a réel ou infini .On suppose que b est bornée et f et g ont chacune une limite en a.

Soit L *et* L' réels ou infinis tels que $\lim\limits_{t\to a} f(t) = L$ et $\lim\limits_{t\to a} g(t) = L'$.

Soit un réel non nul α indépendant de t.

a. $|f|$ et αf ont une limite en a et $\lim\limits_{t\to a} |f(t)| = |L|$ et $\lim\limits_{t\to a} \alpha f(t) = \alpha L$.

b. Si $L = 0$ alors $\lim\limits_{t\to a} b(t) f(t) = 0$.

c. Si $L = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{t\to a} b(t) + f(t) = \pm\infty$.

d. Si $L + L'$ n'est pas une forme indéterminée (« *FI* ») alors $f + g$ a une limite en a et $\lim\limits_{t\to a} f(t) + g(t) = L + L'$.

e. Si $L \times L'$ n'est pas une forme indéterminée alors fg a une limite en a et $\lim\limits_{t\to a} f(t) \times g(t) = L \times L'$.

f. Si $\frac{L}{L'}$ n'est pas une forme indéterminée et $\frac{1}{g}$ définie au voisinage de a alors $\frac{f}{g}$ a une limite en a et $\lim\limits_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{L}{L'}$.

26 NB : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f^2(x) = 0$. Ce résultat est faux si la limite est non nulle.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$. Mais la réciproque est fausse . Contre-exemple : $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

27 **Généralisation limite d'une somme <u>finie</u> ou d'un produit <u>fini</u> de fonctions admettant des limites :**

Si $\forall k \in [\![1, n]\!], \lim\limits_{t\to a} f_k(t) = L_k$ et $\sum_{k=1}^{n} L_k$ *n'est pas une FI* alors $\lim\limits_{t\to a} \sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} L_k$.

Si $\forall k \in [\![1, n]\!], \lim\limits_{t\to a} f_k(t) = L_k$ et $\prod_{k=1}^{n} L_k$ *n'estpas une FI* alors $\lim\limits_{t\to a} \prod_{k=1}^{n} f_k(t) = \prod_{k=1}^{n} L_k$.

28 **Exemples** : si $n \in \mathbb{N}$ et $a, b_0, .., b_n \in \mathbb{R}$ tq $b_n \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k a^k$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \begin{cases} sgn(b_n)\infty \; si \; n \geq 1 \\ b_0 \; si \; n = 0 \end{cases}$

29 **Théorème de limite d'une fonction composée**

Soit φ une fonction telle que $f \circ \varphi$ est définie sur un voisinage de a.

Si $\begin{cases}\lim\limits_{t\to a} \varphi(t) = b\\ \lim\limits_{x\to b} f(x) = L\end{cases}$ alors $f \circ \varphi$ a une limite en a et $\lim\limits_{t\to a} f(\varphi(t)) = L$.

30 **Théorème de Changement de variable pour se ramener à une limite en 0** :

a. **Ici a est un réel.** Posons $t = x - a$ *et* $g(t) = f(x) = f(t + a)$ .Alors $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ *existe* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$*existe* et, le cas échéant, sont égales.

b. **Ici $a = \pm\infty$.** Posons $t = \frac{1}{x}$ *et* $g(t) = f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Alors , $\lim\limits_{t\to 0^+ (0^-)} g(t)$ *existe* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty (-\infty)} f(x)$ *existe* et, le cas échéant, sont égales.

31 **Théorème de limite par encadrement:** Soit <u>L un réel.</u>

a. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ alors g a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

b. Si $f(x) \leq g(x)$au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors g a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

c. Si $f(x) \geq g(x)$au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ alors g a une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

Exemples : Etudier la limite de $g(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. Par conséquent,

Si $x > 0,\ 1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$. Les deux expressions qui encadrent $g(x)$ tendent vers 1 en $+\infty$, j' en déduis que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Si $x < 0,\ 1 - \frac{1}{x} > \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \geq 1$. Les deux expressions qui encadrent $g(x)$ tendent vers 1 en $-\infty$, j' en déduis que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

J'en déduis que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

32 **Théorème de limite d'une fonction monotone**

Soit $a\ et\ b$ deux réels ou infinis tq $a < b$. Si f est une fonction définie et monotone sur $]a, b[$ alors

1. f admet une limite en a^+et une limite en b^- qui sont, <u>non</u> respectivement (cela dépend du sens de monotonie de f), $inf_{]a,b[}f$ et $sup_{]a,b[}f$ et éventuellement infinies. Plus précisément,

$$\begin{cases} f\ croissante \\ f\ majorée\quad sur\ ]a,b[\\ f\ minorée \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1 = inf_{]a,b[}f \ \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = L_2 = sup_{]a,b[}f \ \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]a,b[, L_1 \leq f(x) \leq L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f\ décroissante \\ f\ non\ majorée\ sur\ ]a,b[\\ f\ minorée \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = sup_{]a,b[}f\ = +\infty \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = inf_{]a,b[}f\ = L_2 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]a,b[, L_2 \leq f(x) \end{cases}$$ OU (…)

2. f admet , en tout réel c de $]a, b[$, des limites finies en c^+et en c^-et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim\limits_{x\to c^+} f(x)\ si\ f\ croissante \\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim\limits_{x\to c^+} f(x)\ si\ f\ décroissante \end{cases}$.

33 **Théo de passage à la limite dans une inégalité :**

Si $f\ et\ g$ tendent vers respectivement $L_1\ et\ L_2$ en a et que sur un voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$ alors $L_1 \ \leq\ L_2$.

NB : ce théorème ne permet pas de prouver l'existence de limites, il permet juste de comparer des limites dont je connais déjà l'existence

34 **QUELQUES OUTILS :**

Utiliser les symétries de Cf

Utiliser les limites à droite et à gauche

Utiliser les suites

Repérer une suite bornée

Encadrer

Mettre les termes dominants en facteurs dans le ln, sous une racine

Faire apparaitre des croissances comparées ($FI\ \frac{\infty}{\infty}\ ou\ 0 \times \infty$).

Factoriser par $(x - a)$ quand on cherche une limite en un réel a de deux quotients de polynômes s'annulant en a.($FI\ \frac{0}{0}$)

Faire apparaitre des taux d'accroissement (FI: $\frac{0}{0}$)

Utiliser la quantité conjuguée ou tout autre propriété de fonction

Faire apparaitre un taux d'accroissement

Utiliser les équivalents et développement limités usuels

35 **Exercices :**

1. Calculons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^4-16}{\sqrt{x^3+8}}$ et $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^4-x+1}}{4-3x^2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x + e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-x+2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{cos^2x} + \frac{1}{\ln(sin(x))}\right)$ et

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{\ln(x)}{x}}-x}{x^2\ln(x)}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln(3+cos(x))\,sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{ch(x)} - \sqrt{sh(x)}$.

2. Etudier les limites en 0 et en $\pm\infty$ de $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

3. Etudier la limite en 0 de $f(x) = cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

III Continuité

36 **Définitions** : Ici $a \in Df$ et a non isolé dans Df. Et D un sous ensemble de $\mathbb{R}$ (ou de Df).

1. f est **continue en a** lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (i.e. lorsque f a une limite en a).
2. f est **continue à droite en a** lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
3. f est **continue à gauche en a** lorsque $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
4. f est **continue sur D** lorsque f est continue en tout point de D.

37 **NB : Le domaine de continuité de f i.e. le domaine sur lequel f est continue est inclus dans Df.**

38 **Interprétation graphique :**

- f est continue en a lorsque la courbe de f passe par le point $A(a, f(a))$ et que Cf est ininterrompue au voisinage de A .
- **Attention**, si D n'est pas un intervalle et f est continue sur D alors la courbe de f s'interrompt à chaque trou de D.

39 **Propriétés** :

1. f est continue en a sietssi $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ sietssi f est continue à droite et à gauche en a.
2. Si f est continue en a alors pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \end{cases}$, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.
3. f n'est pas continue en a dès qu'il existe une suite u telle que : $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a). \end{cases}$

Théorème d'opérations sur les fonctions continues:

a. Une combinaison linéaire de deux fonctions continues sur un domaine D est continue sur D .
b. Le produit de deux fonctions continues sur un domaine D est continue sur D .
c. Le quotient de deux fonctions continues sur un domaine D est continue sur D dès que la fonction du dénominateur ne s'annule jamais sur D.
d. La valeur absolue d'une fonction continue sur D est continue sur D.
e. Si f est continue sur D et g est continue sur E et $\forall x \in D, f(x) \in E$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur D .

Conséquence : toute fonction dont l'expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur domaine de définition respectif est continue sur son propre domaine de définition.

40 **Continuité d'autres fonctions usuelles**. Les fonctions identité, puissances (entières , rationnelles et réelles), racine carrée, cosinus, sinus, Arcsinus, Arccosinus, Arctangente, racine nième, logarithme et exponentielle, les fonctions, polynomiales, tangente, cotangente, valeur absolue, sont continues sur leur domaine de définition respectif.
La fonction partie entière est continue uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
PARMI NOS FONCTIONS USUELLES, SEULE LA PARTIE ENTIERE N'EST PAS CONTINUE SUR SON DOMAIONE DE DEFINTION TOUT ENTIER .

41 **NB :** il n'existe aucun théorème d'opérations entre une fonction h non continue sur tout son domaine de définition et une fonction continue sur son domaine de définition. Il faudra étudier point par point la continuité. Les deux exercices précédents illustrent qu'on ne peut rien conclure avant étude !

42 **Exercices** :

1. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| < \sqrt{|x-y|}$. Montrer que f est continue.

Soit a un réel. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |f(x) - f(a)| < \sqrt{|x-a|}$. Comme $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{|x-a|} = 0$, $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$ ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
J'en conclus que f est continue en a. Et finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f définie par : $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq \lfloor x \rfloor$ donc $f(x)$ existe. Ainsi, $Df = \mathbb{R}$.
Dans l'expression de f, seule la fonction partie entière n'est pas continue sur tout sn domaine de définition. Cette fonction partie entière n'est continue que sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Par conséquent, f est continue au moins sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. (ou bien considérons a un réel non entier.
$\forall x \in]\lfloor a \rfloor, \lfloor a \rfloor + 1[, f(x) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{x - \lfloor a \rfloor}$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{a - \lfloor a \rfloor} = f(a)$. J'en déduis que f est continue en a.)
Soit a un entier relatif.
$\forall x \in]a, a+1[, f(x) = a + \sqrt{x-a}$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a + \sqrt{a-a} = a = f(a)$. J'en déduis que f est continue à droite en a.
$\forall x \in]a-1, a[, f(x) = a - 1 + \sqrt{x-(a-1)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a - 1 + \sqrt{a-(a-1)} = a - 1 + \sqrt{1} = a = f(a)$. J'en déduis que f est continue à gauche en a. Ainsi, $f$est continue en a. J'en déduis que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

3. Pour quelles valeurs réelles de a , b et c, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$ où f: $\left(x \mapsto \begin{cases} \frac{ax+1}{x^3+8} \; si \; x \in]-\infty;-2[\\ bx \; si \; x \in [-2;2] \\ \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c \; si \; x \in]2;+\infty[\end{cases}\right)$?

Posons $g(x) = \frac{ax+1}{x^3+8} \; et \; p(x) = bx$ et $h(x) = \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c$.

g est définie et continue sur $]-\infty;-2[$, p est définie et continue sur $[-2;2]$ et h est définie et continue sur $]2;+\infty[$. J'en déduis que f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue au moins sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} p(x) = p(2) = 2b$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} p(x) = p(-2) = -2b$.

Etudions les limites de f en $2^+ et \; (-2)^-$:

$\forall x < -2, \lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{ax+1}{x^3+8} = \begin{cases} \infty \; si \; -2a+1 \neq 0 \\ FI \; si \; -2a+1 = 0 \end{cases}$. Donc pour que f soit continue en (-2) il faut que $a = \frac{1}{2}$. Est-ce suffisant ?

$\frac{\frac{1}{2}x+1}{x^3+8} = \frac{\frac{1}{2}(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{(x^2-2x+4)} donc \lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^3+8} = \frac{1}{24}$. Donc pour que f soit continue en (-2), il faut et il suffit que

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -2b = \frac{1}{24} \end{cases} i.e. \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{48} \end{cases}$. Désormais $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{48} \end{cases}$.

$\forall x > 2, \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c = -\frac{\sin(2-x)}{(2-x)(x+2)} + c = -\frac{1}{x+2}\frac{\sin(2-x)}{(2-x)} + c$ donc $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\sin(2-x)}{x^2-4} + c = -\frac{1}{4} + c$.

Donc pour que f soit continue en 2, il faut et il suffit que $-\frac{1}{4} + c = 2b = -\frac{1}{24}$ $i.e. \; c = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$.

J'en conclus que f est continue sur $\mathbb{R}$ sietssi $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-1}{48} \\ c = \frac{5}{24} \end{cases}$.

4. Déterminer le domaine de continuité de f: $(x \mapsto \lfloor 2x-1 \rfloor)$.

$Df = \mathbb{R}$. Dans l'expression de f, seule la fonction partie entière n'est pas continue sur tout son domaine de définition. Cette fonction partie entière n'est continue que sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

De plus, $2x-1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/2x-1 = p \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}/x = \frac{p+1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = \frac{k}{2}$. Donc $2x-1 \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z}/x \neq \frac{k}{2}$.

J'en déduis que f est continue au moins sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{k}{2}/ \; k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Etudions la continuité de f en $\frac{k}{2}$. On sait que $f\left(\frac{k}{2}\right) = \lfloor k-1 \rfloor = k-1$.

Or, $\forall x \in \left]\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}\right[, 2x \in]k-1, k[\; et \; 2x-1 \in]k-2, k-1[\; donc \; f(x) = k-2 \; et \; \lim\limits_{x\to\frac{k}{2}} f(x) = k-2 \neq f\left(\frac{k}{2}\right)$. Donc f n'est pas continue à gauche en $\frac{k}{2}$. Ainsi, f n'est pas continue en $\frac{k}{2}$.

J'en conclus que f est continue uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{k}{2}/ \; k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Déterminer toutes les fonctions continues en 0 et telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$.

Les fonctions constantes sont solutions.

Soit f un solution de notre problème i.e. f est continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Alors, $\forall X \in \mathbb{R}, f(X) \overset{(*)}{\triangleq} f\left(\frac{X}{2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) \underset{avec\,X=x}{\overset{(*)}{\triangleq}} f\left(\frac{x}{2}\right) \underset{avec\,X=\frac{x}{2}}{\overset{(*)}{\triangleq}} f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) \underset{avec\,X=\frac{x}{2^2}}{\overset{(*)}{\triangleq}} f\left(\frac{\frac{x}{2^2}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^3}\right) \underset{avec\,X=\frac{x}{2^3}}{\overset{(*)}{\triangleq}} \ldots \underset{avec\,X=\frac{x}{2^{n-1}}}{\overset{(*)}{\triangleq}} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \; pour \; tout \; n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$ donc sa limite quand $n \to +\infty$ est $f(x)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$, le TCSL (ou la composition) assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. Alors par unicité de la limtie d'une suite, $f(x) = f(0)$. Ainsi, f est constante.

J'en conclus que les fonctions constantes sont les solutions de notre problème.

6. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que : tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D. On considère $f \; et \; g$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et qui vérifient : $\forall d \in D, f(d) = g(d)$. Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) \; i.e. \; f = g$.

Soit x un réel . Alors il existe une suite (d_n) d'éléments de D telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = x$. Alors $\forall n, f(d_n) = g(d_n)$.

Comme $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$ (puisque f est continue en x) et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = x$, le $TCSL$ assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = f(x)$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(d_n) = g(x)$.Et par suite, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(d_n) = g(x)$. Ainsi, $f = g$.

7. Soit $f(x) = \begin{cases} x \; si \; x \in \mathbb{Q} \\ x^2 si \; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$. Montrer que f n'est continue qu'en 0 et en 1.

- Soit $a \in \mathbb{Q}\backslash\{0,1\}$. Alors $f(a) = a$.

D'après le cours (chap Suites, paragraphe suites extraites) , il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ qui tend vers a. Alors $\forall n, f(y_n) = y_n^2$ et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = a^2 \underbrace{\neq}_{car\; a\notin\{0,1\}} a = f(a)$. Donc, le TCSL assure que f ne peut pas tendre vers $f(a)$ en a ; autrement dit, f n'est pas continue en a.

- Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Alors $f(a) = a^2$.

D'après le cours (chap Suites, paragraphe suites extraites) , il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui tend vers a. Alors $\forall n, f(x_n) = x_n$ et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = a \underbrace{\neq}_{car\ a\notin\{0,1\}} a^2 = f(a)$. Donc, le $TCSL$ assure que f ne peut pas tendre vers $f(a)$ en a ; autrement dit, f n'est pas continue en a.

- Soit $a = 1$. Alors $f(a) = 1$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Comme $\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$, il existe $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$tel que : $\forall x \in [1-r_1, 1+r_1], |x^2-1| \leq \varepsilon$.
Comme $\lim\limits_{x\to1} x = 1$, il existe $r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$tel que : $\forall x \in [1-r_2, 1+r_2], |x-1| \leq \varepsilon$. ($r_2 = \varepsilon$ convient)
Posons $r_0 = \min(r_1, r_2)$. Alors : $\forall x \in [1-r_0, 1+r_0], |x^2-1| \leq \varepsilon$ et $|x-1| \leq \varepsilon$ donc $|f(x)-1| \leq \varepsilon$.
Cela prouve que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)$. Ainsi, f est continue en 1.

- Soit $a = 0$. Alors $f(a) = 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Comme $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$, il existe $r_1 \in \mathbb{R}^{+*}$tel que : $\forall x \in [-r_1, r_1], |x^2| \leq \varepsilon$.
Comme $\lim\limits_{x\to0} x = 0$, il existe $r_2 \in \mathbb{R}^{+*}$tel que : $\forall x \in [-r_2, r_2], |x| \leq \varepsilon$. ($r_2 = \varepsilon$ convient)
Posons $r_0 = \min(r_1, r_2)$. Alors : $\forall x \in [-r_0, r_0], |x^2| \leq \varepsilon$ et $|x| \leq \varepsilon$ donc $|f(x)-0| \leq \varepsilon$. Cela prouve que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0.
J'en conclus que f n'est continue qu'en 0 et en 1.

43 **Définition** : Soit a un réel au bord non isolé de Df mais n'appartenant pas à Df. f est **prolongeable par continuité en a** lorsque $f\ a\ une\ limite\ finie\ L\ en\ a$. La fonction $\tilde{f}$ définie sur $Df \cup \{a\}$ par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ x \in Df \\ L\ si\ x = a \end{cases}$ est continue en a et est appelé **le prolongement par continuité** de f en a.

44 **Exercice :** Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}\ tel\ que\ p \neq q$. Montrer que $f : \left(x \mapsto \frac{x^p-1}{x^q-1}\right)$ est prolongeable par continuité en 1 et donner son prolongement.

Posons $g(t) = f(t+1). Alors\ g(t) = \frac{(1+t)^p-1}{(1+t)^q-1} = \frac{1+pt+o_0(t)-1}{1+qt+o_0(t)-1} = \frac{pt+o_0(t)}{qt+o_0(t)} = \frac{t(p+o_0(1))}{t(q+o_0(1))} = \frac{p+o_0(1)}{q+o_0(1)}$. Donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{t\to0} g(t) = \frac{p}{q}$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 1 par la valeur $\frac{p}{q}$.

Autre méthode : $\frac{x^p-1}{x^q-1} = \frac{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})}{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{q-1})} = \frac{(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})}{(1+x+x^2+\dots+x^{q-1})}$. Donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \frac{p}{q}$.

45 **Définition** : f est **lipschitzienne** sur D lorsqu'il un réel M tel que pour tous $a\ et\ b$ de D , $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. M est le rapport de Lipchitz de f. f est **contractante** sur D lorsqu'il un réel $M \in [0,1[$ tel que pour tous $a\ et\ b$ de D , $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$ i.e. lorsque f est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1.

46 **Théo :** Toute fonction lipschitzienne sur D est continue sur D.

Démo

IV Propriétés fondamentales des fonctions continues sur un intervalle.

47 **Théorème des valeurs intermédiaires TVI :**
Version 1 : Si f est **continue** sur le **segment** $[a,b]$ alors tout réel compris entre $f(a)\ et\ f(b)$ a au moins un antécédent par f dans $[a,b]$.
Version 2 : Si f est **continue** sur **l'intervalle** I alors $f(I)$ est un intervalle et les extrémités de $f(I)$ sont $inf_I f$ et $sup_I f$.i.e. $f(I) = |inf_I f\ , sup_I f|$.

48 **Exercice** : Soit $f : \left(x \mapsto xsin\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)$. Décrire $f([0,1[)$.

f est continue que l'intervalle $[0,1[$. Donc $f([0,1[)$ est un intervalle dont les extrémités sont les bornes inf et sup de $f([0,1[)$.
Déterminons ces bornes :
$\forall x \in [0,1[, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \leq 1\ et\ 0 \leq x < 1\ donc -1 < f(x) < 1$. Ainsi, $f(I)$ est borné donc ses bornées sont finies.
Montrons que $1 = supf(I)$.
1 majore $f(I)$. Cherchons, ensuite, une suite d'éléments de $f(I)$ de limite 1. Il faut alors trouver une suite (u_n) telle que $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[\end{cases}$.
pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1\ avec\ u_n < 1, il\ suffit\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-\ et\ sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1$.
Or, $sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1 \Leftarrow \frac{1}{1-u_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow 1-u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \Leftarrow u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.
Posons $\forall n, u_n = 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Alors, $\forall n, u_n < 1\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-\ et\ sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = 1$. Donc, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[\end{cases}$. La suite $(f(u_n))$ est une suite d'éléments de $f(I)$ de limite 1. J'en conclus que $1 = supf(I)$.
Montrons que $-1 = inff(I)$.
-1 minore $f(I)$. Cherchons, ensuite, une suite d'éléments de $f(I)$ de limite -1. Il faut alors trouver une suite (u_n) telle que $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = -1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[\end{cases}$. Pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = -1\ avec\ u_n < 1, il\ suffit\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-\ et\ sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = -1$.
Or, $sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = -1 \Leftarrow \frac{1}{1-u_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftarrow 1-u_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi} \Leftarrow u_n = 1 - \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.
Posons $\forall n, u_n = 1 - \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Alors, $\forall n, u_n < 1\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-\ et\ sin\left(\frac{1}{1-u_n}\right) = -1$. Donc, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = -1 \\ \forall n, u_n \in [0,1[\end{cases}$. La suite $(f(u_n))$ est une suite d'éléments de $f(I)$ de limite- 1. J'en conclus que $-1 = inff(I)$.

49 **Méthode de dichotomie pour déterminer une valeur approchée d'une racine de fonction**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et telle que : $f(a)f(b)<0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$sont de signes opposés). Alors le TBCSM assure que f s'annule une seule fois sur $[a,b]$ en un réel $\alpha \in]a,b[$. Lorsque l'équation $f(x)=0$ est impossible à résoudre de manière algébrique, la méthode de dichotomie permet alors, dans cette situation, de déterminer une valeur approchée de α à une précision ε choisie.

Voici le principe de dichotomie :

Etape 1 : On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ alors $\alpha=\frac{a+b}{2}$. Et c'est fini : on a trouvé la valeur exacte de α.

Ou bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est de signe opposé à $f(a)$. Alors $\alpha \in]a,\frac{a+b}{2}[$. Posons $a_1=a\ et\ b_1=\frac{a+b}{2}$.

Soit $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est de signe opposé à $f(b)$. Alors $\alpha \in]\frac{a+b}{2},b[$. Posons $a_1=\frac{a+b}{2}\ et\ b_1=b$.

$\boxed{|b_1-a_1|=\frac{b-a}{2}}$

Alors $\alpha \in]a_1,b_1[$ et $a_1\ et\ b_1$sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2}$

Etape 2 : On calcule $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ alors $\alpha=\frac{a_1+b_1}{2}$. Et c'est fini.

Ou bien $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ est de signe opposé à celui de $f(a_1)$. Alors $\alpha \in]a_1,\frac{a_1+b_1}{2}[$. Posons $a_2=a_1\ et\ b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.

Soit $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ est de signe opposé f à celui de $f(b_1)$. Alors $\alpha \in]\frac{a_1+b_1}{2},b_1[$. Posons $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}\ et\ b_2=b_1$.

$\boxed{|b_2-a_2|=\frac{b-a}{2^2}}$

Alors $\alpha \in]a_2,b_2[$ et $a_2\ et\ b_2$ sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2^2}$

…

Etape n : On calcule $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$. Ou bien $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)=0$ alors $\alpha=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Et c'est fini.

Ou bien $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)\neq 0$ alors

Soit $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$ et$f(a_{n-1})$ sont de signes opposés. Alors $\alpha \in]a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}[$. Posons $a_n=a_{n-1}\ et\ b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.

Soit $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$ et $f(b_{n-1})$ sont de signes opposés. Alors $\alpha \in]\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}[$. Posons $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ et\ b_n=b_{n-1}$.

$\boxed{|b_n-a_n|=\frac{b-a}{2^n}}$

Alors $\alpha \in]a_n,b_n[$ et $a_n\ et\ b_n$ sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision $\frac{b-a}{2^n}$.

L'étau se resserre donc autour de la racine α de f sur $]a,b[$. Il suffit de savoir quel entier n choisir pour obtenir la précision ε souhaitée. Il suffit de choisir $n\in\mathbb{N}$ tel que : $\frac{b-a}{2^n}\leq\varepsilon$.

Enfin, $0<\frac{b-a}{2^n}\leq\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2^n}{b-a}\geq\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow 2^n\geq\frac{b-a}{\varepsilon}\Leftrightarrow \ln(2^n)\geq\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\Leftrightarrow n\ln(2)\geq\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$.

Prenons $n_0=\left\lfloor\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}\right\rfloor+1$. Alors $a_{n_0}\ et\ b_{n_0}$ sont deux valeurs approchées de α par défaut et excès à la précision ε.

50 **Conséquences du TVI (CTVI) :**

1) Soit $a\ et\ b$ deux réels tels que $a<b$. Si f est continue sur le segment $[a,b]$ et $f(a)\ et\ f(b)$ sont de signes contraires $(i.e.\ f(a)f(b)<0)$ alors f s'annule au moins un fois sur $[a,b]$.
2) Soit $a\ et\ b$ deux réels tels que $a<b$. Si f est continue et strictement monotone sur le segment $[a,b]$ et $f(a)\ et\ f(b)$ sont de signes contraires $(i.e.\ f(a)f(b)<0)$ alors f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$.
3) Soit $a\ et\ b$ deux réels ou infinis tels que $a<b$. Si f est continue sur $]a,b[$ et $\lim_{x\to a^+}f(x)\ et\ \lim_{x\to b^-}f(x)$ existent et sont de signes contraires alors f s'annule au moins un fois sur $]a,b[$.
4) Si f est continue sur l'intervalle I et f ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I (ou bien f est strictement positive sur I ou bien f est strictement négative sur I).

51 **Application :** Toute fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$ continue admet un point fixe.

Soit f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$continue .
Montrons que f admet un point fixe sur $[a,b]$. i.e. qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que $f(c)=c$.
Je remarque que : $x\ point\ fixe\ de\ f \Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow f(x)-x=0$.
Par conséquent, introduisons $g(x)=f(x)-x$ et montrons que g s'annule sur $[a,b]$.
g est définie et continue sur $[a,b]$ (puisque g est la différence f et $id_{[a,b]}$qui sont définies et continues sur $[a,b]$).
Comme $\forall t\in[a,b], a\leq f(t)\leq b, a\leq f(a)\ et\ f(b)\leq b$ et par conséquent, $g(a)=f(a)-a\geq 0$ et $g(b)=f(b)-b\leq 0$.
Alors, le TVI assure que g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ en un réel c. Alors c est un point fixe de f sur $[a,b]$.

52 **Application :** Toute fonction polynomiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle.

Soit P une fonction polynomiale réelle de degré d impair. Posons $d=2m+1$ et $a_{2m+1}t^{2m+1}$ le terme dominant de P tq a_{2m+1}réel non nul.
Alors $P(t)\sim_{\pm\infty}a_{2m+1}t^{2m+1}$. Donc $\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}a_{2m+1}t^{2m+1}=\mathrm{sgn}(a_{2m+1})\infty\ et\ \lim_{t\to-\infty}P(t)=\lim_{t\to-\infty}a_{2m+1}t^{2m+1}=-\mathrm{sgn}(a_{2m+1})\infty$.
Donc P prend une valeur positive et une valeur négative. De plus, P est continue sur $\mathbb{R}$. Le TVI assure alors que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

53 **Exercices :**

1.a. Justifier que $f:(x\mapsto x^3-x+3)$ a une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées. On note $x_1,x_2\ et\ x_3$ ses racines telles que $x_1\in\mathbb{R}$.
1.b. Cherchons une valeur approchée de x_1à 10^{-2}par dichotomie.

1.c. Calculer $x_1+x_2+\ x_3\ ,x_1x_2x_3\ et\ \ x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

a. D'après ce qui précède, f est polynomiale de degré 3 impair, donc f admet au moins une racine réelle.

Etudions f pour montrer que cette racine réelle est la seule :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x,\ f'(x)=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. D'où le tableau des variations suivantes :

x	$-\infty$	x_1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0					$+\infty$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3=\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+3=\frac{-2}{3\sqrt{3}}+3>0.$ Donc, d'après les variations de f, $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)>0.$

f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$ et f prend une valeur strictement négative et une valeur strictement positive, donc f s'annule une et une seule fois sur $\left]-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$.

De plus, les variations de f sur $\left[\frac{-1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$ et le signe de $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ assurent que f ne s'annule pas sur $\left[\frac{-1}{\sqrt{3}},+\infty\right[$. J'en conclus que f n'annule une et une seul fois sur $\mathbb{R}$. Notons x_1 cette racine réelle.

Alors on peut factoriser $f(x)$ par $x-x_1$ et l'autre facteur $T(x)$ est polynomiale réelle, de degré 2 et sans racine réelle. Donc $\Delta_T<0$ et T admet deux racines complexes non réelles et conjuguées notées $x_2\ et\ x_3$.

b. $f(-1)=3>0>-2=f(-2)$. Donc $x_1\in]-2,-1[$.

```python
A=-2
B=-1
while B-A>1/1000:
  if ((A+B)/2)**3-(A+B)/2+3<0:
    A=(A+B)/2
  else:
    B=(A+B)/2
print(A,B)


def approx(E):
  A=-2
  B=-1
  while B-A>E:
    if ((A+B)/2)**3-(A+B)/2+3<0:
      A=(A+B)/2
    else:
      B=(A+B)/2
  return A,B
print(approx(1/100))
```

Powered by trinket

```
-1.671875 -1.6708984375
(-1.671875, -1.6640625)
```

c. Alors $\forall x, f(x)=x^3-x+3=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$.

Alors par unicité des coefficients de notre fonction polynomiale, $x_1+x_2+x_3=0\ ,x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3=-1\ et\ x_1x_2x_3=-3$.

Par conséquent, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_3x_1+x_2x_3)=2.$

2.Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,(f(x))^2=1+x^2$.

La fonction $\left(x\mapsto\sqrt{1+x^2}\right)$ est solution.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,(f(x))^2=1+x^2$. Alors $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\left(f(x)\right)^2>0$ donc $f(x)\neq0$. Comme f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, f ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x\in\mathbb{R}\ ,f(x)=\pm\sqrt{1+x^2}$. Par conséquent, Ou bien $\forall x\in\mathbb{R}\ ,f(x)>0$ et par suite, $\forall x\in\mathbb{R}\ ,f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ou bien $\forall x\in\mathbb{R}\ ,f(x)>0$ et par suite, $\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(x)=-\sqrt{1+x^2}$. Les candidates solutions sont donc les deux fonctions $\left(x\mapsto\sqrt{1+x^2}\right)$ et $\left(x\mapsto-\sqrt{1+x^2}\right)$.

Ces deux candidates sont continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,(f(x))^2=1+x^2$ donc sont solutions.

Ainsi , $\left(x\mapsto\sqrt{1+x^2}\right)$ et $\left(x\mapsto-\sqrt{1+x^2}\right)$ sont les solutions de notre problème.

54 **<u>Théorème fonction continue sur un segment TFCS (admis) :</u>** Si f est **continue** sur le **segment** $[a,b]$ alors f admet un maximum M et un minimum m sur $[a,b]$ et $f([a,b])=[m,M]=[f(c),f(d)]$ où $c\ et\ d$ deux réels $de\ [a,b]\ tq\ \ M=f(d)\ et\ m=f(c)$.

55 **Exercice :** 1) Montrons que toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes une infinité de fois.

Soit f une fonction T-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ où T réel strictement positif fixé.

Alors f est continue sur le segment $[0,T]$; par conséquent, il existe m et M réels tels que $f([0,T])=[m,M]$ et il existe deux réels a et b dans $[0,T]$ tels que $m=f(a)\ et\ M=f(b)$.

Soit x un réel. Comme $\mathbb{R}=\cup_{k\in\mathbb{Z}}[kT,kT+T[$, il existe $k_0\in\mathbb{Z}$ tel que $x\in[k_0T,k_0T+T[$. Donc $x-k_0T\in[0,T[$. Par conséquent, $f(x-k_0T)\in[m,M]$. Comme f est T-périodique, $f(x-k_0T)=f(x)$. Par conséquent, $f(x)\in[m,M]$. Ainsi, f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $m\ et\ \ M$. Comme $m=f(a)$ ($resp.M=f(b)$), $m\ (resp.M)$ est atteint et est le minimum (resp. maximum) de f sur $\mathbb{R}$. De plus $\forall k\in\mathbb{Z},m=f(a)=f(a+kT)$. Donc ce minimum est atteint une infinité de fois.

2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\sin(x))}{\sqrt{x}}=0.$

$\forall x\in\mathbb{R},\sin(x)\in[-1,1]$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue sur le segment $[-1,1]$ donc il existe m et M deux réels tels que $\forall t\in[-1,1],m\le f(t)\le M$. Par suite, $\forall x\in\mathbb{R},m\le f(\sin(x))\le M$. Donc, la fonction $(x\mapsto f(\sin(x)))$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Comme de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, je peux conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(\sin(x))}{\sqrt{x}}=0.$

56 **<u>Théorème des bijections continues et strictement monotones TBCSM:</u>**

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur **l'intervalle** I alors

1) $J=f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, segment, semi-ouvert) que I et ses extrémités sont les limites de f aux bords de I.

2) Tout élément de J a exactement un antécédent par f dans I . Autrement dit, f est bijective de I sur J.
3) $f^{-1}: J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et de même monotonie que f.

57 **Exemple :** $f: \left(x \mapsto xsh\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]1, +\infty[$.

58 **Exercices**:

1. Montrer que l'équation $(E):\ e^{x^2} = 1 + x$ admet exactement deux solutions : 0 et une solution strictement positive.

1. Posons $f(x) = e^x + \sqrt{x-2} - 7$.
$Df = [2, +\infty[$. f est continue et strictement croissante puisque $(x \mapsto e^x), (x \mapsto \sqrt{x-2}\,)$ le sont et $(x \mapsto -7)$ est constante. De plus,
Posons $f(x) = e^{x^2} - (1 + x)$. $Df = \mathbb{R}$. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Et $\forall x, f'(x) = 2xe^{x^2} - 1$.
D'une part, $\forall x, f'(x) < 0$ et, par suite, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Comme $f(0) = 0, \forall x < 0, f(x) < 0$. Par conséquent, (E) n' a aucune solution sur $\mathbb{R}^{-*}$.
D'autre part, $\forall x \geq 1, f'(x) > 0$ et, par suite, f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $f(1) = e - 2 > 0, \forall x \geq 1, f(x) > 0$. Par conséquent, (E) n' a aucune solution sur $[1, +\infty[$.
Enfin, sur l'intervalle [0,1], f' est continue et dérivable et $\forall x, f''(x) = (4x^2 + 2)e^{x^2} > 0$. Donc f'est strictement croissante sur [0,1] et $f'(0) < 0 < f'(1)$. Alors le corollaire du TVI assure que f' s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$ en un réel α.
Et $\forall x \in [0, \alpha[, f'(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha, 1], f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, 1]$. Comme $f(0) = 0,\ f(\alpha) < 0$. De plus, $f(1) > 0$. Donc le corollaire du TVI assure que f s'annule une unique fois sur $]\alpha, 1]$ en un réel β. J'en conclus que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ en β.
Cherchons une valeur approchée de β par la méthode de dichotomie.
Cette racine β se trouve entre 0 et 1.
Posons $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

2. Donner une valeur approchée de l'unique point fixe de la fonction cosinus.

Soit $g(x) = \cos(x) - x$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0$ et g' ne s'annule qu'en des points isolés.
Donc g est strictement décroissante . De plus, $g(\pi) < 0$ et $g(-\pi) = -1 + \pi > 0$. Donc g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$. J'en conclus que cos n'a qu'un seul point fixe.
En appliquant la mathode de dichotomie à g :

```
from math import *
def pointfixe(E):
  A=-pi
  B=pi
  while B-A>E:
    if cos((A+B)/2)-(A+B)/2>0:
      A=(A+B)/2
    else:
      B=(A+B)/2
  return A,B
print(pointfixe(1/100))
```

Réponse :

```
(0.7363107781851077, 0.7424467013366502)
```

59 **<u>Théorème fondamental d'existence d'une primitive TFI:</u>**
Si f est <u>continue</u> sur l'<u>intervalle</u> I alors pour tout $a \in I, F_a: (x \mapsto \int_a^x f(t)dt)$ est une primitive de f sur I .

60 **<u>Conséquences fondamentales du théorème fondamental d'existence d'une primitive CTFI:</u>**
Si f est <u>continue</u> sur l'<u>intervalle</u> I alors
1) f admet une primitive F sur I
2) les primitives de f sur I sont les applications de I dans $\mathbb{R}$ de la forme $F + c$ où c constante réelle
3) il existe une et une seule primitive G de f sur I qui vérifie $G(a) = \lambda$ dès que $a \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ fixés
4) Pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(t)dt$ existe et $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I .