

Programme de colle 16

Chapitre 10 Suites réelles et suites complexes.

- **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**
 - ✓ Définition
 - ✓ Théorème donnant l'expression explicite quand le second membre est nul
 - ✓ Méthode quand le second membre est non nul (suite particulière + suite « homogène »)
- **Suites périodiques**
 - ✓ Définition. Ecriture sous forme d' « infini-uplets ».
 - ✓ Propriétés : valeurs, caractère borné et convergence.
- **Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.**
 - ✓ Définition.
 - ✓ Limites possibles de u
 - ✓ Lien entre monotonie de f et celle de (u_n) ou de (u_{2n}) et (u_{2n+1})
 - ✓ Utilisation de $g: (x \mapsto f(x) - x)$:
 - pour connaître le nombre de points fixes de f
 - pour connaître le signe de $u_1 - u_0$ (et donc le sens de monotonie de u lorsque f est croissante)
 - ✓ Cas où f est contractante.
- **Suites implicites**
 - ✓ Définition
 - ✓ Méthodes d'étude.

Chap 11: Limites et continuité d'une fonction réelle.

I Limites

1. **Définition des différents limites** (finie ou infinie en un réel ou un infini) d'une fonction. Limite à droite et à gauche.
 Définition générale avec les voisinages. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a un élément ou bord de Df non isolé. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
 - Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un voisinage W de a dans Df tel que $\forall x \in V, f(x) \in W$.
 - Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a^+ lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in]a, a+r[\cap Df, f(x) \in V$.
 - Ici $a \in \mathbb{R}$, f tend vers L en a^- lorsque pour tout voisinage V de L , il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in]a-r, a[\cap Df, f(x) \in V$.
2. **Unicité de la limite.** Limite en un point du domaine de définition.
 - Si f tend vers L_1 et L_2 en a alors $L_1 = L_2$
 - Si f est définie en a alors la seule limite possible de f en a est $f(a)$.
3. **Caractérisation d'une limite finie par majoration :**
 Si $L \in \mathbb{R}$ et au voisinage de a , $|f(x) - L| \leq \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
4. **Caractérisation séquentielle de la limite.** Utilisation des suites pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite quelque part.
 f tend vers L en a si et seulement si pour toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$.
5. **Caractérisation de la limite par la limite à droite et à gauche.**
 f tend vers L en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
6. **Caractère borné d'une fonction ayant une limite finie.** Signe d'une fonction ayant une limite strictement positive (resp. négative). Caractère non borné d'une fonction ayant une limite infinie.
 - Si f tend vers un réel L en a et m et m' sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$.
 - Si f tend vers une limite strictement positive en a alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.
7. **Théorème d'opérations sur les limites :** limite d'une valeur absolue, d'une somme, produit, quotient, limite d'une fonction produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle, limite d'une fonction composée
 - Si b est une fonction bornée au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} b(x)\varepsilon(x) = 0$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et $L + L'$ n'est pas une FI alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + L'$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et LL' n'est pas une FI alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot L'$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et $\frac{L}{L'}$ n'est pas une FI et g ne s'annule pas au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L$ et $g \circ f$ est définie au voisinage de a alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = L$.
8. **Changement de variable pour se ramener à une limite en zéro.**
 - Si a est un réel alors $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(a+t) = L)$ et $(\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^\pm} f(a+t) = L)$
 - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^\pm} f(\frac{1}{t}) = L$
9. **Théorème de limite par encadrement.**
 - Si L est un réel et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ et au voisinage de a , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et au voisinage de a , $f(x) \leq h(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ et au voisinage de a , $h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$

10. Passage à la limite dans une inégalité.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et $g(x) \geq f(x)$ sur un voisinage de a alors $L' \geq L$.

11. Limite d'une fonction monotone.

- Si f est une fonction monotone sur $]a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existent et pour tout réel $c \in]a, b[$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ existent et sont finies.
- Si f est croissante sur $]a, b[$ alors $\forall c \in]a, b[$, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} \inf_{]a, b[} f & \text{si } f \text{ est minorée} \\ +\infty & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} \sup_{]a, b[} f & \text{si } f \text{ est majorée} \\ -\infty & \text{si } f \text{ est minorée} \end{cases}$
- Si f est décroissante sur $]a, b[$ alors $\forall c \in]a, b[$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \begin{cases} \sup_{]a, b[} f & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{si } f \text{ est minorée} \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \begin{cases} \inf_{]a, b[} f & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{si } f \text{ est majorée} \end{cases}$

II Continuité

1. Définition d'une fonction continue en a , continue à gauche et à droite en a , continue sur un domaine.

- f est continue en un réel a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite en a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

2. Caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite : f continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

3. Caractérisation séquentielle de la continuité : f est continue en a si et seulement si toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

4. Théorème d'opérations sur les fonctions continues : combinaison linéaire, valeur absolue, produit, quotient et composée.

5. Continuité des fonctions usuelles.

6. Prolongement par continuité.

f est prolongeable par continuité en a lorsque f a une limite finie en a . Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f} : \begin{cases} x \mapsto f(x) & \text{si } x \in Df \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a et est appelé le prolongement par continuité en a .

7. Fonction lipchitzienne, fonction contractante

f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Si de plus $M \in [0, 1[$ alors f est dite contractante.

III Continuité sur un intervalle

8. Théorème des valeurs intermédiaires : Deux versions

si f est continue sur $[a, b]$ alors tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a, b]$.

si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle et ses extrémités sont $\inf f$ et $\sup f$

Et ces conséquences :

si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule sur $[a, b]$.

si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule une et une seule fois sur $[a, b]$.

si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I .

9. Image d'un segment par une fonction continue .

Une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment et admet un minimum et un maximum sur ce segment.

10. Théorème des bijections continues et strictement monotones

Si f est strictement monotone et continue sur un intervalle I alors

- $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses extrémités sont les limites de f aux bords de I
- f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f .

QUESTIONS DE COURS :

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus. Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaître :

Q1 : Soit u une suite bien définie vérifiant $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$.

- si $f(D) \subset D$ et $u_0 \in D$ alors $\forall n, u_n \in D$.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ et f est continue en L alors $f(L) = L$.
- si f est croissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_n) est montone.
- si f est décroissante sur D et $\forall n, u_n \in D$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont montones et de monotonie contraire.

Q2 : Caractère bornée : Si f tend vers un réel L en a et m et m' sont deux réels tels que $m < L < m'$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, m \leq f(x) \leq m'$ et si $L > 0$ alors il existe un voisinage V de a dans Df tel que $\forall x \in V, 0 < f(x)$.

Q3 : Caractérisation séquentielle de la limite

Q4 : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L'$ et $L + L'$ n'est pas une FI alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + L'$.

Q5 : Théorème de limite d'une fonction monotone

Q6 : Théorème des valeurs intermédiaires.