Nombres complexes

I Premières définitions.

1. Définition de $\mathbb{C}$

1 **Théorème (admis) :** Il existe un unique ensemble, noté $\mathbb{C}$, vérifiant :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $(+)$ et $(\times)$ prolongeant celles de $\mathbb{R}$ et possédant les mêmes propriétés (associativité, commutativité, éléments neutres, symétrique et inverse, distributivité, **intégrité**).
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que : $i^2 = -1$.
- Tout élément z *de* $\mathbb{C}$ s'écrit de manière <u>unique</u> sous la forme (dite algébrique) $z = a + ib$ où a *et* b sont réels.

Tout élément de $\mathbb{C}$ est appelé un **nombre complexe** et $\mathbb{C}$ est appelé le corps des complexes ou l'ensemble des nombres complexes.

2 **NB :** Soient $z = a + ib$ où a *et* b *réels et* $z' = a' + ib'$ où a' et b' réels deux complexes,
- $-z = (-a) + i(-b) = -a - ib$ est l'opposé de z.
- $si\ z$ non nul, alors a ou b non nuls (car $0 = 0 + i0$ est la seule ecriture de 0 sous la forme $a + ib$) alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \underbrace{=}_{\substack{\bar{z}=a-ib \\ \text{est le conjugué} \\ \text{de } z\ (\text{Cf I } 4)}} \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$ est l'inverse de z.
- $z + z' = a + a' + i(b + b')$ *et* $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$.
- $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *ou* $z' = 0$.
- $z^0 = 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots . \times z}_{n\ fois} = z \times z^{n-1}$ *et si* $z \neq 0$, $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$.

Exemple important : $\forall n \in \mathbb{Z},\ i^{2n} = (-1)^n$ *et* $i^{2n+1} = (-1)^n i$.

3 **Sommes et produits finis de complexes** : Soit $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n$ des nombres complexes.

$$\sum_{k=p}^{n} u_k \overset{def°}{=} u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} u_k \overset{def°}{=} u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_n$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k \overset{télescopage}{=} u_{n+1} - u_p \quad et \quad \prod_{k=p}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}} \overset{télescopage}{=} \frac{u_p}{u_{n+1}}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=p}^{n} z^k \overset{\substack{somme \\ géométrique}}{=} z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k = \begin{cases} z^p\left(\dfrac{1 - z^{n-p+1}}{1 - z}\right) si\ z \neq 1. \\ n - p + 1\ si\ z = 1 \end{cases}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n \overset{FBN}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n - b^n \overset{\substack{Théo.de \\ factorisation}}{=} (a - b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k .$$

4 **Exercices:** 1)Ecrivons z sous sa forme algébrique i.e. sous la forme $a + ib$ avec a et b réels. 1) $z = \frac{(2-3i)(-5+i)^2}{4-3i}$. 2) $z = (4 - 2i)^n$

2) Factoriser $z^2 + 1$.

3) Soit a un réel. Résoudre $z^2 + a^2 = 0$.

5 Une différence essentielle entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$ est totalement ordonné $(\leq)$ mais pas $\mathbb{C}$. Le signe $\leq$ entre deux complexes ne veut rien dire.

2. Forme algébrique

6 **Définition :** Soit z un nombre complexe. Alors il existe un unique réel a et un unique réel b tel que $z = a + ib$. $a + ib$ est appelée la **forme algébrique** de z .
a est appelé la **partie réelle** de z et noté $a = Re(z)$ et b est appelé la **partie imaginaire** de z et noté $b = Im(z)$.

7 **NB :** $\mathbb{R}$ est l'ensemble des complexes de la forme $z = a + i0 (= a)$ tel que a réel.

De **l'unicité de la forme algébrique** Soit z et z' deux nombres complexes. $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')\ et\ Im(z) = Im(z')$.

8 **Définition** : Le complexe z est dit **imaginaire pur** lorsque z est de le forme $0 + ib (= ib)$ tel que b réel . On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs .

De l'unicité de la forme algébrique : (unicité des parties réelle et imaginaire de chaque complexe) découlent les **propriétés** suivantes :

9 **propriétés :** Soient z et z' deux nombres complexes.
1. $z = 0$ si et ssi $Re(z) = Im(z) = 0$.
2. $z = z'$ si et ssi $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.
3. z est réel si et ssi $Im(z) = 0$ si et ssi $z = Re(z)$.
4. z imaginaire pur si et ssi $Re(z) = 0$ si et ssi $z = iIm(z)$.

10 **Proposition :** Soient z et z' deux nombres complexes .
- $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$.

Généralisation : Si les <u>λ_k sont réels</u> et les z_k sont des complexes alors
$$Re\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Re(z_k) \text{ et } Im\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Im(z_k).$$

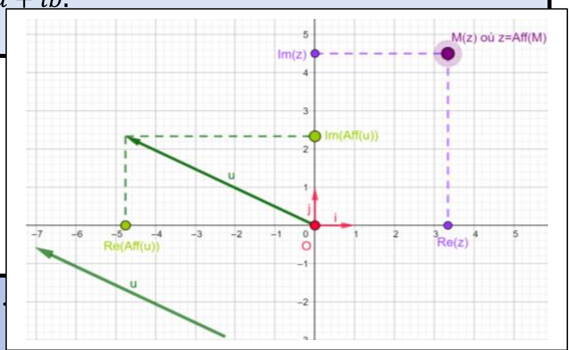
Démo : Ecrivons z et z' sous forme algébrique : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors par associativité et distributivité,
$z + z' = \underbrace{a + a'}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(b + b')}_{\in\mathbb{R}}$ et $\lambda z = \underbrace{\lambda a}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\lambda b}_{\in\mathbb{R}}$. Donc, $Re(z + z') = a + a' = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = b + b' = Im(z) + Im(z')$ et
$Re(\lambda z) = \lambda a = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda b = \lambda Im(z)$.

11 **ATTENTION :** en général, $Re(zz') \neq Re(z)Re(z')$ et $Im(zz') \neq Im(z)Im(z')$.

3. Interprétation géométrique

12 Désormais le plan géométrique $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Alors,
1. tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit de manière <u>unique</u> sous la forme $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ où a et b réels(sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$), (a, b) est <u>le</u> couple des composantes (ou coordonnées) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. tout point M de $\mathcal{P}$ est associé à un <u>unique</u> couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et ce couple (x, y) est appelé <u>le</u> couple de coordonnées de M dans le repère $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

13 **Définition** A tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y), on associe le complexe $z = x + iy$.
z est alors appelé **<u>l'</u>affixe** de M et M **l'image** ponctuelle de z . On note $z = Aff(M)$.
De même, à tout vecteur $\vec{u}$ de P de composantes (a, b), on associe le complexe $z = a + ib$.
z est alors appelé <u>l'</u>affixe de $\vec{u}$ et $\vec{u}$ <u>l'</u>image vectorielle de z . On note $z = Aff(\vec{u})$.



14 **NB :** 1) Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $Aff(M) = Aff(\overrightarrow{OM})$.
2) On verra que l'application $\Delta: (M \mapsto Aff(M))$est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$.

15 **Propriétés :** Soit M et M' deux points de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ et α et β réels .
1. M est sur l'axe des abscisses appelé l'axe réel **sietssi** $Aff(M)$ est réelle.
2. M est sur l'axe des ordonnées appelé l'axe imaginaire **sietssi** $Aff(M)$ est imaginaire pur.
3. M et M' sont symétriques par rapport à O si et ssi $Aff(M) = -Aff(M')$.
4. $Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha Aff(\vec{u}) + \beta Aff(\vec{v})$.
5. $Aff(\overrightarrow{MM'}) = Aff(M') - Aff(M)$.

Démo : 1. M est sur l'axe des abscisses appelé l'axe réel **sietssi** l'ordonnée de M est nulle **sietssi** $Im(Aff(M)) = 0$ **sietssi** $Aff(M)$ réelle.
2. M est sur l'axe imaginaire **sietssi** l'abscisse de M est nulle **sietssi** $Re(Aff(M)) = 0$ **sietssi** $Aff(M)$ est imaginaire pur.
3. M et M' sont symétriques par rapport à O **sietssi** *les* abscisses de M et M'sont opposées et leurs ordonnées aussi sietssi $Aff(M') = -Aff(M)$
4. Soit $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$.

Alors $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) + \beta(a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}) \underbrace{=}_{\substack{\text{règles de}\\ \text{calcul sur}\\ \text{les vecteurs}}} \alpha a\vec{\imath} + \alpha b\vec{\jmath} + \beta a'\vec{\imath} + \beta b'\vec{\jmath} \underbrace{=}_{\substack{\text{règles de}\\ \text{calcul sur}\\ \text{les vecteurs}}} (\alpha a + \beta a')\vec{\imath} + (\alpha b + \beta b')\vec{\jmath}$.

Donc, $Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha a + \beta a' + i(\alpha b + \beta b') = \alpha(a + ib) + \beta(a' + ib') = \alpha Aff(\vec{u}) + \beta Aff(\vec{v})$.

5. $Aff(\overrightarrow{MM'}) \underbrace{=}_{\substack{\text{Chasles}\\ \text{sur les vecteurs}}} Aff(\overrightarrow{M0} + \overrightarrow{0M'}) = Aff(\overrightarrow{0M'} - \overrightarrow{0M}) \underbrace{=}_{\substack{\text{prop.}\\ \text{précédente}}} Aff(\overrightarrow{0M'}) - Aff(\overrightarrow{0M}) \underbrace{=}_{NB\ 9} Aff(M') - Aff(M)$.

4. Conjugué

16 **Définition** : Soit $z = a + ib$ où a et b réels. $\bar{z} = a - ib$ est le complexe appelé le **conjugué** de z .

17 **Remarques** :1)en physique $\bar{z}$ est noté z^*
2)Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du point d'affixe z. Par conséquent,

18 **Prop** M *et* M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses **sietssi** $Aff(M') = \overline{Aff(M)}$.

19 **Propriétés** Soit z *et* z' deux complexes.

1. $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ *et* $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
2. $z \in \mathbb{R}$ **sietssi** $z = \bar{z}$.
3. $z \in i\mathbb{R}$ **sietssi** $z = -\bar{z}$.
4. $\bar{\bar{z}} = z$.
5. $z \times \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \in \mathbb{R}^+$
6. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $si\ z' \neq 0$.
7. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$
8. **Généralisation** : $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ *et* $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et et $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$.

II Forme trigonométrique.

1. Module

20 **Définition** : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Le **module** de z, noté $|z|$, est le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = OM = \|\vec{u}\| \quad \text{où } z = Aff(M) = Aff(\vec{u}).$$

21 **Théorème** Soit M et M' deux points. $|Aff(M) - Aff(M')| = MM' = |Aff(M') - Aff(M)|$.

22 **Description de lieux géométriques**

Soit Ω un point d'affixe $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ et r un réel strictement positif et $C(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r.

$C(\Omega, r)$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\Omega M = r$

$C(\Omega, r)$ est donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = r$

$C(\Omega, r)$ est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $(x - \omega_1)^2 + (y - \omega_2)^2 = r^2$

Le disque ouvert (sans bord) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ d'affixe z tels que $|z - \omega| < r$.

La médiatrice de $[A, B]$ où A et B d'affixes respectives a et b est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ d'affixe z telle que $|z - a| = |z - b|$.

$med[A, B] = \{M(z) / \ |z - a| = |z - b|\}$.

22b **Exemples** : Décrire géométriquement $C = \{M(x, y) / \ x^2 + y^2 - x = 4\}$ et $D = \{M(z) / |z| = 1 = |1 - z|\}$.

23 **Propriétés** Soient deux complexes z *et* z' d'images respectives M *et* M' .

1) Si z est un réel alors le module de z est égal à la valeur absolue de z.
2) $|z|$ est un réel positif et $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
3) $z = 0$ si et ssi $|z| = 0$.
4) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$.
5) si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (formule permettant d'obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{z}$).
7) $|zz'| = |z||z'|$ et si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
8) **Première inégalité triangulaire** : $|z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

et son cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et ssi $z' = 0$ *ou* $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ / z = \lambda z'$

si et ssi M *et* M' sont sur une même demi-droite d'origine O.

9) **Deuxième inégalité triangulaire** $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$

Généralisation : $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et $|\prod_{k=1}^{n} z_k| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n$.

Conséquence : En particulier *si* $\lambda \in \mathbb{R}^+$, *alors* $|\lambda z| = \lambda |z|$ et si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1.

2. Complexes de module 1

24 **Introduction –Définition** : Soit M un point du cercle trigonométrique et θ un réel tel que : $\theta \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

D'après le cours de trigonométrie, $(cos\theta, sin\theta)$ est le couple des coordonnées de M dans le repère R.

Donc, $Aff(M) = cos(\theta) + isin(\theta)$. Alors θ est alors appelé un **argument** de $Aff(M)$.

25 **Définition :** Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$. $e^{i\theta}$ est appelée **l'exponentielle imaginaire d'argument** θ .

26 **Valeurs particulières** : $e^{i0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, $e^{\frac{i\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

27 **Caractérisation :** Les complexes de la forme $e^{i\theta}$ où θ *réel* sont les affixes des points du cercle trigonométrique. Les complexes de module 1 sont les complexes de la forme $e^{i\theta}$ $tq\ \theta\ réel$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

28 **Propriétés** Soient θ *et* θ' deux réels.

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et ssi $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ **(deux arguments d'une même exponentielle imaginaire sont égaux modulo 2π) .**
3. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
4. $e^{i(-\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} \overset{notation}{\equiv} e^{-i\theta}$.
5. **Formules d'Euler** : $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
6. **Identités du Losange :** $1 + e^{i\theta} = 2cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - e^{i\theta} = -2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
7. **Formule de Moivre :** pour tout entier relatif n et tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

ie $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + \sin(n\theta)$

29 ⚠ $(cos\theta)^n \neq \cos(n\theta)$ *et* $(sin\theta)^n \neq \sin(n\theta)$

3. Arguments et forme trigonométrique d'un complexe non nul

31 **Définition :** Soit z un nombre complexe **non nul** affixe du point M et du vecteur $\vec{u}$. Tout réel θ tel que :

$\theta \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \equiv (\vec{\imath}, \vec{u})[2\pi]$ est appelé un **argument** de z **.** On note $arg(z)$ un argument quelconque de z .

L'**argument principal** de z est l'unique argument de z appartenant à $[0, 2\pi[$.

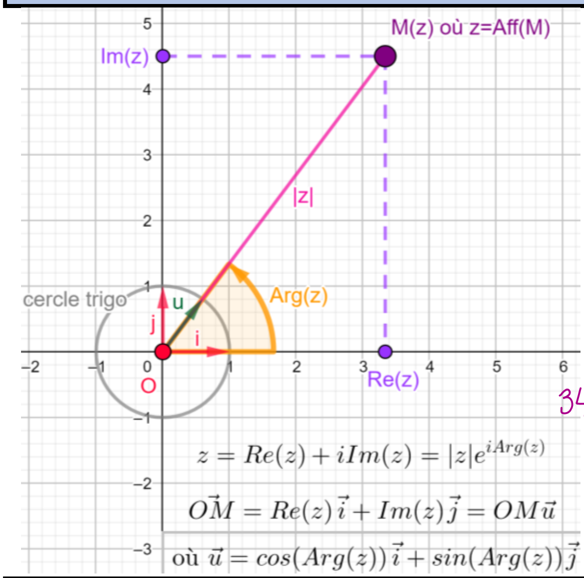
32 **Conséquences immédiates :** Soient z *et* z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M'. θ *et* θ' deux réels tels que θ argument de z .

1) θ' est un argument de z **sietssi** $\theta' \equiv \theta[2\pi]$.

Autrement dit, **les arguments de z sont tous les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.**

2) $arg(z) \equiv arg(z')[2\pi]$ **sietssi** M *et* M' sont sur une même demi-droite d'origine O.
3) $z \in \mathbb{R}^*$ **sietssi** $arg(z) \equiv 0[\pi]$. De même, $z \in \mathbb{R}^{+*}$ **sietssi** $arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
4) $z \in i\mathbb{R}^*$ **sietssi** $arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. Et, $z \in i\mathbb{R}^{-*}$ **sietssi** $arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

33 **Théorème et définition :** Tout complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = |z|e^{iarg(z)}$. C'est la **forme trigonométrique** de z.



Interprétation géométrique :
Si $\theta \equiv (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ alors $\overrightarrow{OM} = OM\vec{u}_\theta = |z|\vec{u}_\theta$ où $\vec{u}_\theta = (cos\theta)\vec{\imath} + (sin\theta)\vec{\jmath}$

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $r \in \mathbb{R}^{+*}$. $\underbrace{e^{i\theta}}_{la\ forme\ trigonométrique} = \underbrace{cos\theta + isin\theta}_{la\ forme\ algébrique}$

$\underbrace{re^{i\theta}}_{la\ forme\ trigonométrique} = \underbrace{rcos\theta + irsin\theta}_{la\ forme\ algébrique}$

34 **Théorème** : Soit z un nombre complexe **non nul.** Soit r un réel strictement positif et θ un réel.

$z = re^{i\theta}$ **sietssi** $\theta = arg(z)[2\pi]$ et $r = |z|$.

Dans ce cas,
(r, θ) est un couple de **coordonnées polaires du point M** d'affixe z .

35 **Théorème :** Soient z *et* z' deux complexes non nuls. $z = z'$ **sietssi** $arg(z) \equiv arg(z')\ [2\pi]$ *et* $|z| = |z'|$.

36 **Méthode :** Soit $z \neq 0$. Pour obtenir la forme trigonométrique de z :

1) mettre $|z|$ en facteur dans z . Comme $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, l'autre facteur est nécessairement de la forme $cos\theta + isin\theta = e^{i\theta}$ où θ est un argument de z.
2) Reconnaitre θ .

37 **Exemples**

- $\underbrace{z=1+i}_{\text{la forme algébrique}} \overset{\text{je mets } |z| \text{ en facteur}}{=} \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \overset{\text{je reconnais } \theta \text{ tel que } cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=sin\theta}{=} \underbrace{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{la forme trigonométrique}}$
- $-3+3i=3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- $1-\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $-\sqrt{3}-i=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$
- $-3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Donc , $|-3+\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$ et $\arg(-3+\sqrt{3}i)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

38 **Relation forme trigonométrique et forme algébrique** Soit z un complexe non nul **.** Alors z s'écrit sous forme algébrique $z=Re(z)+iIm(z)$ et z s'écrit sous forme trigonométrique $z=re^{i\theta}$. Par unicité de la forme algébrique : $Re(z)=rcos\ (\theta)$ et $Im(z)=rsin\ (\theta)$.
Donc , $\cos(\theta)=\frac{Re(z)}{\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}}$ et $\sin(\theta)=\frac{Im(z)}{\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}}$ et si $Re(z)\neq 0$ alors $\tan(\theta)=\frac{Im(z)}{Re(z)}$

si $Re(z)\neq 0\ alors\ \theta\equiv\begin{cases}Arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)+\pi\ \ [2\pi]\ si\ Re(z)<0\\ Arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)\ \ [2\pi]\ si\ Re(z)>0\end{cases}$ et si $Re(z)=0$ alors $\theta\equiv\begin{cases}\frac{\pi}{2}si\ Re(z)=0\ et\ Im(z)>0\\ -\frac{\pi}{2}\ si\ Re(z)=0\ et\ Im(z)<0\end{cases}$.

39 **Définition :** j'appelle **forme quasi-trigonométrique** toute écriture de z de la forme $z=xe^{i\theta}$ avec x et θ réels. On obtient une telle forme lorsque l'on applique, par exemple, les identités du Losange. Dans ce cas, si $x\neq 0$ alors la forme trigonométrique de z est $z=\begin{cases}|x|e^{i\theta}\ si\ x>0\\ |x|e^{i(\theta+\pi)}si\ x<0\end{cases}$. Une forme quasi-trigo suffit bien souvent !! Elle est très utile pour obtenir sous forme (quasi-)trigo des produits, quotients ou puissances de nombres complexes. Cette forme quasi-trigonométrique permet aussi d'obtenir la forme algébrique $z=xe^{i\theta}=\underbrace{xcos(\theta)}_{Re(z)}+i\,\underbrace{xsin(\theta)}_{Im(z)}$. Il suffit pour l'obtenir d'écrire $e^{i\theta}$sous sa forme algébrique.

Exemple : $1-e^{i\theta}=-2isin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$ dc $|1-e^{i\theta}|=|-2|\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right||i|\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right|$

$$1-e^{i\theta}=2\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\begin{cases}2\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\ si\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)<0\\ 0\ \ si\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=0\\ 2sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\ si\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)>0\end{cases}$$

Forme trigonométrique de $1-e^{i\theta}$.

40 **Propriétés des arguments :** Soient $z\ et\ z'$ deux complexes non nuls et n un entier relatif.
$Arg(z\times z')\equiv Arg(z)+Arg(z')[2\pi]$
$Arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv -Arg(z)[2\pi]$
$Arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv Arg(z)-Arg(z')[2\pi]$
$Arg(z^n)\equiv nArg(z)[2\pi]$

Même propriétés que le logarithme

4. Des applications algébriques et des méthodes à connaitre (savoir-faire !!)

41 **1. Factorisation d'une somme ou différence d'exponentielles imaginaires** (méthode à retenir) :

$e^{i\theta}+e^{i\theta'}=e^{i\theta}\left(1+e^{i(\theta'-\theta)}\right)=2e^{i\theta}cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}=2cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta'+\theta}{2}}$

et $e^{i\theta}-e^{i\theta'}=e^{i\theta}\left(1-e^{i(\theta'-\theta)}\right)=-2ie^{i\theta}sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta'-\theta}{2}}=2isin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta'+\theta}{2}}$.

Exemple : Montrons que $\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$ est imaginaire pur.

42 **2.** Les **Identités du Losange** sont très utiles pour obtenir la **forme (quasi-)trigo** puis la forme algébrique d'une puissance ou d'un quotient de complexes. La forme quasi-trigonométrique d'un complexe est le nom que je donne à l'écriture qu'un complexe sous la forme $(réel)\times(exponentielle\ imaginaire)$. la forme trigonométrique d'un complexe non nul est l'écriture de ce complexe sous la forme $(réel\ strictement\ positif)\times(exponentielle\ imaginaire)$.

Exemple : Ecrivons $\frac{1-e^{ia}}{1+e^{ia}}$ et $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$ sous forme algébrique.

43 **3. Linéarisation (transformation d'un produit en somme) d'un produit de sin et de cos (dans le but d'intégrer par exemple).**

$cos^n(t)\overset{Euler}{=}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^n\overset{FBN}{=}\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{tout développer}}\overset{Euler}{=}$. Et, $sin^n(t)\overset{Euler}{=}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^n\overset{FBN}{=}\ldots\overset{Euler}{=}\ldots$

Exemple : $Linéarisons\ f(t)=cos^2(t)sin^4(t)$ et déduisons-en une primitive de f.

44 **4. Ecriture de** $cos(n\theta)$ $(resp. sin(n\theta))$ **polynôme en** $cos(\theta)$ $(resp. sin(\theta))$ *ou presque*

$cos(n\theta) = Re((cos\theta + isin\theta)^n) \underbrace{=}_{FBN} Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(cos\theta)^k(isin\theta)^{n-k}\right)$ et de même,

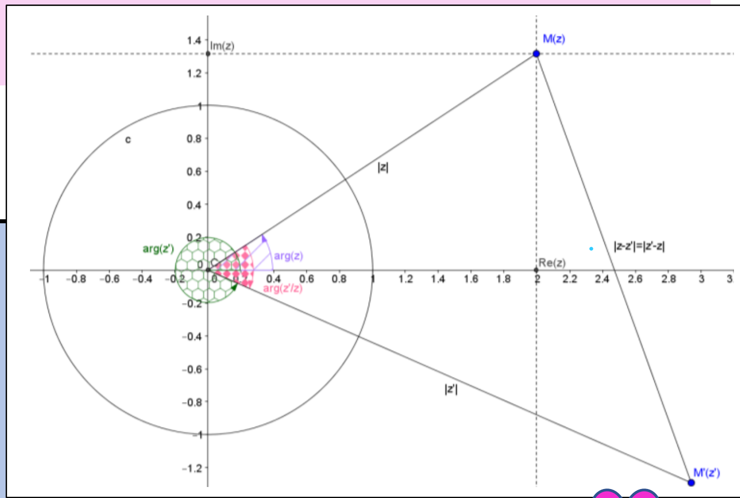
$sin(n\theta) = Im((cos\theta + isin\theta)^n) = Im\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(cos\theta)^k(isin\theta)^{n-k}\right)$.

Exemple : Montrons qu'il existe deux fonctions polynômiales P et Q tel que : $cos(8\theta) = P(\cos(\theta))$ *et* $sin(8\theta) = \cos(\theta)\, Q(\sin(\theta))$.

45 **5. Calculs de** $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ *et* $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$ et d'autres **sommes :**

$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\theta})^k \underbrace{=}_{\substack{somme\\ géométrique\\ de\ raison\ e^{i\theta}}} \ldots\ldots$, . $Et\ \sum_{k=0}^{n} cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} Re(e^{ik\theta}) = Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}) = \cdots$.

De même, $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta) = Im(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}) = \cdots$.



5. Application à la géométrie

46 **Théorème** :

Soit M *et* M' deux points du plan d'affixes respectives z *et* z' .

$$arg(z' - z) \equiv \left(\vec{\imath}, \widehat{\overrightarrow{MM'}}\right)[2\pi]$$

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z *et* z' .

$$\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right) = arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi] = arg(z') - arg(z)[2\pi]$$

47 **Corollaire :** Soit A , B C *et* D quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c *et* d . Alors, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) = Arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$.

48 **Applications à l'alignement, l'orthogonalité et la cocyclicité :** Soient A , B C *et* D quatre points distincts.

- A , B C sont alignés **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$.
- A est sur le cercle de diamètre $[B, C]$ **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$.
- A , B, C *et* D sont cocycliques **sietssi** $\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)[\pi]$ **sietssi** $\arg\left(\frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}\right) \in \mathbb{R}^*$

A SAVOIR

RETROUVER

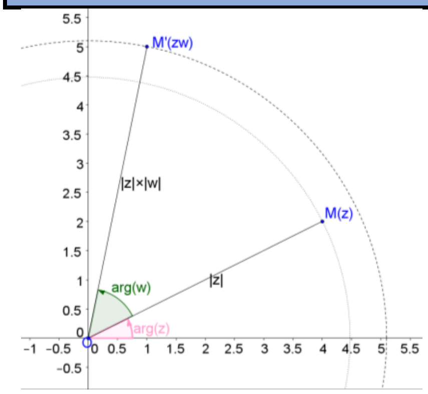
49 **Application à différentes transformations du plan :**

• La **translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe w est l'application $t_{\vec{u}}$ du plan dans lui-même qui associe, à chaque point M, le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ **.** Donc la translation de vecteur $\vec{u}$ est $t_{\vec{u}}: (M(z) \mapsto M'(z + w)))$.

• L'**homothétie** de centre O et de rapport le réel x non nul est l'application h_x du plan dans lui-même qui associe, à chaque point M, le point $M' = h_x\ (M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = x\overrightarrow{OM}$ **.**Donc, l'homothétie de centre O et de rapport x est $h_{O,k}: (M(z) \mapsto M'(xz))$.

• La **rotation** de centre O et d'angle le réel θ est l'application r_θ du plan dans lui-même qui associe à chaque point M le point $M' = r_{\Omega,\theta}\ (M)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ **et** $\left(\widehat{\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM}}\right) = \theta[2\pi]$..Donc, la rotation de centre O et d'angle θ est $r_{O,\theta}: (M(z) \mapsto M'(ze^{i\theta}))$.

50 **Composition** : Soit a un complexe non nul. Alors $a = re^{i\theta}$ où $|a| = r$ *et* $\theta = \arg(a)$.Alors $f: (M(z) \mapsto M'(az))$ est la composée commutative de r_θ et de h_r. Autrement dit, si M un point du plan d'affixe z non nulle alors le point M' d'affixe $z \times w$ est le point du plan tel que : $OM' = rOM$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right) = \theta[2\pi]$.



Construction géométrique : pour passer de $M(z)$ à $M'(re^{i\theta}z)$, on fait subir à M la rotation de centre O et d'angle θ , on obtient M'', et ensuite on fait subir à M'' l'homothétie de centre O et de rapport r et on obtient ainsi M'.

6. Exponentielle complexe

On connait désormais l'exponentielle réelle e^{x} tel que x réel et l'exponentielle imaginaire $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ tel que y réel . On va grâce à ces deux exponentielles définir l'exponentielle complexe de la manière suivante :

60 **Définition :** Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. L'exponentielle (complexe) de z est $e^{z} = e^{x}e^{iy}$.
Autrement dit : $e^{x+iy} = e^{x} \times e^{iy} = e^{x}(\cos(y) + i\sin(y))$.

61 **Propriétés :** Soit z *et* z' deux nombres complexes et n un entier relatif .

- $e^{z} \neq 0$, $|e^{z}| = e^{Re(z)}$ *et* $\arg(e^{z}) \equiv Im(z)[2\pi]$
- $Re(e^{z}) = e^{Re(z)}(\cos(Im(z))$ et $(e^{z}) = e^{Re(z)}(\sin(Im(z))$.
- $e^{z} = e^{z'}$ *si et ssi* $\exists k \in \mathbb{Z} / z - z' = 2ik\pi$.
- $e^{z} \times e^{z'} = e^{z+z'}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^{z}}$, $e^{z'-z} = \frac{e^{z'}}{e^{z}}$, $(e^{z})^{n} = e^{nz}$, $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$.

62 **Conséquence :** L'exponentielle complexe $(z \mapsto e^{z})$ n'est pas injective, l'exponentielle imaginaire$(y \mapsto e^{iy})$ non plus alors que l'exponentielle réelle $(x \mapsto e^{x})$l'est.

63 **Méthode :** on cherche à résoudre une équation de la forme $e^{z} = w$ où w complexe donné (fixé) et z l'inconnue complexe.
Ou bien $w = 0$. Alors il n'y a pas de solution.
Ou bien $w \neq 0$. On va mettre w sous forme trigonométrique $w = re^{i\theta}$ et on cherche z sous forme algébrique $= x + iy$. Alors $e^{z} = w \iff e^{x}e^{iy} = re^{i\theta} \iff e^{x} = r$ *et* $y \equiv \theta[2\pi] \Leftrightarrow x = ln(r)$ *et* $y \equiv \theta[2\pi]$.

Car deux complexes sont égaux sietssi ils ont même module et argument égaux modulo 2π

64 **Exemple** : Résolvons $e^{z} = \frac{\sqrt{3}i-1}{1-i}$ d'inconnue z complexe.

III Racines carrées ou deuxièmes et équations polynomiales

1. Racines carrées

65 **Théorème .** Soit Δ un nombre complexe .
Ou bien $\Delta = 0$ alors il existe un et un seul complexe δ tel que $\delta^{2} = \Delta$ qui est : $\delta = 0$.
Ou bien $\Delta \neq 0$ alors $\Delta = re^{i\theta}$ et il existe exactement deux complexes δ tels que $\delta^{2} = \Delta$ qui sont distincts et opposés :

$$\delta_1 = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} \text{ et } \delta_1 = -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Ces complexes δ tels que $\delta^{2} = \Delta$ sont appelés les racines carrées ou deuxièmes (complexes) de Δ .

66 **Méthode pour trouver les racines deuxièmes complexes de Δ dans le cas où $\Delta \neq 0$:**

- Lorsque Δ a une forme trigonométrique «sympa» (ie. Δ a un argument simple) $\Delta = re^{i\theta}$ alors on donnera ses racines carrées sous forme trigonométrique comme dans le théorème $\delta_1 = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $\delta_2 = -\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$. Il est parfois utile d'avoir la forme algébrique (obtenue à partir de la forme trigo). Cf équation du second degré.

Exemples : 1) $\Delta = -4 = 4i^{2} = (2i)^{2}$

2) $\Delta = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2} = \left[\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right]^{2} = [-1+i]^{2}$

3) $\Delta = cos(x) - 1 = -2\sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right) = 2i^{2}sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\sqrt{2}isin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{2}$.

- Lorsque Δ n'a pas un argument simple alors on cherchera ses racines carrées sous forme algébrique ie. on cherche $\delta = x + iy$ tel que : $(x+iy)^{2} = a + ib$ $(*)$. En identifiant parties réelles et imaginaires **et module** , $(*)$est équivalente au système $\begin{cases} x^{2} - y^{2} = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^{2} + y^{2} = \sqrt{a^{2} + b^{2}} & (3) \end{cases}$. De (1) et (3) ,on tire x^{2} *et* y^{2} et de (2) , on sait si x *et* y sont de même signe ou non . On trouve deux solutions opposées : $\delta = x + iy$ *ou* $\delta = (-x) + i(-y)$.

Exemple : Cherchons les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$. On cherche $\delta = x + iy$ tel que : $(x+iy)^{2} = 3 - 4i$.

$(x+iy)^{2} = 3 - 4i \Leftrightarrow (x+iy)^{2} = 3 - 4i$ *et* $|(x+iy)^{2}| = |3-4i| \Leftrightarrow x^{2} - y^{2} + i2xy = 3 - 4i$ *et* $x^{2} + y^{2} = 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{2} - y^{2} = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^{2} + y^{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^{2} = 8 \\ 2y^{2} = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$Donc, -2 + i$ *et* $2 - i$ *sont les racines carrées de* $3 - 4i$. (*vérification* : $(-2+i)^{2} = 3 - 4i$ *OK!!*)

2. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$ et complément dans $\mathbb{R}$

67 **Théorème** Soit $a, b, et\ c$ des complexes tels que $a \neq 0$.
1) Soit $(E) : az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré .On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ $(ie. \Delta = \delta^2)$.
si $\Delta = 0$ alors (E) a une unique solution et si $\Delta \neq 0$ alors (E) a deux solutions distinctes .
Ces solutions (confondues si $\Delta = 0$) sont $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ $et\ z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.
2) Pour tous complexes z , $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.
3) $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ $et\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple : Résoudre $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$

68 **Théorème :** Soient a, b et c <u>trois réels</u> tels que a non nul et $P(x) = ax^2 + bx + c$ =Alors,
<u>**Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$**</u> , alors P a deux racines complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ $et\ x_2 = \frac{-b\ i+\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
On a toujours : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple : Factorisons dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(z) = 1 + z + z^2$.

69 **Réciproquement** Soit $\alpha\ et\ \beta$ deux complexes. Si $u\ et\ v$ sont deux complexes tels que $u + v = \beta$ $et\ u \times v = \gamma$ alors $u\ et\ v$ sont les solutions de $z^2 - \beta z + \gamma = 0$.

Exemple : Résolvons $\begin{cases} e^z + e^w = 2 \\ e^{z+w} = 2 \end{cases}$

3. Fonctions et équations polynomiales à coefficients complexes.

70 **Définitions :** Une fonction polynomiale réelle (resp. complexe) est une fonction de la forme :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ (⁂) \text{ ou } f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ (⁂)$$

où n est un entier naturel, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des réels (resp. complexes) indépendants de la variable x (ou z) (des constantes) et sont appelés les** coefficients de f .

- Si $a_n \neq 0$ alors le degré de f est n et on note $n = \deg(f)$. La fonction nulle est la seule fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls ; par convention, son degré vaut $-\infty$.
- Le complexe (resp. Complexe) α est **racine** de f lorsque $f(\alpha) = 0$ $i.e.$ lorsque α est une solution complexe (resp. réelle) de l'équation $f(z) = 0$ d'inconnue z réelle ou complexe.
- (⁂) est la** forme développée de f.
- $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, d'inconnue z, est l'équation polynomiale associée à f et ses solutions sont les racines de f.

Théorème** : la forme développée d'une fonction polynomiale est unique i.e.

$$si\ \forall x \in \mathbb{R}, a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \text{ alors } \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 \\ \vdots \\ b_n = a_n \end{cases}.$$

La fonction nulle est la seule fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls.

71 **Théorème de la division euclidienne entre deux fonctions polynomiales :** Si f et d sont deux fonctions polynomiales telles d non nulle alors il existe deux uniques fonctions polynomiales q et r telles que :
$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = d(z)q(z) + r(z) et\ deg(r) < deg(d)$.

Méthode :

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 1} & \mathbf{3x^2 - 1} \\ -\left(2x^4 - \frac{2}{3}x^2\right) & \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9} \\ -5x^3 + \frac{5}{3}x^2 + 3x - 1 & \\ -\left(-5x^3 + \frac{5}{3}x\right) & \\ \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1 & \\ -\left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{9}\right) & \\ \frac{4}{3}x - \frac{4}{9} & \end{array}$$

$$2x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x - 1 = (3x^2 - 1)\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}\right) + \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}.$$

72 **Théorème ADMIS :** Si f est une fonction polynomiale réelle (resp. complexe) $non\ nulle$ de degré n et α est **racine** de f alors il existe une fonction polynomiale réelle (resp. complexe) g de degré $(n-1)$ telle que : pour tout réel x , $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

73 **Méthode pour factoriser f** :

1. Je cherche des facteurs évidents….
2. Je cherche une racine évidente de f. Pour cela, je calcule $f(0), f(1), f(2), f(-1), f(-2)$ .Si l'un de ces réels s'annulent alors j'ai trouvé une racine $\alpha \in \{-2,-1,0,1,2\}$ de f
3. J'applique le théorème précédent en affirmant qu'il existe une fonction polynomiale g de degré $(n-1)$ telle que : pour tout réel x , $f(x)=(x-\alpha)g(x)$.
4. OU BIEN J'écris g sous sa forme développée générale (en nommant par des lettres ses coefficients que je cherche à déterminer).J'utilise l'égalité pour tout réel x , $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ et le résultat fondamental d'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale pour déterminer les valeurs des coefficients de g .

   OU BIEN j'effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $(x-\alpha)$. Le quotient est alors $g(x)$.
5. Je recommence le même travail sur g … puis à nouveau sur les facteurs de g …
6. J'obtiens ainsi une écriture de f de la forme$f(x)=\beta(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ où $\alpha_1,..,\alpha_n$ racines réelles de f .Cette forme est appelée forme scindée de f dans $\mathbb{R}$.

74 **NB** toutes les fonctions polynomiales réelles n'ont pas de forme scindée dans $\mathbb{R}$ car certaines d'entre elles ont des racines complexes non réelles !!! Exemple : $P(x)=x^2+1=(x-i)(x+i)$

Rque : Une fois $f(x)$ complètement factorisée et réelle, le signe de $f(x)$ en fonction de x s'établit grâce à un tableau de signe.

75 **Théorème** Si α est une racine complexe non réelle d'une fonction P polynomiale réelle alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P.

76 **Exemple** : Factorisons $P(x)=x^4+x^3+3x^2+x+1$

77 **Théorème**

1) Une fonction polynomiale non nulle, de degré $n \in \mathbb{N}$, a au plus n racines (l'équation polynomiale associée a au plus n solutions)

2) La fonction polynomiale nulle est la seule fonction polynomiale ayant strictement plus de racines que son degré. C'est donc la seule fonction polynomiale ayant une infinité de racines.

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) d'un complexe.

78 **Définition** Soit a un nombre complexe et n un entier naturel non nul .

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) de a sont tous les nombres complexes z tels que $z^n=a$.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ (complexes) de a sont toutes les racines complexes du polynôme $P(X)=X^n-a$.

79 **Exemples** : 0 est l'unique racine $n^{\text{ième}}$ de O . Tout réel a est l'unique racine $1^{\text{ère}}$ de a . Tout réel non nul a exactement deux racines carrées complexes .

80 **NB :** $P=X^n-a$ étant de degré n , P a au plus n racines . Donc, un complexe a admet au plus n racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes.

Nous allons démontrer que si le complexe a est non nul alors a admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$.

1. Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité où n un entier naturel non nul .

81 1 est appelé l'unité . Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont tous les complexes z tels que $z^n=1$.

De manière évidente , 1 est toujours racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité quelle que soit la valeur de n.

82 **Théorème** Soit n un entier naturel non nul . Il existe exactement $\boldsymbol{n}$ racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (ie. $\boldsymbol{n}$ complexes z tels que $z^n=1$) qui sont les complexes $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \{0,1,\dots.,n-1\}$.

83 **NB:** $\omega_0=1, \omega_1=e^{i\frac{2\pi}{n}}, \omega_2=e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, \omega_{n-1}=e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

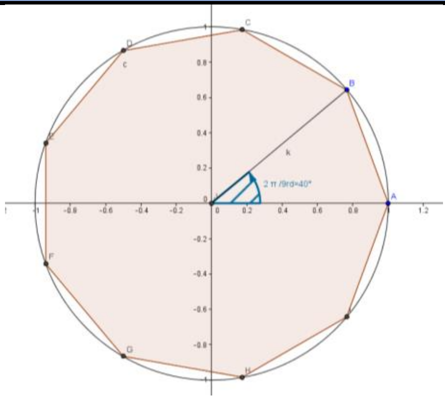
$\mathbb{U}_n=\{\omega_k\ /\mathrm{k} \in [\![0;n-1]\!]\}=\{\omega_k\ /k \in [\![1;n]\!]\}=\{\omega_k\ /k \in [\![2;n+1]\!]\}=\{\omega_k\ /k \in [\![-1;n-2]\!]\}\dots$

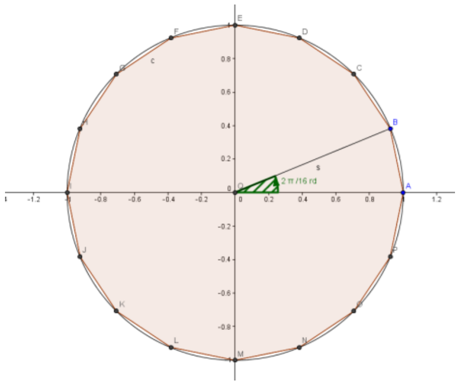
De plus, $\forall k \in [\![1,n-1]\!], \omega_{n-k}=\overline{\omega_k}$ i.e. $\omega_{n-1}=\overline{\omega_1}$, $\omega_{n-2}=\overline{\omega_2}$ … $Donc$ $\mathbb{U}_n=\{\overline{\omega_k}\ /\mathrm{k} \in [\![0;n-1]\!]\}$

84 **Propriété :** La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est nulle dès que $n \geq 2$.

85 **Prop :** Les complexes $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in [\![1;n-1]\!]$sont les solutions de $1+z+z^2+\dots+z^{n-1}=0$.

86 **Illustration** On note M_k le point d'affixe $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Alors le polygone $M_0M_1M_2 \dots M_{n-1}$ est régulier et inscrit dans le cercle trigonométrique et l'un de ses sommets est le point A d'affixe 1.





87 **n impair**

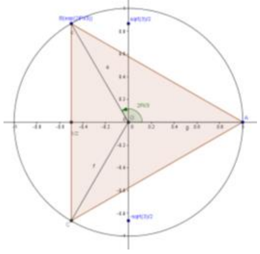
1 est le seul réel racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité .

Les conjugués des complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \left\{1, \dots, \frac{n-1}{2}\right\}$ sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $\in \left\{\frac{n+1}{2}, \dots, n-1\right\}$.

Exemple à connaitre : Les racines troisièmes de l'unité sont 1 , $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Leurs images forment un triangle équilatéral.

$j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$

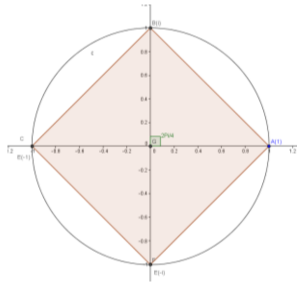
$\forall k \in \mathbb{Z}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^{3k+2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.



n pair

1 et -1 sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles de l'unité et les conjugués des complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $k \in \left\{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\right\}$ sont les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ tq $\in \left\{\frac{n}{2} - 1, \dots, n-1\right\}$.

Exemples : Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1 .
Les racines 4èmes de l'unité sont $1, i, -1, -i$. Leurs images forment un carré .



2. Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul .

88 **Théorème :** Tout complexe $a = re^{i\theta}$ non nul possède exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ qui sont les complexes

$$u_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}\omega_k \quad \text{tel que} \in \{0,1, \dots, n-1\}.$$

89 **Propriété :** Si z_0 est une racine $n^{\text{ième}}$ particulière de a, alors les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a sont les n complexes obtenus en multipliant z_0 par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité .

90 **Remarque :** La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de a est nulle dès que $n \geq 2$ et les points d'affixe u_k tel que $k \in [\![0, n-1]\!]$ forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

91 **Méthode pour trouver les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe a non nul avec $n \geq 3$ (pou n=2, Cf**

1) J'écris a sous forme trigonométrique $a = re^{i\theta}$.
2) Je cherche une racine $n^{\text{ième}}$ particulière de a : $z_0 = \underbrace{\sqrt[n]{r}}_{\substack{module\\ de\ a\\ puissance\\ \frac{1}{n}}} \underbrace{e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}}_{\substack{argument\\ de\ a\\ divisé\\ par\ n}}$ convient (car ${z_0}^n = (\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)})^n = (r^{\frac{1}{n}})^n(e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)})^n = re^{i\theta}$).
3) Je multiplie cette racine nième z_0 particulière par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. J'obtiens alors n complexes qui sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de a .

92 **Exemple** : Déterminons les racines 6ièmes (complexe) de $a = 2i - 2$.

1) $a = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
2) Donc, $z = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4\times 6}} = 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine 6ième particulière de a .
3) Ainsi les racines de $2i - 2$ sont les 6 complexes : $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ tq $k \in [\![0,5]\!]$.

JE SAIS MAINTENANT RESOUDRE TOUTE EQUATION DE LA FORME $Z^n = a$ d'inconnue Z complexe.

93 **Exemples** : Soit $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$. Résolvons $(z-1)^n = (z+1)^n$d'inconnue z complexe.
Je remarque que 1 n'est pas solution de cette équation . Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

z solution sietssi $(z-1)^n = (z+1)^n$ sietssi $\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n} = 1$

sietssi $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$

sietssi $Z^n = 1$ où $Z = \frac{z+1}{z-1}$

sietssi Z est une racine nième de l'unité.

sietssi $Z = 1$ ou $Z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ou $Z = e^{i\frac{4\pi}{n}}$ $ou \dots Z = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

sietssi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

sietssi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

sietssi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que$(z+1) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-1)$

sietssi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que$\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z = -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$ <u>sietssi</u> $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$ <u>sietssi</u> $k = 0$.
Donc je dois ôter la valeur $k = 0$ pour avoir le droit de diviser .

De plus , pour $k = 0$, $\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z \neq -(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1)$

Donc le cas « k=0» est impossible .... mais ce n'est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n'aboutissent pas à une impossibilité !!

sietssi il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que$z = -\frac{(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1)}{\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = -\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}} = -icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

94 **Dans ce chapitre, nous avons défini les objets : z^n, z^{-n} tq $n \in \mathbb{N}$, $\bar{z}$,$|z|$, arg (z) et e^z où $z \in \mathbb{C}$ (éventuellement non nul). Par contre, les objets :**

~~cos(z)~~,~~tan(z)~~, ~~sin(z)~~ , ~~ln(z)~~, $\cancel{\sqrt{z}}$, $\cancel{z^{1/n}}$ ou $\cancel{\sqrt[n]{z}}$, $\cancel{\lfloor z \rfloor}$ n'existent pas si $z \in \mathbb{C}$.