DL 6

Pour mercredi 31 janvier

EXERCICE 1 Soit (u_n) une suite réelle croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$. On pose $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = u_{2^p}$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, v_p - v_0 \leq \frac{2^p - 1}{2^p - 2^{p-1}}$.
2. En déduire que (u_n) converge .

EXERCICE 2

Soit a un réel supérieur à 1 *et* l'entier naturel k tel que $k^2 \leq a < (k+1)^2$.

Soit u la suite définie par : $u_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$existe.
2. Montrer que la suite u est décroissante à partir du rang 1.
3. Justifier l'existence et la valeur de la limite de la suite u.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n - 1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$.
6. ~~Désormais on suppose que $k \neq 0$.~~ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1}$.
7. Ecrire un programme en python permettant d'obtenir une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{a}$ à 10^{-4}près .

EXERCICE 3

On définit la suite (x_n) par : pour tout entier naturel n , x_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation : $t + \ln(t) = n$ d^' inconnue $t \in \mathbb{R}^{*+}$.

a. Justifier que $\forall n, x_n$ est bien défini. Représenter (illustrer) la suite (x_n) .
b. Etudier la monotonie et la limite de la suite (x_n).
c. Montrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
d. Montrer que $\varphi : (t \mapsto t + \ln(t))$ est bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$.
e. Montrer que $\varphi^{-1}(t) = t - \ln(t) + \frac{\ln(t)}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$.
f. Retrouver alors le développement asymptotique la suite (x_n) obtenue à la question c.

DL 7

Pour mercredi 7 février

PROBLEME Une équation fonctionnelle

On rappelle que $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$
On note $E = \{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \}$.
On note F l' ensemble des éléments $f \in E$ tels que f ne soit pas la fonction nulle et f s' annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE 1 Exemples et premières propriétés des éléments de E.

1. Quelles sont les fonctions constantes éléments de E ?
2. Déterminer une fonction élément de F.
3. Démontrer que ch est élément de $E \backslash F$.
4. Montrer que si f est un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x \mapsto f(\alpha x))$ est élément de E.
5. Soit f un élément de E.
   a. Montrer que $f(0) = 0 \text{ ou } 1$.
   b. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.

c. Montrer que si $f(0) = 1$ alors f est paire.

PARTIE 2 Description complète de E et F.

Soit f un élément de E tel que : $f(0) = 1$.

6. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall x \in [0, r], f(x) > \frac{1}{2}$. En déduire que $\int_0^r f(x)dx > 0$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$.
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x)\int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^{x} f(v)dv$.
9. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.
12. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$.
13. En déduire tous les éléments de E qui vérifient $f(0) = 1$.
14. Quels sont les éléments de E et ceux de F ?

PARTIE 3 On se propose de décrire F par une autre méthode.

Soit f un élément de F. On note $U = \{x \in \mathbb{R}^{+*} / f(x) = 0\}$.

15. **PRELIMINAIRE** : Soit $a > 0$, on note $D_a = \{a\frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}\}$.

Nous allons montrer, dans cette question, que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D_a.
Soit x un réel.

   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq \frac{1}{an}2^{q_n}$.
   b. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que : $0 \leq x - a\frac{p_n}{2^{q_n}} \leq \frac{1}{n}$.
   c. En déduire que x est la limite d'une suite d'éléments de D_a.

16. **BORNE SUP DE U**
   a. Montrer que U admet une borne inférieure finie notée a.
   b. Montrer que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.
   c. Montrer que $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

17. **QUI EST f ?**

   On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ $et\ g: (x \mapsto \cos(\omega x))$.

   a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que , $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2\left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)\right]^2$.
   b. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
   c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ f\left(a\frac{p}{2^q}\right) = g\left(a\frac{p}{2^q}\right)$.
   d. En déduire que $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.
   e. En déduire que $f = g$.
   f. Retrouver alors tous les éléments de F.