

Programme de colle 17

Chap 11 Limites et continuité d'une fonction réelle

1. Définition d'une fonction continue en a , continue à gauche et à droite en a , continue sur un domaine.

- f est continue en un réel a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite en a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I .

2. Caractérisation de la continuité par la continuité à gauche et à droite :

f continue en a si et si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ si et si f est continue à droite et à gauche en a .

3. Caractérisation séquentielle de la continuité :

f est continue en a si et si toute suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

f n'est pas continue en a si et si il existe une suite u telle que $\begin{cases} \forall n, u_n \in Df \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \end{cases}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq f(a)$.

4. Théorème d'opérations sur les fonctions continues : combinaison linéaire, valeur absolue, produit, quotient et composée.

5. Continuité des fonctions usuelles. Parmi nos fonctions usuelles, seule la fonction partie n'est pas continue sur son domaine de définition.

6. Prolongement par continuité.

f est prolongeable par continuité en a lorsque f a une limite finie en a . Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f}: \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in Df \\ L \text{ si } x = a \end{cases}$ est continue en a et est appelé le prolongement par continuité en a .

7. Fonction lipschitzienne, fonction contractante

f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Si de plus $M \in [0,1[$ alors f est dite contractante.

Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

8. Théorème des valeurs intermédiaires (Deux versions)

si f est continue sur $[a, b]$ alors tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent par f dans $[a, b]$.

si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle et ses extrémités sont $\inf_I f$ et $\sup_I f$.

Et ces conséquences :

si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule sur $[a, b]$.

si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors f s'annule une seule fois sur $[a, b]$.

si f est continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I .

9. Image d'un segment par une fonction continue.

Une fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum sur ce segment.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ et $m = f(u) = \min_{[a,b]} f$ et $M = f(v) = \max_{[a,b]} f$ tq $(u, v) \in [a, b]^2$.

10. Théorème des bijections continues et strictement monotones

Si f est strictement monotone et continue sur un intervalle I alors

- $f(I)$ est un intervalle de même nature que I et ses extrémités sont les limites de f aux bords de I
- f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f .

Chap 12 Fonctions réelles dérivables - Fonctions convexes

1. Définition d'une fonction dérivable en a , dérivable à gauche et à droite en a , dérivable sur un domaine.

- f est dérivable en un réel a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ = nombre dérivé de f en a et la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est la tangente à Cf en a .
- f est continue à droite en a lorsque $a \in Df$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Alors, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$ = nombre dérivé à droite de f en a et la droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a)(x - a)$ est la demi-tangente à droite de Cf en a .
- f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I .

2. Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite :

f dérivable en a si et si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

3. Caractérisation de la dérivabilité par le DL

f dérivable en a et $L = f'(a)$ si et si f admet le $DL_1(a)$: $f(x) = f(a) + L(x - a) + o_a(x - a)$.

4. Opérations sur les fonctions dérivables

- Si f et g sont dérivables en a et λ est une constante alors $\lambda f, f + g$ et fg sont dérivables en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
- Si f et g sont dérivables sur D et λ est une constante alors $\lambda f, f + g$ et fg sont dérivables sur D et $\forall a \in D, (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- Si f et g sont dérivables sur D et $\forall a \in D, g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et $\forall a \in D \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
- Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall a \in D, f(a) \in E$ alors $g \circ f$ est dérivable sur D et $\forall a \in D, (g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

5. Dérivabilité et fonction dérivée des fonctions usuelles. Parmi nos fonctions usuelles, seules les fonctions partie entière, Arcsin, Arccos, valeur absolue et racine nième ne sont pas dérivables sur leur propre domaine de définition

6. Théorème de condition nécessaire d'extremum.

Si I est un intervalle et $a \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

7. Théorème de Rolle.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

8. Théorèmes d'égalité et d'inégalités des accroissements finis.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. (EAF)

Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ alors f est M -lipschitzienne sur I .

9. Théorème « monotonie et signe de la dérivée ».

Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I alors

f est croissante sur l'intervalle I si et seulement si f' est positive sur l'intérieur de I .

f est décroissante sur l'intervalle I si et seulement si f' est négative sur l'intérieur de I .

f est constante sur l'intervalle I si et seulement si f' est nulle sur l'intérieur de I .

10. Théorème de critère de dérivabilité.

Si a est un élément de l'intervalle I et est continue en a et dérivable au moins sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$.

Si a est un élément de l'intervalle I et f est continue en a et dérivable au moins sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f est continue en a .

11. Théorème de critère de classe C^n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I un intervalle, a un élément de I , L_0 un réel et $f: \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ L_0 & \text{si } x = a \end{cases}$.

Si g est continue en a et de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = L_k \in \mathbb{R}$

alors f est de classe C^n sur I et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^{(k)}: \begin{cases} g^{(k)}(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ L_k & \text{si } x = a \end{cases}$

12. Inégalité de Taylor Lagrange.

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$ alors

Indépendant de t
mais dépendant de I et n

$$\forall (a, b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Csq : Si f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel M_n tel que : $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M_n$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in I^2, \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq M_n \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

13. Application : pour tout réel x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Définition d'une fonction convexe/concave

f est convexe sur l'intervalle I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

f est concave sur l'intervalle I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

1. Caractérisation d'une fonction convexe. Inégalité vérifiée par une fonction convexe

f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si $\forall a \in I, \tau_a: \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Csq : si f est convexe sur l'intervalle I alors $\forall (a, b, c) \in I^3, (a < b < c \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c})$

2. Régularité d'une fonction convexe

Si f est convexe sur l'intervalle I alors f est continue en tout point intérieur à I et est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I .

3. Caractérisations d'une fonction convexe dérivable

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I . Alors,

f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si f' est croissante sur I si et seulement si $\forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

4. Caractérisation d'une fonction convexe deux fois dérivable

Ici f est deux fois dérivable sur l'intervalle I . f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .

QDC :

Q2 : Théorème de dérivation d'une fonction composée

Q3 : Théorème de limite d'une fonction monotone

Q4 : Condition nécessaire d'extremum et théorème de Rolle

Q5 : Égalité et inégalité des accroissements finis.

Q5 : Critère de dérivabilité.

Q6 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Q7 : Caractérisation de la convexité sur un intervalle d'une fonction dérivable.