Fonctions dérivables et fonctions convexes.

Rappel : si I est un intervalle, alors $\mathring{I}$, l'intérieur de I, est l'intervalle contenant les éléments de I sans les bords de I.
Un intervalle I est non trivial lorsque $\mathring{I}$ est non vide.

I Généralités.

1

Définition Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle non trivial I . Soit a un réel élément de I.

1.Soit x un point de Df distinct de a.

$\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur (ou la pente) de la droite passant par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ (appelée corde).

$\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé le **taux d'accroissement** de f entre a et x.

1. f est **dérivable en a** lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$. Cette limite finie , si elle existe, est alors **le nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. Autrement dit, $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Dans ce cas , **la tangente à Cf au point de A**$(a, f(a))$ (ou en a) est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

2. Lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a^+$, f est **dérivable à droite en a.** Cette limite finie à droite , si elle existe, est alors **le nombre dérivé à droite** de f en a et noté $f_d'(a)$ et,

$f_d'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Dans ce cas , **la demi-tangente à droite à Cf** au point de $A(a, f(a))$ (ou en a) est la demi-droite d'équations $y = f(a) + f_d'(a)(x-a) et\ x > a$.

3. Lorsque $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a^-$, f est **dérivable à gauche en a.** Cette limite finie à droite , si elle existe, est alors **le nombre dérivé à gauche** de f en a et noté $f_g'(a)$ et,

$f_g'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Dans ce cas , **la demi-tangente à gauche à Cf** au point de $A(a, f(a))$ (ou en a) est la demi-droite d'équations $y = f(a) + f_g'(a)(x-a)\ et\ x < a$.

4. Lorsque f est continue en a et $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en a, f n'est pas dérivable en a et la droite verticale d'équation $x = a$ est alors la **tangente** (dite **verticale**) à Cf au point $A(a, f(a))$.
5. Lorsque f est continue en a et $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en $a^+ (resp. en\ a^-)$, alors f n'est pas **dérivable à droite** (resp. gauche) **en a** et la droite verticale d'équation $x = a$ est alors la **demi-tangente verticale** à droite (resp. gauche) à Cf au point $A(a, f(a))$.
6. Soit $I \subset Df$. f est **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout point de I. La fonction f' qui associe, à tout point a de I, le nombre dérivé de f en a, est appelée la **fonction dérivée** de f.

2

NB : 1) $\tau(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'est définie que pour $x \in Df \setminus \{a\}$.

2) Si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'a pas de limite en a ou a une limite infinie en a , alors f n'est pas dérivable en a, dans le 2$^{\text{ème}}$ cas, Cf a une tangente verticale au point $A(a, f(a))$, dans le premier cas, il n'y a rien.

3

Illustration : Soit $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ des points de Cf.
Par définition, la **tangente à Cf** au point A est la position limite des cordes (AM) quand x tend vers a (c'est-à-dire quand M se rapproche de A en suivant Cf) . La tangente à Cf au point A est la droite la plus proche de Cf au voisinage de A, la courbe Cf vient se confondre avec cette tangente au voisinage de A.
De même, la **demi-tangente à droite** au point A est la position limite des cordes (AM) quand x tend vers a^+ et De même, la **demi-tangente à gauche** au point A est la position limite des cordes (AM) quand x tend vers a^- .

En effet,

• Supposons que f est dérivable en a . Alors, la pente des droites (AM) tendent vers le réel $f'(a)$. Comme, de plus, les droites (AM) passent toutes par le point A, les droites (AM) tendent vers la droite passant par A et de pente $f'(a)$. De plus, pour qu'une droite D soit proche de Cf au voisinage de A, il faut que D passe par A donc D a une équation de la forme $y = u(x-a) + f(a)$ où u =coeff directeur de D. Mais alors $\forall x \neq a, f(x) - \big(u(x-a) + f(a)\big) = (x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - u\right)$. Donc pour que l'écart entre Cf et D soit le plus petit possible quand $x \to a$, il faut et il suffit de prendre $u = f'(a)$ puisque prendre $u = f'(a)$ est la seule valeur telle que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - u = 0$. Donc, D est la droite la plus proche de Cf sietssi D est la tangente à Cf en A.

• Supposons que f est continue en a et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$. Alors la pente des droites (AM) tendent vers $\pm\infty$. Comme, de plus, les droites (AM) passent toutes par le point A , les droites (AM) tendent vers la droite verticale passant par A.

· Idem si on suppose que f est dérivable à droite en a ou bien que Cf a une demi-tangente verticale en a.

4

Illustration : tangente = limite des cordes

[Droite tangente : limite des cordes et limite des tangentes – GeoGebra : Faire bouger b qui joue le rôle de x et le faire tendre vers a.]

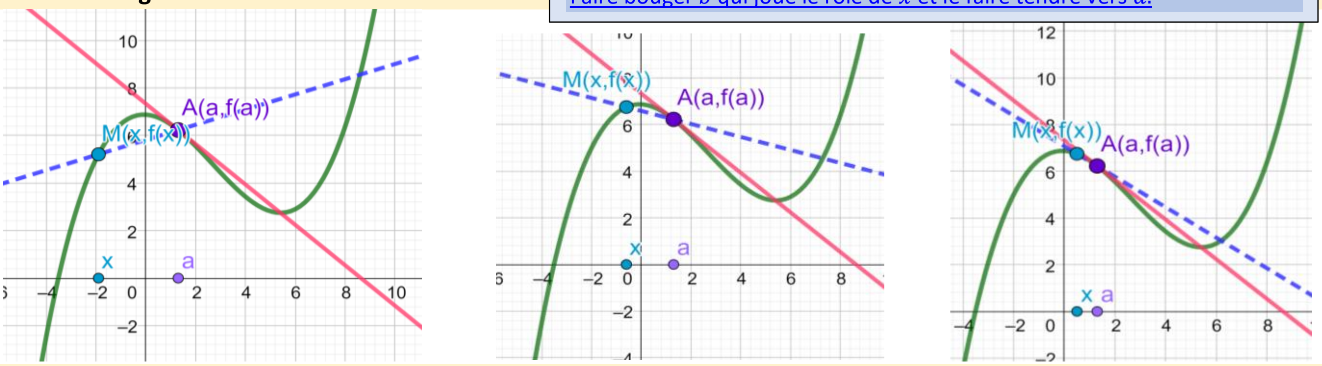
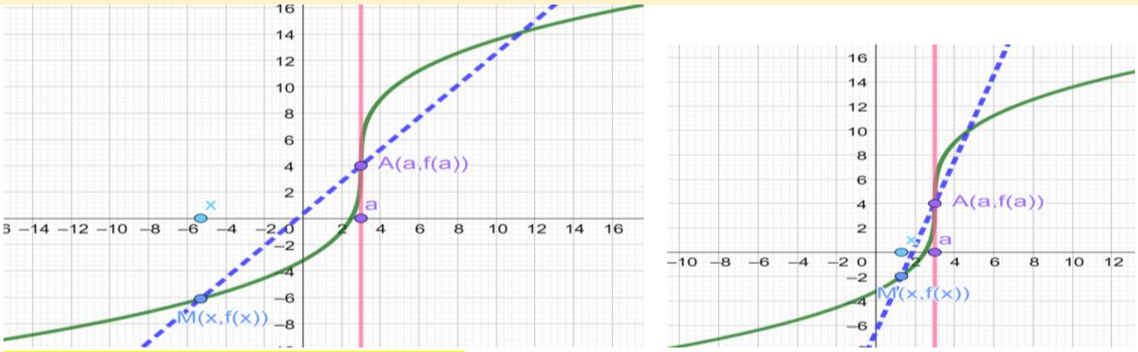
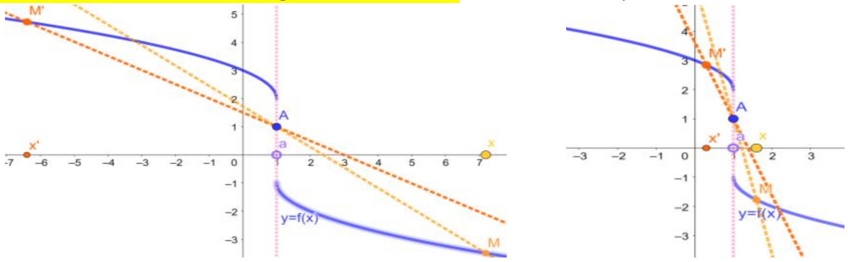


Illustration : tangente verticale = limite des cordes



Exercice : représenter Cf au voisinage de a lorsque f est continue en a, $\lim_{x\to a^-}\tau(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to a^+}\tau(x)=2$.

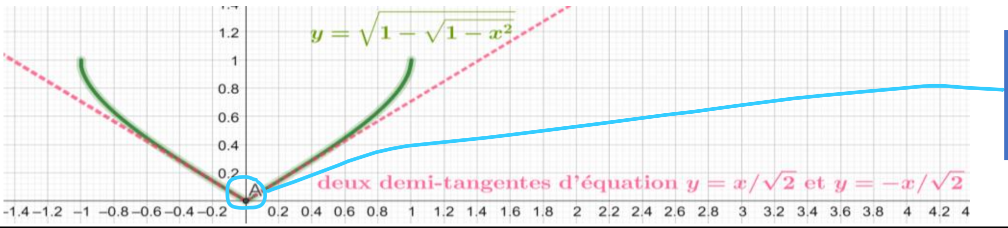
Attention aux fausses tangentes verticales obtenues lorsque la continuité n'est pas vérifiée



[Fausse tangente verticale pour une fonction discontinue – GeoGebra]

Demi-tangentes : limites des cordes à droite ou à gauche

[demi-tangentes – GeoGebra]



Le point A est dit anguleux car les deux demi-tangentes existent mais ne sont pas confondues.

5

Caractérisations :

1. f est dérivable en a et $f'(a)=L$ **sietssi**
f admet le développement limité d'ordre 1 en a suivant : $f(x)=f(a)+L(x-a)+o_a(x-a)$.
2. f est dérivable à droite en a et $f_d{}'(a)=L^+$ **sietssi**
f admet le développement limité d'ordre 1 en a^+ suivant : $f(x)=f(a)+L^+(x-a)+o_{a^+}(x-a)$. (idem à gauche)
3. Si f est définie en a et de part et d'autre de a alors
f est dérivable en a **sietssi** f est dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a)=f_g'(a)$. Et dans ce cas , $f'(a)=f_d'(a)=f_g'(a)$.

6

Exemples **1.** La courbe de la fonction $f:(x\mapsto\sqrt{x})$ admet une tangente verticale au point $O(0,0)$ car f est continue en 0 et $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ donc, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=+\infty$. De même, les fonctions valeurs absolues, les fonctions $(x\mapsto\sqrt[n]{x})$ sont continues mais ne sont pas dérivables 0 et leur courbe admet une tangente verticale au point $O(0,0)$. Enfin leur domaine de dérivabilité est $D_{f'}=Df\backslash\{0\}$ et son domaine de continuité est Df.

2. Soit $f:\left(x\mapsto\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ f est continue en 0. Etudions l'allure de sa courbe au voisinage de 0 :

$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4)\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4)}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{4}x^2+o_0(x^2)\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{8}x^2+o_0(x^2)\right)$.

Donc *si* $x>0$, $f(x)=f(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{x^3}{8\sqrt{2}}+o_{0^+}(x^3)$. Comme f admet un $DL_3(0^+)$, f admet un $DL_1(0^+)$ et par conséquent, f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la demi-tangente à droite a pour équation pour équation $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$. De plus, $f(x)-\left[f(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}x\right]\sim_{0^+}\frac{x^3}{8\sqrt{2}}$. Donc, *au voisinage de* 0^+, $f(x)-\left[f(0)+\frac{1}{\sqrt{2}}x\right]>0$. J'en déduis Cf est au dessus de sa demi-tangente à droite en 0.

Donc $si\ x < 0\ , f(x) = f(0) - \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{x^3}{8\sqrt{2}} + o_{0^-}(x^3)$. Comme f admet un $DL_3(0^-)$, f admet un $DL_1(0^-)$ et par conséquent, f est dérivable à gauche en 0 $et\ f_g'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la demi-tangente à gauche a pour équation pour équation $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$. De plus, $f(x) - \left[f(0) - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right] \sim_{0^-} \frac{-x^3}{8\sqrt{2}}$.

Donc, $au\ voisiange\ de\ 0^-,\ f(x) - \left[f(0) + \frac{1}{\sqrt{2}}x\right] > 0$. J'en déduis Cf est au-dessus de sa demi-tangente à gauche en 0.

Comme $f_g'(0) \neq f_d'(0)$, f n'est pas dérivable en 0 et Cf a un point anguleux en 0.

3) Soit f une fonction dérivable à droite et à gauche en a. Posons $g(t) = \frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{|t|}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

$\forall t > 0, f(a+t) = f(a) + f_d'(a)t + o_{0^+}(t)$ et $f(a-t) = f(a+(-t)) = f(a) + f_g'(a)(-t) + o_{0^+}(t)$

Donc, $\forall t > 0, g(t) = \frac{f_d'(a)t + o_0(t) - f_g'(a)t + o_0(t)}{t} = f_d'(a) - f_g'(a) + o_{0^+}(1)$. $Et\ \lim_{t\to 0^+} g(t) = f_d'(a) - f_g'(a)$

$\forall t < 0, f(a-t) = f(a) + f_d'(a)(-t) + o_{0^-}(t)$ et $f(a+t) = f(a) + f_g'(a)t + o_{0^-}(t)$.

Donc, $\forall t < 0, g(t) = \frac{-f_d'(a)t + o_0(t) + f_g'(a)t + o_0(t)}{-t} = f_d'(a) - f_g'(a) + o_{0^-}(1)$. $Et\ \lim_{t\to 0^-} g(t) = f_d'(a) - f_g'(a)$.

Ainsi, $\lim_{t\to 0} g(t) = f_d'(a) - f_g'(a)$. Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0.

7 **Théorème :** Si f est dérivable en a alors f est continue en a. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Conséquence : $$\underbrace{D_{f'}}_{\substack{domaine\\ de\\ défintion\\ de\ f'}} \subset \underbrace{D_c}_{\substack{domaine\\ de\\ continuité\\ de\ f}} \subset \underbrace{D_f}_{\substack{domaine\\ de\\ défintion\\ de\ f}}$$

8 **Attention , la réciproque est fausse.** Donner une fonction qui est continue en un point mais pas dérivable en ce point.

9 **Théorème** Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions définies sur D.

1) Si u et v sont dérivables sur D et k est une constante (en x) réelle alors $k.u$, $u+v$, $u \times v$ sont dérivables sur D et $\forall x \in D$,

$$(k.u)'(x) = k.u'(x)$$
$$(u+v)' = u'(x) + v'(x)$$
$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) .$$

2) Si u et v sont dérivables sur D et u ne s' annule pas sur D alors $1/u$ et $v/\,u$ sont dérivables sur D et $\forall x \in D$,

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{v}{u}\right)'(x) = \frac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{(u(x))^2} .$$

3) Si u est dérivable sur D et v est dérivable sur E et $\forall x \in D, u(x) \in E$ alors $v \circ u : (x \to v(u(x)))$ est dérivable sur D et

$$\forall x \in D,\ (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times (v' \circ u)(x).$$

10 **Conséquence :** si f n'est pas définie par morceaux et n'est pas définie par une intégrale et que l'expression de f n'est constituée que de fonctions dérivables partout sur leur propre domaine de définition** alors f est dérivable sur son propre domaine de définition .

11 **Théorème** : Toutes les fonctions usuelles sauf la partie entière, les racines $n^{ièmes}$ réelles, Arcsin, Arccos et la valeur absolue **.

12

Fonction	Domaine de définition	Domaine de continuité	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée	Limites usuelles par taux d'accroissement	Développement limité en 0	Primitive
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0			
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ $\lim_{x\to b}\frac{\ln(x)-\ln(b)}{x-b} = \frac{1}{b}$ où $b > 0$		
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x\to b}\frac{e^x - e^b}{x-b} = e^b$		
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$ $\lim_{x\to a}\frac{\cos(x) - \cos(a)}{x-a} = -\sin(a)$		
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x) - \sin(a)}{x-a} = cos(a)$		
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to a}\frac{\tan(x) - tan(a)}{x-a} = 1 + tan^2 a$ où $a \in D_{tan}$		

x^n tq $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$		
x^{-n} tq $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1}$	$\lim_{x\to a}\frac{x^{-n}-a^{-n}}{x-a}=-na^{-n-1}$		
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ $si\ a>0$		
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ tq $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$\mathbb{R}^+\ si\ n\ pair, \geq 2$ $\mathbb{R}\ si\ n\ impai \geq 2$	$\mathbb{R}^+\ si\ n\ pair, \geq 2$ $\mathbb{R}\ si\ n\ impai \geq 2$	$\mathbb{R}^{+*}\ si\ n\ pair \geq 2$ $\mathbb{R}^*\ si\ n\ impa \geq 2$	$\frac{1}{n}x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$	$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ $si\ a\in Df'$		
x^α avec $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$, constante		Df	$Df\backslash\{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-b^\alpha}{x-b}=\alpha b^{\alpha-1}$ $si\ b\in Df'$		
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\begin{cases}1\ si\ x>\\-1\ si\ x<\end{cases}$			
$\lfloor x\rfloor$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	0			
$Arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$Arccos(x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$			
$Arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$			
$ch(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$sh(x)$			
$sh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ch(x)$			
$x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$ Où α constante réelle	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\lim_{x\to b}\frac{x^\alpha-b^\alpha}{x-b}=\alpha\ b^{\alpha-1}$ où $b\in\mathbb{R}^{+*}$.		
$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ où $a_0,\ldots,a_n$ constantes	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sum_{k=1}^{n}ka_kx^{k-1}$			
$v(ax+b)$ où $a\ et\ b$ constantes réelles.							
$sin(u(x))$							
$\cos(u(x))$							
$\tan(u(x))$							
$\lvert u(x)\rvert$							
$u(x)^n$							
$\frac{1}{u(x)^n}=u(x)^{-n}$							
$\sqrt[n]{u(x)}=u(x)^{\frac{1}{n}}$							
$u(x)^\alpha$ $où\ \alpha\ constante$							
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$							

$\exp(u(x)) = e^{u(x)}$							
$ch(u(x))$							
$sh(u(x))$							
$Arcsin(u(x))$							
$Arccos(u(x))$							
$Arctan(u(x))$							

13 **Exemples :**

1) Soit $f : (x \mapsto \sqrt{e^x - 4})$. Etudions la dérivabilité de f et calculons le cas échéant $f'(x)$.

- D_f? $f(x)\ existe\ \Leftrightarrow e^x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln(4) = 2\ln(2)$. Donc $Df = [2\ln(2), +\infty[$.
- D_c? f est continue sur Df puisque l'expression de f n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.
- $D_{f'}$? Dans l'expression de f , seule la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur son propre domaine de définition. La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}(= E)$. Cherchons donc le domaine $D\ de\ Df$ tel que $\forall x \in D, e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Or, $e^x > 4 \Leftrightarrow x > 2\ln(2)$. Donc $\forall x \in]2\ln(2), +\infty[,\ u(x) = e^x - 4 \in \mathbb{R}^{+*}$. Et par suite, f est dérivable au moins sur $]2\ln(2), +\infty[$. Et $\forall x \in]2\ln(2), +\infty[, f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 4}}$.

<u>Etude de la dérivabilité de f en $2\ln(2)$</u> : il s'agit d'étudier l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x \to 2\ln(2)} \frac{f(x) - f(2\ln(2))}{x - 2\ln(2)}$

<u>1ère méthode</u> : Revenons à la définition , étudions la limite de $\frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)}$ quand $x \to 2\ln(2)$.

$\forall x \in]2\ln(2), +\infty[, \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{x-2\ln(2)} = \frac{\sqrt{e^x-4}}{e^x-4}\frac{e^x-4}{x-2\ln(2)} = \frac{1}{\sqrt{e^x-4}}\frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)}$. Or, $\lim\limits_{x\to 2\ln(2)} \frac{1}{\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Et, comme la fonction exponentielle est dérivable en $2\ln(2)$, $\lim\limits_{x\to 2\ln(2)} \frac{e^x-e^{2\ln(2)}}{x-2\ln(2)} = exp'(2\ln(2)) = e^{2\ln(2)} = 4$. Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$.

<u>2ème méthode</u> : f étant continue en $2\ln(2)$ et dérivable au moins sur $]2\ln(2), +\infty[$, je peux utiliser le critère de dérivabilité (vu plus bas) : j'étudie donc la limite de $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$ quand $x \to 2\ln(2)\,. Or,$ $\lim\limits_{x\to 2\ln(2)} \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}} = +\infty$. Donc le théorème assure que $\lim\limits_{x\to 2\ln(2)} \frac{f(x)-f(2\ln(2))}{x-2\ln(2)} = +\infty$

j'en conclus que f n'est pas dérivable à $2\ln(2)$ et Cf a une tangente verticale en $A(2\ln(2), 0)$. Et ainsi, $D_{f'} =]2\ln(2), +\infty[\ et$ Et $\forall x \in D_{f'}, f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-4}}$.

2) Soit $f : \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x}\ si\ x = 0 \\ 0\ si\ x \neq 0 \end{cases}\right)$. Etudions la dérivabilité de f et calculons le cas échéant $f'(x)$.

f est une fonction définie par morceaux. $Df = \mathbb{R}$. Posons $g(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$. $Dg = \mathbb{R}^*\ et\ f$ et g coïncident (sont égales) sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, f et g coïncident sur un voisinage de chaque réel non nul. Comme g n'est constituée que de fonctions continues et dérivables sur leur propre domaine de définition, g est continue et dérivable sur $Dg = \mathbb{R}^*$. Soit un réel a non nul. Comme f et g coïncident sur un voisinage de a et par conséquent, sur ce voisinage, $f(x) = g(x)\ et\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ et par suite, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = g'(a) = \frac{-a\sin(a)-\cos(a)+1}{a^2}$. Ainsi, je peux conclure que f est continue et dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*$et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2}$.

Continuité en 0 ? Je vois que $\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$. Comme cos est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = cos'(0) = -\sin(0) = 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0 ? $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\cos(x)-1}{x}}{x} = \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}$. J'en conclus que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Ainsi f est dérivable 5
sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \begin{cases} \frac{-x\sin(x)-\cos(x)+1}{x^2}\ si\ x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}\ si\ x = 0 \end{cases}$.

3) Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}+\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)-2}{2x-\pi}$.

Posons $f(x) = \underbrace{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}}_{g(x)} + \underbrace{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}_{h(x)} - 2$. Je remarque que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ existe, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ \ et\ \frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}-2e^{\frac{2x}{\pi}}}{2x-\pi} = \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Dans l'expression de f, seule la fonction ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais uniquement sur $\mathbb{R}^{+*} et$ seule la fonction $\sqrt[3]{.}$ n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition mais uniquement en tout point de $\mathbb{R}^*$.

D'une part, $\forall x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[, \frac{2x}{\pi} > 0$ donc h et, par suite, f sont définies sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$. h est dérivable au moins sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$ et $\forall x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[, h'(x) = \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{2x}{\pi}} = \frac{1}{x}$.

D'autre part, $\forall x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[, \sin(x) \in]\frac{1}{2}, 1]$ donc $u(x) = 9\sin(x) - 1 \in]\frac{7}{2}, 8] \subset \mathbb{R}^*$. Par conséquent, g et donc f sont dérivables au moins sur $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$,et par conséquent en $\frac{\pi}{2}$ (puisque $\frac{\pi}{2} \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$). Et, $\forall x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[, g'(x) = u'(x)\left[\frac{1}{3}(u(x))^{\frac{1}{3}-1}\right] = 9\cos(x)\frac{1}{3}(9\sin(x)-1)^{\frac{2}{3}} = 3\cos(x)\sqrt[3]{\frac{1}{(9\sin(x)-1)^2}}$.

Donc, $\forall x \in]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[, f'(x) = 3\cos(x)\sqrt[3]{(9\sin(x)-1)^2} + \frac{1}{x}$. Alors, en particulier, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt[3]{\left(9\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)^2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. J' en déduis que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}$. Et enfin, je peux conclure que : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{9\sin(x)-1}+\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)-2}{2x-\pi} = \frac{1}{\pi}$

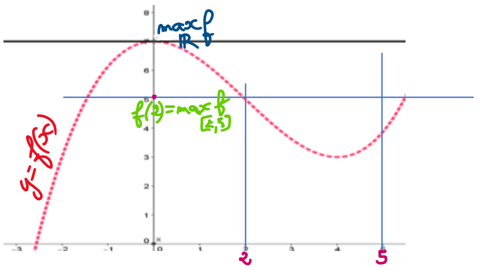
Exercice : Choisir et appliquer les bonnes formules pour calculer $f'(x)$ lorsque : 1. $f(x) = 2cos(x)$ 2. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ 3. $f(x) = 5 - \frac{3}{e^{2x}}$ 4. $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$ $f(x) = \frac{\cos(x)}{7\ln(x)}$ 6. $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x$ 7. $f(x) = \cos(ln(x))$ 8. $f(x) = ln\left(\sqrt{3x-1}\right)$ 9. $f(x) = \sqrt[4]{1 - x + 3x^2}$ 10. $f(x) = 2\sin(x)\tan(\ln(x))$.

II Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle.

1. Extremum.

14 **Théorème de <u>contidition nécessaire d'extremum</u> :** Soit ***I* un intervalle** ⚠ et f une fonction définie sur I.
Si $\underbrace{a \in \mathring{I}}_{\substack{a \in I \text{ et} \\ a \text{ n'est pas} \\ \text{un bord de } I.}}$ et f est dérivable en a et f admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

15 **Illustration :**



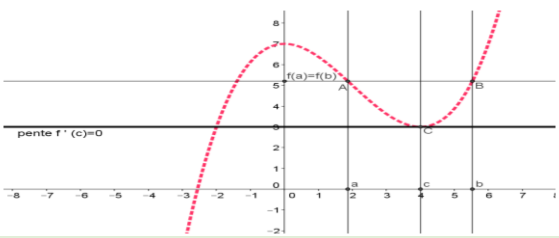
16 **NB**
1) « $f'(a) = 0$ » est une **condition nécessaire mais pas suffisante**. Prenons par exemple : $f: (x \mapsto x^3)$.
Alors f a une dérivée nulle en 0 sans admettre un extremum en 0 .
Autrement dit , les racines de f'ne
2) Une condition suffisante mais pas nécessaire pour f admette un extremum en a est que f soit croissante d'un coté et décroissante de l'autre coté de a. Prenons par exemple : Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$. Montrons que f admet un minimum en 0 mais fn'est pas croissante à droite ni décroissante à gauche de 0.
3) Le résultat est faux sans l'hypothèse « a intérieur à I ». Regardons le dessin ci-contre et choisissons $I = [2\,;5]$ alors le maximum de f sur I est $f(2)$ et pourtant $f'(2) \neq 0$.

17 **Conséquence** :
Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I alors les extrema de f sont atteints en des réels qui sont **parmi** les racines de f'.
Si f est dérivable sur un intervalle I alors les extrema de f sont atteints en des réels qui sont **d**es racines de f' intérieures à I ou qui sont des extrémités de I.

2. Théorème de Rolle.

18 **<u>Théorème de Rolle</u> :** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$et $f(a) = f(b)$ alors f' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$, cela signifie qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

19 **Illustration :**



20 **<u>Théo de Rolle généralisé</u>** : Si f est continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ et $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ alors il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

NB : le résultat est faux sans l'une des hypothèses.

21 **<u>Exercice :</u>** Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que : $f(a) = f(b) = 0 \; et \; f'(a) > 0 \; et \; f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe trois réels c_1 , c_2 et c_3 tels que : $a < c_1 < c_2 < c_3 < b \; et \; f(c_2) = 0 \; et \; f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Comme $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$, l'expression $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est strictement positive au voisinage de a^+. Ainsi, il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a} > 0$ et comme $x_1 - a > 0$, $f(x_1) - \underbrace{f(a)}_{=0} > 0$. Donc $f(x_1) > 0$.

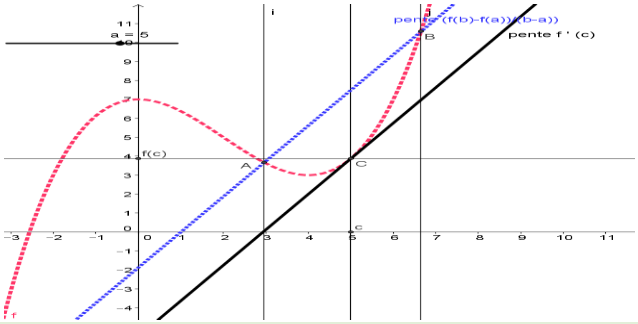
Comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b) > 0$, l'expression $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ est strictement positive au voisinage de b^-. Ainsi, il existe $x_2 \in]x_1, b[$ tel que $\frac{f(x_1)-f(b)}{x_1-b} > 0$ et comme $x_2 - b < 0$, $f(x_2) - \underbrace{f(b)}_{=0} < 0$. Donc $f(x_2) < 0$.

Comme f est dérivable, f est continue sur $[a, b]$.Comme de plus, f prend une valeur positive en $x_1$et une valeur négative en x_2, le TVI assure que f n'annule au moins une fois sur $]x_1, x_2[$ en un réel c_2 . Ainsi, $c_2 \in]x_1, x_2[\subset]a, b[$ et $f(c_2) = 0$.
Alors, $f(a) = 0 = f(c_2)$. Comme, de plus, f est dérivable sur $[a, b]$, f est dérivable donc continue sur $[a, c_2]$. Alors le théorème de Rolle assure que f' s'annule $]a, c_2[$ en un réel c_1. De même sur $[c_2, b]$, f' s'annule $]c_2, b[$ en un réel c_3.
Ainsi, il existe trois réels c_1 , c_2 et c_3 tels que : $a < c_1 < c_2 < c_3 < b \; et \; f(c_2) = 0 \; et \; f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

3. Théorèmes des accroissements finis

22 **Théo d'<u>égalité des accroissements finis</u> (EAF) <u>:</u>** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(i.e \; f(b) - f(a) = f'(c)(b - a))$.

23 **Illustration :**



24 **Interprétation géométrique**

L'égalité $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se traduit géométriquement par : $(AB) \,//\, (T_C)$ où (T_C) est la tangente à Cf au point C.

NB : résultat faux sans l'une des deux hypothèses (tentez d'illustrer).

25 **Exemples:** 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{1+4x^2} \leq Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.

Soit x un réel strictement positif. Posons $f(t) = Arctan(t)$. f est de classe C^1sur $[x, 2x]$ et $\forall t \in [x, 2x], f'(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Alors l'EAF assure qu'il existe $c_x \in [x, 2x]$ tel que $\frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{2x-x} = f'(c_x)$. Or, $c_x \in [x, 2x], \frac{1}{1+4x^2} \leq f'(c_x) = \frac{1}{1+c_x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Donc, $\frac{1}{1+4x^2} \leq \frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{x} \leq \frac{1}{1+x^2}$ et ainsi, $\frac{x}{1+4x^2} \leq Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$. Pour $x = 0$, l'inégalité est vérifiée (et est une égalité).

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}})$.

Soit $x > 0$. Posons $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$. f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall t > 0, f'(t) = -\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}$. Donc f est continue et dérivable sur $[x, x+1]$ et par conséquent, l'EAF assure qu'il existe un réel $c \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x) = -\frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$. Alors, comme $0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et $0 \leq e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \leq e^{\frac{1}{c^2}} \leq e^{\frac{1}{x^2}}$, $0 \geq -\frac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}} \geq f(x+1) - f(x) \geq -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. $Ainsi, \forall x > 0, 0 \geq -\frac{x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}} \geq x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) \geq -\frac{x^2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

$Or, \frac{x^2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2}e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $e^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. J'en déduis que $\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}) = -1$.

26 **Théorème de l'inégalité des accroissements finis (IAF)**

Version 1 : Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $|f'|$ est majorée par M sur$]a, b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Version 2 : Si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$ et $|f'|$ est majorée par M sur $\mathring{I}$ alors f est M-lipschitzienne sur I i.e. pour tous réels x et y de I, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. l'hypothèse « I intervalle » est essentielle.

27 **Conséquence :** Une condition nécessaire pour que f soit lipschitzienne sur I est « la continuité de f sur I ». Une condition suffisante pour que f soit lipchitzienne sur I est « f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ et $|f'|$ est majorée sur $\mathring{I}$ ».

28 **Exemples :** 1) Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{x}| \leq \frac{1}{3}\sqrt[3]{|x|}$.

Soit $f: (t \mapsto \sqrt[3]{t})$. Prenons $x > 0$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$donc sur $[x\,; 2x]$ et $\forall t \in [x; 2x], |f'(t)| = \left|\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}-1}\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\right|$ donc, $\forall t \in [x; 2x], |f'(t)| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Alors d'après l'$IAF$, $|f(2x) - f(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}|2x - x| = \frac{1}{3}|x|^{-\frac{2}{3}}|x| = \frac{1}{3}|x|^{\frac{1}{3}}$. OK.

Prenons $x < 0$. $Alors$ $(-x) > 0$ $donc, |f(-2x) - f(-x)| \leq \frac{1}{3}|-x|^{\frac{1}{3}}$ $ie.$ $|-f(2x) + f(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^{\frac{1}{3}}$ car f est impaire et la valeur absolue est paire. Et ainsi, $|f(2x) - f(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^{\frac{1}{3}}$ OK.

2) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $ln(ln(p+1)) - ln\,(ln(p)) \leq \frac{1}{pln(p)}$. En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kln(k)}$.

Posons $f(x) = \ln(ln(x))$. f est de classe C^1sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1, f'(x) = \frac{1}{xln(x)}$.

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $\forall x \in [p, p+1], f'(x) = |f'(x)| \leq \frac{1}{pln(p)}$. Donc, $ln(ln(p+1)) - ln(ln(p)) = |\ ln(ln(p+1)) - \ln(ln(p))| \leq \frac{1}{pln(p)}|(p+1) - p| = \frac{1}{pln(p)}$.

Alors, $\forall n \geq 2, \underbrace{\sum_{p=2}^{n}(ln(\ln(p+1)) - ln(ln(p)))}_{somme\ télescopique} \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{pln(p)}$. Donc $\forall n \geq 2, ln(\ln(n+1)) - ln(ln(2)) \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{pln(p)}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} ln(ln(n+1)) - ln(ln(2)) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{kln(k)} = +\infty$.

29 **Application aux suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.**

Exemple : Soit u la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3 + 2u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n}{2}}$et en déduire la limite de u.

■Posons $f(x) = \sqrt{3+2x}$. $Df = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ et f est continue et strictement croissante comme composée de fonctions continues et strictement croissantes sur leur propre domaine de définition. Par conséquent, $f([1, +\infty[) = [f(1), \lim_{+\infty} f\,[= [\sqrt{5}, +\infty[\subset [1, +\infty[\subset Df$. Comme $u_0 \in [1, +\infty[$, je peux affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in [1, +\infty[$. De plus, f étant croissante, u est monotone.

■f est continue sur $[1, +\infty[$ donc les limites possibles de u sont $+\infty$ et les réels $L \in [1, +\infty[$ tels que $f(L) = L$. Or, $f(L) = L \Leftrightarrow \sqrt{3+2L} = L \Leftrightarrow L^2 - 2L - 3 = 0 \Leftrightarrow L = -1$ ou $L = 3$ $\underset{car\ L\geq1}{\underbrace{\Leftrightarrow}}$ $L = 3$. Ainsi, les limites possibles de u sont $+\infty$ et 3.

■f est de classe C^1sur $[1, +\infty[$ (puisque dans son expression seule la racine carrée n'est pas de classe C^1sur tout son domaine de définition , mais seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$. $Mais$ $comme$ $\forall x \in [1, +\infty[, u(x) = 3 + 2x \in \mathbb{R}^{+*}$, f $, composée$ de u par la $racine$ $carrée, est$ de classe C^1sur $[1, +\infty[$).

Et $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{3+2x}} = \frac{1}{\sqrt{3+2x}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc, $\forall x \in [1, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Alors, par l'$I.A.F.$, f est contractante de rapport $\frac{1}{\sqrt{5}}$; autrement dit, $\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|x - y|$.

■Alors $\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(3)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|u_n - 3|$ $i.e.$ $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|u_n - 3|$. Alors par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - 3| = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n}{2}}$.

En effet, $|u_0 - 3| = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^0 |u_0 - 3|$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{|u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - 3| \Rightarrow |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|u_n - 3| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - 3| = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n+1} |u_0 - 3|\right\}$.

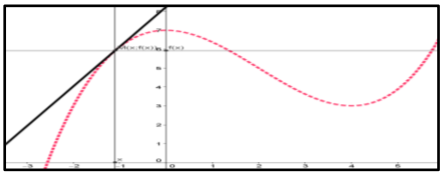
Comme $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| < 1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = 0$ et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. Et par suite, si comme $u_0 < 3$ et u est monotone, u est croissante.

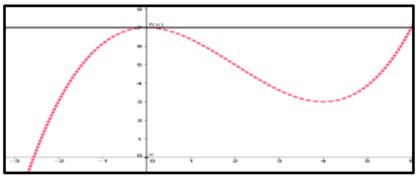
4. Monotonie

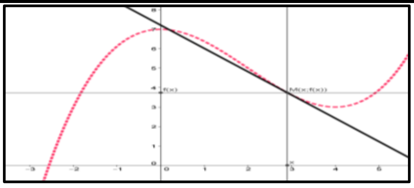
30 **Théorème monotonie et signe de la dérivée .** Soit f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $\mathring{I}$.

- f croissante (resp. *décroissante*) sur I **si et ssi** f' positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$.
- f constante sur I **si et ssi** f' nulle sur $\mathring{I}$.
- f strictement croissante (resp. *décroissante*) sur I **si et ssi** f' positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$ et f' ne s'annule qu'en des points isolés(ie. pas sur tout un intervalle non réduit à un point) . l'hypothèse « I intervalle » est essentielle.

31







32 **NB** : 1) résultat faux si l'on ne se place pas sur un intervalle comme le prouve le contre -exemple : La fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée strictement négative mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

2) Même si f n'est dérivable que presque partout, la continuité de f partout et le signe de f' presque partout permet d'obtenir la monotonie partout.

33 **Méthode** : pour prouver la monotonie d'une fonction f :

1) On regarde (rapidement) si l'on peut comparer $f(x)$ *et* $f(y)$ lorsque $x < y$.
   (Exemple : $\varphi : \left(x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{xt}}{1+t^2} dt\right)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
2) On regarde si f n'est pas une composée ou somme ou .. de fonctions monotones connues. (Exemple : $\varphi : (x \mapsto \ln(1+\sqrt{x}) + 2x^2 - 1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)
3) On étudie le signe de la dérivée de f sur un INTERVALLE (après avoir justifié l'existence de cette dérivée et l'avoir calculée).

34 **Conséquence** : Soit f et g deux fonctions définies et continue sur un même intervalle I et dérivable sur l'intérieur de cet intervalle. Si $\forall x \in \mathring{I}, f'(x) = g'(x)$ alors il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in I, f(x) = g(x) + c$.

35 **Exemple** ::Montrons que $\forall x \in]0,1], Arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} - Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

Soit $f(x) = Arcsin(\sqrt{x})$ *et* $g(x) = Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$\forall x \in 0,1[, \sqrt{x} \in]0,1[\subset [-1,1]$, donc $f(x)$ existe. De plus, $u : (x \mapsto \sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, \sqrt{x} \in]0,1[\subset]-1,1[$. Comme $Arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$, par composition, f est dérivable sur $]0,1[$. Et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = u'(x)Arcsin'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$\forall x \in]0,1[, \frac{1-x}{x} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $g(x)$ existe. De plus, $u : (x \mapsto \sqrt{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $t : (x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{x}})$ est dérivable sur$]0,1[$ et par suite, g est dérivable sur $]0,1[$. Et $\forall x \in]0,1[, g'(x) = -t'(x)Arctan'(t(x)) = \frac{-t'(x)}{1+t(x)^2}$ Et en posant $s(x) = \frac{1-x}{x}, t'(x) = s'(x)u'(s(x)) = \frac{s'(x)}{2\sqrt{s(x)}}$ *avec* $s(x) = \frac{1-x}{x} = x^{-1} - 1$ donc $s'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. Par conséquent, $t'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1-x}} \overset{\substack{car\ x>0 \\ et\ 1-x>0}}{\triangleq} -\frac{1}{2x^2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Par suite, $g'(x) = -t'(x) \times \frac{1}{1+t(x)^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Ainsi, $\forall x \in]0,1[, f'(x) = g'(x)$. Comme nous travaillons sur l'intervalle $]0,1[$, j'en déduis qu'il existe une constante c réelle telle que $\forall x \in]0,1[, f(x) = g(x) + c$. En particulier, $c = f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = Arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + Arctan(\sqrt{1})$.

Or, $Arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = Arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = l'unique\ réel\ de\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ dans\ le\ sinus\ vaut\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Et, $Arctan(\sqrt{1}) = Arctan(1) = l'unique\ réel\ de\ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ dans\ la\ tangente\ vaut\ 1 = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $c = \frac{\pi}{2}$ et finalement, $\forall x \in]0,1[, f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2}$ i.e. $\forall x \in]0,1[, Arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} - Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. Cette égélité est encore vraie pour $x = 1, car\ Arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - Arctan0$. Ainsi, $\forall x \in]0,1] , Arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{2} - Arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

36 **Application :** Deux primitives d'une même fonction sur un **intervalle** différent d'une constante.

Démo : Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur l'intervalle I . Montrons qu'il existe un réel c tel que : $\forall x \in I, F(x) = G(x) + c$.

Posons $H = F - G$. F et G étant dérivables sur I, H est dérivable sur I et $\forall x \in I, H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. j'en déduis par le théorème « dérivation et variation » que H est constante sur l'intervalle I. Il existe un réel c tel que : $\forall x \in I, F(x) - G(x) = H(x) = c\ et\ ainsi, F(x) = G(x) + c$.

37 NB : Si F est une primitive de f sur les intervalles disjoints I *et* J alors$\left(x \mapsto \begin{cases} F(x) + k_1\ si\ x \in I \\ F(x) + k_2\ si\ x \in J \end{cases}\right)$est une primitive de f sur $I \cup J$.

5. Critère de dérivabilité, de classe C^k

38 **Théo de Critère de dérivabilité.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Si I est un intervalle et f est continue en a et f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{t\to a} f'(t) = L$ *réel ou infini* alors $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = L$.

En particulier :

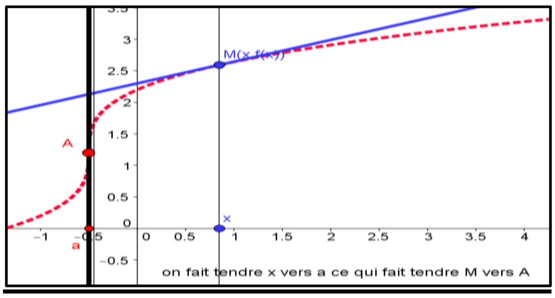
- Si f est continue en $a \in I$ et f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{t\to a} f'(t) = \boldsymbol{L}$ réel alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ *et* f' est continue en a.
- Si f est continue en $a \in I$ et f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{t\to a} f'(t) = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a et Cf a une tangente verticale au point $A(a, f(a))$.

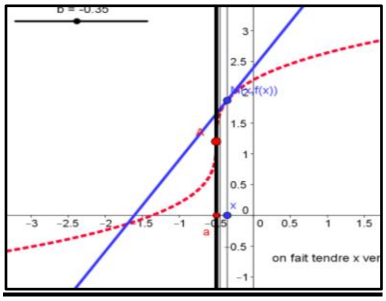
Généralisation: Si f est continue en a et dérivable au moins sur $I \cap]a, +\infty[$ $(]-\infty, a[)$ et $\lim_{x\to a^+(a^-)} f'(x) = L$ alors $\lim_{x\to a^+(a^-)}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.

39 **Illustration** D'après le théorème, si f est continue en a et dérivable autour de a, la **tangente à Cf** au point A est la position limite des tangentes à Cf aux points $M(x, f(x))$ quand x tend vers a (c'est-à-dire quand M se rapproche de A en suivant Cf).

En effet, si L est un réel alors quand M tend vers A, les pentes $f'(x)$ des tangentes à Cf en M tendant vers L qui sera donc $f'(a)$ et par suite ces tangentes en M vont tendre vers la droite passant par A et dirigée par $L = f'(a)$. Si par contre $L = \pm\infty$ alors quand M tend vers A, les pentes $f'(x)$ des tangentes à Cf en M tendant vers $\pm\infty$ et par suite ces tangentes en M vont tendre vers la droite verticale passant par A. https://www.geogebra.org/m/d9pamt2e

(afficher p, masquer g et faire bouger b -qui joue le rôle de x- et le faire tendre vers a).





Attention :
f' peut avoir une limite en a sans que f ne soit continue en a et dans ce cas, évidemment, f n'est pas dérivable en a (à illustrer). Il est donc indispensable de vérifier la continuité en a appliquer ce théorème.

40 **Exemple** : 1.Soit $f(x) = \text{Arccos}(2x-1)\sqrt{\pi - 4Arctan(x)}$. Etudions la dérivabilité de f.

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi - 4Arctan(x) \geq 0 \\ -1 \leq 2x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Arctan(x) \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1. \text{ Ainsi, } Df = [0,1].$$

- Dans l'expression de f, seules les fonctions Arccos et racine carrée ne sont pas dérivables sur leur domaine de définition.

La fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$. Résolvons donc l'inéquation $\pi - 4Arctan(x) > 0$. D'après la recherche de Df, on peut dire que : $\pi - 4Arctan(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

La fonction $Arccos$ n'est dérivable que sur $]-1,1[$. Résolvons donc l'inéquation $-1 < 2x-1 < 1$. D'après la recherche de Df, on peut dire que : $-1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. J'en déduis que f est au moins dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\sqrt{\pi - 4Arctan(x)} - \frac{2\text{Arccos}(2x-1)}{(1+x^2)\sqrt{\pi-4Arctan(x)}}$.

- Etudions la dérivabilité de f aux points 0 et 1

f est continue sur Df car son expression n'est contituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition.

f est continue sur $Df\backslash\{0,1\}$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$. Le critère de dérivabilité assure alors que f n'est pas dérivable en 0 et Cf a une tangente verticale en 0.

$\forall x \in]0,1[, \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\text{Arccos}(2x-1)\sqrt{\pi-4Arctan(x)}}{-(1-x)} = \frac{\text{Arccos}(2x-1)\sqrt{\pi-4Arctan(x)}}{-\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}} = -\frac{\text{Arccos}(2x-1)}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{1-(2x-1)}}2\sqrt{\frac{\frac{\pi}{4}-Arctan(x)}{1-x}}$. Or on a prouvé que $\lim_{t\to 1}\frac{\text{Arccos(t)}}{\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}$ donc par composition, $\lim_{x\to 1}\frac{\text{Arccos}(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)}} = \sqrt{2}$. De plus, $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}-Arctan(x)}{1-x} = Arctan'(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$. J'en déduis que f est dérivable en 1 et $f'(1) = -2\sqrt{2}$.

- Bilan : f est dérivable uniquement sur $]0,1]$ i.e. $Df' =]0,1]$. Et $\forall x \in]0,1], f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\sqrt{\pi - 4Arctan(x)} - \frac{2\text{Arccos}(2x-1)}{(1+x^2)\sqrt{\pi-4Arctan(x)}} \; si \; x \in]0,1[\\ -2\sqrt{2} \; si \; x = 1. \end{cases}$.

2) Soit f la fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \; si \; x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + 1 \; si \; x \in]1,2] \\ \frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4} \; si \; x > 2 \end{cases}$.

1. Déterminer a *et* b pour que f soit dérivable en 1. Désormais a et b prennent ces valeurs.
2. f est -elle continue ? dérivable en 2 ? En déduire Df' et l'expression de $f'(x)$.

1. $g: \left(x \mapsto \sqrt{x}\right), h: (x \mapsto ax^2 + bx + 1)$ *et* $k: \left(x \mapsto \frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4}\right)$ sont de classe C^∞ sur respectivement $]0,1], [1,2]$ et $]2, +\infty[$. Par conséquent, f est de classe C^∞ sur $]0,1[,]1,2[$ et $]2, +\infty[$. Et $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1 = f(1)$ *et* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = a + b + 1$ et $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} h(x) = 4a + 2b + 1$.

Alors f est continue en 1$\Leftrightarrow a + b + 1 = 1 \Leftrightarrow a + b = 0$. Désormais $b = 1 - a$ et f est continue en 1.

$\forall x \in]0,1], f'(x) = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$. Et, $\forall x \in]1,2[, f'(x) = h'(x) = 2ax + b = 2ax + 1 - a$. Donc, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = a + 1$.

Par conséquent, le critère de dérivabilité assure que $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=a+1$. Et par suite, pour que f soit dérivable en 1 sietssi $a+1=\frac{1}{2}$ sietssi $a=-\frac{1}{2}$. Ainsi, f est dérivable en 1 sietssi $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{3}{2}\end{cases}$. Désormais : $\forall x\geq 0, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \; si \; x\in[0,1] \\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1 \; si \; x\in]1,2] \\ \frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4} \; si \; x>2\end{cases}$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=-2+3+1=2=f(2)$.

Et d' autre part, $k(x)=\frac{x^3+3x^2-16x+12}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x^2+5x-6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x^2+5x-6)}{(x+2)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} k(x)=\frac{8}{4}=2$. Ainsi f est continue en 2.

Enfin,$\forall x>2, f'(x)=k'(x)=\frac{(2x+5)(x+2)-(x^2+5x-6)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+16}{(x+2)^2}$. $Donc, \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}$. Donc le critère de dérivabilité , $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{7}{4}$.

$\forall x\in]1,2[, f'(x)=h'(x)=-x+\frac{3}{2}$. $Donc, \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=-\frac{1}{2}$. Donc le critère de dérivabilité , $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{2}\neq\frac{7}{4}$.

Et par conséquent, f n'est pas dérivable en 2. Enfin, g n'étant pas dérivable en 0 , f n'est pas dérivable en 0.

J'en conclus que $Df'=]0,2[\cup]2,+\infty[$ et $\forall x\in]0,2[\cup]2,+\infty[\,, f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} \; si \; x\in]0,1[\\ -x+\frac{3}{2} \; si \; x\in[1,2[\\ \frac{x^2+4x+16}{(x+2)^2} \; si \; x>2\end{cases}$

41 **ATTENTION** :

1) f est dérivable en a et $f'(a)=L$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ f est continue en a et $\lim\limits_{t\to a} f'(t)=L$.

Contre-exemple : Soit $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x\neq 0 \\ 0 \; si \; x=0\end{cases}$. Montrons que f est continue et dérivable en 0 mais f'n'a pas de limite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\left(x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)$. Donc f est continue en 0 . Et $\forall x\neq 0, \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ et $\left(x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée donc $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Ainsi, f est dérivable en 0 Et $f'(0)=0$. De plus, $\left(x\mapsto x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc f l' est aussi et $\forall x\neq 0, f'(x)=2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}=0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-1\neq 1=\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right)$. Donc f' n'a pas de limite en 0.

Par contre, $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ f'(a)=L \\ f' \text{est continue en } a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ f \text{ est dérivable au moins sur } I\backslash\{a\} \\ \lim\limits_{\substack{t\to a \\ t\neq a}} f'(t)=L.\end{cases}$.

2) Si les limites de f' en a, ni en a^+, ni en a^- n'existent pas alors le théorème ne permet pas de conclure sur la dérivabilité de f en a.(et f' n'est pas continue en a et f ne peut pas être de classe C^1 sur I). Dans cette situation, pour étudier la dérivabilité de f en a, il faut alors étudier la limite en a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemple : Soit $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \; si \; x\neq 0 \\ 0 \; si \; x=0\end{cases}$.Montrons que f est dérivable en 0 et pourtant $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas. f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ car g: $(x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right))$ l'est.

Et $\forall x\neq 0, f'(x)=g'(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f'\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)+(4n\pi+\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=4n\pi+\pi$. Donc, f' n'a pas de limite finie en 0.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n\pi}=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}, f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=\cos(2n\pi)+(4n\pi)\sin(2n\pi)=1$. Donc, f' n'as pas de limite en 0. Et pourtant .....

f est continue 0 car $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ es bornée donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

f est dérivable 0 car $\forall x\neq 0, \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ et $\left(x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est bornée donc $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

3) La continuité en a est essentielle. Sans cette continuité, la propriété est fausse .

Contre-exemple: $f(x)=\begin{cases}2x-1 \; si \; x<0 \\ 10 \; si \; x=0 \\ 2x+4 \; si \; x>0\end{cases}$ .Montrons que f n'est pas dérivable en 0 et pourtant $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$existe et est finie.

f n'est pas continue en 0 (car $\lim\limits_{x>0} f(x)=4\neq 10$) donc pas dérivable en 0 . Mais f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\neq 0, f'(x)=2$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=2$.

42 **METHODE : Quelles méthodes choisir pour justifier la dérivabilité en un point a ?**
Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point a de Df, vous pouvez :

1) **Calculer directement $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.** Cette méthode permet toujours de répondre à la question poser . Par contre , on ne répond que à cette question et parfois l'expression de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est compliquée et la limite plus difficile à calculer et il faut souvent utiliser les DL .

2) **Calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ par le critère de dérivabilité … il faut montrer la continuité en a et la dérivabilité au moins sur $I\backslash\{a\}$ et calculer $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$.** Cette méthode ne permet pas toujours de répondre à la question posée puisque si $f'(x)$ n'a pas de limite en a (ni à droite , ni à gauche), alors on ne peut pas conclure et il faut alors revenir à la 1ère méthode. Par contre , lorsque $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ existe, on gagne non seulement la dérivabilité ou non de f en a , l'éventuellement la continuité de f' en a ou l'existence de demi-tangente….

3) **Obtenir un $DL_1(a)$.** Cette méthode ne s'applique que lorsque f est dérivable en a (inefficace si f n'est pas dérivable en a). Par contre, si on cherche un DL un peu long avec un terme significatif de plus, on peut obtenir la position de la tangente par rapport à Cf.

43 **Théo de <u>Critère de classe C^1</u>**. Soit f définie sur un intervalle I par $f(x)=\begin{cases}g(x) \; si \; x\neq a \\ L \; si \; x=a\end{cases}$où g est une fonction de $I\backslash\{a\}$ dans $\mathbb{R}$.
f est C^1 sur I **sietssi** g est de classe C^1 sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{t\to a} g(t)=L$ et $\lim\limits_{t\to a} g'(t)=P$ $réel.$ Et le cas échéant, $f'(a)=P$.

44 **Critère de <u>Prolongement C^1</u>.** Soit I un intervalle et a un point de I et f une fonction définie sur I sauf en a. Alors, f est prolongeable par continuité en a un une fonction de classe C^1 $sur\ I$

sietssi

f de classe C^1 sur $I\setminus\{a\}$ et $\lim_{t\to a} f(t) = L\ réel$ et $\lim_{t\to a} f'(t) = P\ réel.$

Dans ce cas, $\tilde{f}\,(a) = L$ et $\tilde{f}'(a) = P$.

45 **Exemple :** Justifier que $f\colon \left(x \mapsto \frac{\cos(2x)-1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer alors une expression de $\tilde{f}'$.

<u>Existence de $\tilde{f}$?</u> $Df = \mathbb{R}^*\ et\ \forall x \neq 0, f(x) = 2\left(\frac{\cos(2x)-1}{2x}\right)$. Or, $\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t} \overset{TA}{\triangleq} 0\ et\ \lim_{x\to 0} 2x = 0$. Donc, par composition, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0. Alors $\tilde{f}\colon \left(x \mapsto \begin{cases}\frac{\cos(2x)-1}{x}\ si\ x \neq 0\\ 0\ si\ x = 0\end{cases}\right)$ est continue en 0. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}^*$, car son expression n'est constituée que de fonctions continues sur leur propre domaine de définition. J'en déduis que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Dérivabilité de $\tilde{f}$?</u> f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, car son expression n'est constituée que de fonctions dérivables sur leur propre domaine de définition. J'en déduis que $\tilde{f}$ est dérivable au moins sur $\mathbb{R}^*\ et\ \forall x \neq 0, \tilde{f}'(x) = \frac{-2x\sin(2x)-(\cos(2x)-1)}{x^2} = \frac{1-\cos(2x)-2x\sin(2x)}{x^2}$.

$\tilde{f}'(x) = \frac{1-(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o_0(x^4))-2x(2x-\frac{(2x)^3}{6}+o_0(x^4))}{x^2} = -2 + 2x^2 + o_0(x^2)$. Donc, $\lim_{x\to 0}\tilde{f}'(x) = -2$.

Le critère de prolongement C^1 assure alors de $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = -2$ et $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

46 **Théo de <u>Critère de classe C^n</u>.** Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\ et\ f$ définie sur I par : $f(x) = \begin{cases} g(x)\ si\ x \neq a\\ L\ si\ x = a\end{cases}$ où g fonction de $I\setminus\{a\}$ dans $\mathbb{R}$.

f est C^n sur I **sietssi** g est de classe C^n sur $I\setminus\{a\}$ et $\lim_{t\to a} g(t) = L$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], \lim_{t\to a} g^{(k)}(t) = L_k\ réel.$

Et le cas échéant, $\forall k \in [\![1, n]\!], f^{(k)}(a) = L_k$.

47 **Exemple :** Montrons que la fonction $f\colon \left(x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} si\ x \neq 0\\ 0\ si\ x = 0\end{cases}\right)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $f^{(n)}\colon \left(x \mapsto \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} si\ x \neq 0\\ 0\ si\ x = 0\end{cases}\right)$.

A. Posons $g(x) = e^{-1/x^2}$. g est la composée de l'exp de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de $h\colon (x \mapsto \frac{1}{x^2})$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Donc , g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi , f l'est aussi et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$.

B. Montrons $H(n)$: " $il\ existe\ une\ fonction\ polynomiale\ P_n\ tq : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ "par récurrence sur n

<u>Initialisation</u> : $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = 1 \times e^{-1/x^2}$donc $P_n(t)$=1 convient .

<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel . Je suppose $H(n)$ vraie . Alors il existe une fonction polynomiale $P_n\ telle\ que : \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc ,

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = [-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)] e^{-\frac{1}{x^2}}$

$g^{(n+1)}(x) \underbrace{=}_{t=\frac{1}{x}} [-t^2 P_n'(t) + 2t^3 P_n(t)] e^{-t^2}$. Posons $P_{n+1}(t) = -t^2 P_n'(t) + 2t^3 P_n(t)$. Alors P_{n+1} est polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$. Donc $H(n+1)$ vraie dès que $H(n)$ vraie .

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) est\ vraie$.

C. Montrons que f est infiniment dérivable en 0 .

Soit n un entier naturel .$\forall x > 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \underbrace{=}_{u=\frac{1}{x^2}} P_n(\sqrt{u}) e^{-u}$. Or , $\lim_{u\to+\infty} u^{k/2} e^{-u} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et ainsi , $\lim_{x\to 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. De même, $\forall x < 0,\ g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \underbrace{=}_{u=\frac{1}{x^2}} P_n(-\sqrt{u}) e^{-u}$. Or , $\lim_{u\to+\infty} (-1)^k u^{\frac{k}{2}} e^{-u} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$. Donc par composition, $\lim_{x\to 0^+} (-1)^k \frac{1}{x^k} e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{CC}{\triangleq} 0$ et ainsi , $\lim_{x\to 0^-} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$. Je conclus par le critère C^∞, que f est infiniment dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$.

<u>III Formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young</u>

48 **<u>Rappel : Polynômes de Taylor en $a = 0$ des fonctions de référence :</u>**

$$P_{n,0,(x\mapsto\frac{1}{1-x})}(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$P_{n,0,exp}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P_{n,0,(x\mapsto\ln(1+x))}(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$P_{2n+1,0,\boldsymbol{sin}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_{2n+2,0,\boldsymbol{sin}}(x)$$

$$P_{2n,0,\boldsymbol{cos}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = P_{2n+1,0,\boldsymbol{cos}}(x)$$

$$P_{2n+1,0,\boldsymbol{sh}}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_{2n+2,0,\boldsymbol{sh}}(x)$$

$P_{2n,0,\boldsymbol{ch}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = P_{2n+1,0,\boldsymbol{ch}}(x)$

$P_{n,0,(x\mapsto(1+x)^{\alpha})}(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)..(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

49 **Théorème d'inégalité de Taylor-Lagrange** Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I telle que : $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée par M sur I alors $\forall (a,b) \in I^2$, $\left| f(b) - \underbrace{P_{n,a,f}(b)}_{\text{polynôme de Taylor en } a \text{ de rang } n \text{ de } f} \right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

où $P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ le polynôme de Taylor de rang n de f en a.

50 **Application :** pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

51 **Exercices :** 1) Soit x un réel . Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Je reconnais $P_{2n,0,\boldsymbol{cos}}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ le polynôme de Taylor en 0 de rang $2n$ de cos.
cos est une fonction $(2n+1)$-fois dérivable sur un intervalle I telle que : $\left|cos^{(2n+1)}\right| = |sin|$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \left|cos(x) - P_{2n,0,\boldsymbol{cos}}(x)\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ i.e. $\left|cos(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Or, d'après les croissances comparées pour les suites , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ donc par suite extraite , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. J'en conclus que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = cos(x)$.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{|x|^5}{120}$.

sin est une fonction 5-fois dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ telle que : $\left|sin^{(5)}\right| = |cos|$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ alors
$\forall x \in \mathbb{R}, \left|sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$. L'erreur que l'on commet en remplaçant $sin(x)$ par $x - \frac{x^3}{6}$ est inférieur à $\frac{|x|^5}{5!}$.

52 **Théorème de Taylor-Young** Si f est une fonction n fois dérivable sur un voisinage V du réel a contenant a alors
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$

53 **NB :** Le théorème de Taylor-Young est local : il donne une information sur f au voisinage de a uniquement mais rien en dehors de ce voisinage. Le théorème de Taylor-Lagrange est global : il donne une information sur f sur tout un intervalle.

III Fonctions convexes-fonctions concaves.

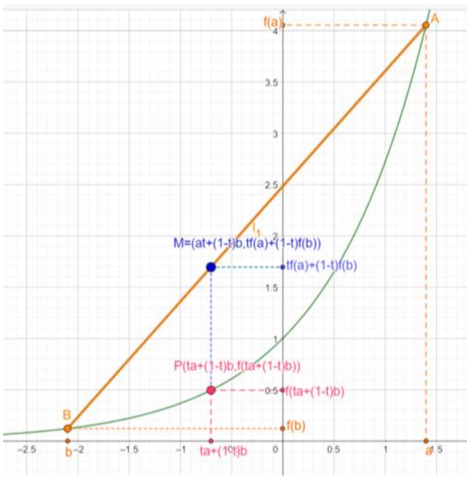
54 **Rappel :** $[a,b] = \{ta + (1-t)b / t \in [0,1]\} = \{(1-t)a + tb / t \in [0,1]\}$. (Cf TD 12)
Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tout réel compris entre x et y est de la forme $\lambda x + (1-\lambda)y$ tel que $\lambda \in [0,1]$,

55 **Def :** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est convexe sur I lorsque pour tout $(x,y) \in I^2$, pour tout réel $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
- f est concave sur I lorsque $-f$ est convexe sur I.
- Un point d'inflexion de Cf est un point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in Df$ et f change de concavité en x_0 i.e f est convexe sur un intervalle-voisinage d'un coté de x_0 *et* concave sur un intervalle-voisinage de l'autre côté.

56 Autrement dit, f est concave sur I lorsque $\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

57 **Illustration :**



58 **Interprétation géométrique**
Soit a et b deux réels de I et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de Cf.
Soit $t \in [0,1]$.
Soit le point M du plan tel que $t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
Alors, $M \in [A,B]$. On note (x,y) les coordonnées de M. Alors,
$\begin{cases} t(x-a) + (1-t)(x-b) = 0 \\ t(y - f(a)) + (1-t)(y - f(b)) = 0 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x = ta + (1-t)b \\ y = tf(a) + (1-t)f(b) \end{cases}$.
Soit le point $P\ (ta + (1-t)b, f(ta + (1-t)b))$ de Cf.
L'inégalité $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ signifie que le point P est en-dessous du point M. (Cf illustration)
https://www.geogebra.org/classic/t5nfxbz6

59 **Définition géométrique d'une fonction convexe :**
Une fonction convexe est donc une fonction dont la courbe se trouve sous ses cordes .

60 **Caractérisation des fonctions convexes pas forcément dérivables :** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.

- f est convexe sur I <u>sietssi</u> pour tout $a \in I$, $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$.
- f est concave sur I <u>sietssi</u> pour tout $a \in I$, $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est décroissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$.

Démo : Supposons f est convexe sur I. Soit $a \in I$. Montrons que $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$. Soit x et y deux réels de $I\backslash\{a\}$ tels que $x < y$.

<u>1^er^ cas : $x < y < a$</u>. Alors il existe $t \in]0,1[$ tel que $y = tx + (1-t)a$. Donc, $t = \frac{y-a}{x-a}$. Comme f est convexe, $f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(a)$

Donc, $f(y) - f(a) \leq t[f(x) - f(a)] = \frac{y-a}{x-a}[f(x) - f(a)]$. Alors, puisque $y - a < 0$, j'obtiens : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

<u>2^ème^ cas : $x < a < y$</u>. Alors il existe $t \in]0,1[$ tel que $a = tx + (1-t)y$. Donc, $t = \frac{y-a}{y-x}$. Comme f est convexe, $f(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ i.e. $(t + (1-t))f(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Donc, $(1-t)[f(a) - f(y)] \leq t[f(x) - f(a)]$ *i.e.* $\left(1 - \frac{y-a}{y-x}\right)[f(a) - f(y)] \leq \frac{y-a}{y-x}[f(x) - f(a)]$. Alors, puisque $y - a > 0$ *et* $y - x > 0$, j'obtiens : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

<u>3^ème^ cas : $a < x < y$</u>. Idem.

Ainsi, $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$.

Réciproquement : Supposons que pour tout $a \in I$, $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$. Montrons que f est convexe.

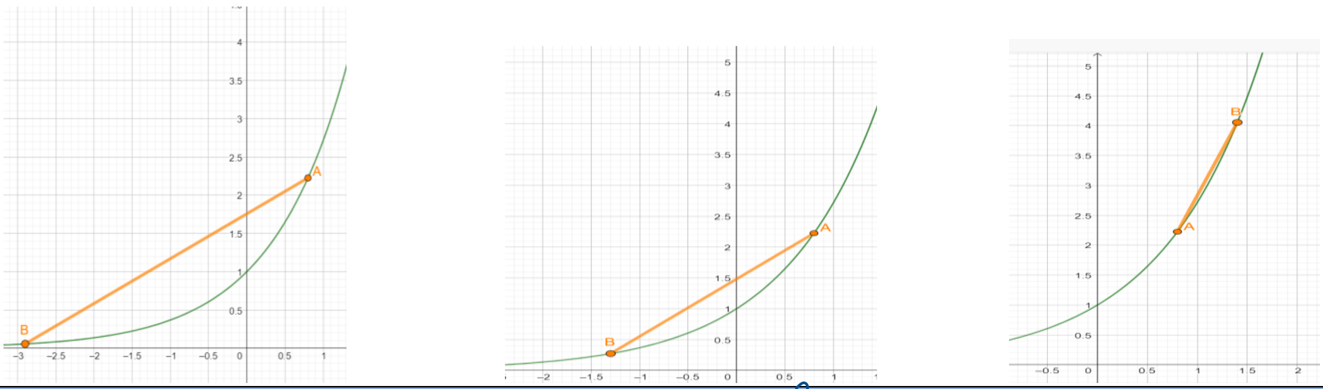
Soit x et y deux réels de I et $t \in]0,1[$. $tx + (1-t)y$ est un réel compris entre x et y. Supposons $x < y$ (étant donné le rôle symétrique de x et y dans la définition de la convexité, cette hypothèse qui simplifie la preuve permet de conclure).

Alors $x \leq tx + (1-t)y \leq y$. Alors, comme τ_x *et* τ_y sont croissantes, $\tau_x(tx + (1-t)y) \leq \tau_x(y) = \tau_y(x) \leq \tau_y(tx + (1-t)y)$ i.e. $\frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{tx+(1-t)y-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(tx+(1-t)y)-f(y)}{tx+(1-t)y-y}$. Alors, $\frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(tx+(1-t)y)-f(y)}{(1-t)(y-x)}$. Comme $(1-t)(y-x) > 0$,

$f(tx + (1-t)y) - f(x) \leq (1-t)(f(y) - f(x))$ et ainsi, $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. OK. Ainsi, f est convexe.

61 **Conséquence** : Si f est convexe sur l'intervalle I alors pour tout a,b,et c de I, $\left(a < b < c \Longrightarrow \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\tau_a(b)} \leq \underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}_{\tau_a(c)=\tau_c(a)} \leq \underbrace{\frac{f(c)-f(b)}{c-b}}_{\tau_c(b)}\right)$.

Illustration :



62 **Proposition : Si** f est convexe sur un intervalle I alors f est continue sur I et dérivable à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$.

Démo : Je suppose que f est convexe sur un intervalle I . Soit a de $\mathring{I}$.

Comme a est à l'intérieur de I, il existe b et c éléments de I tels que $c < a < b$. D'après la caractérisation précédente, $\tau_a : \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur le domaine $I\backslash\{a\}$. Ainsi, τ_a a une limite en a^- et une limite en a^+et $\forall x \in [c, a[\cup]a, b],]\tau_a(c) \leq \tau_a(x) \leq \tau_a(b)$. Donc, τ_a est bornée au voisinage de a. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to a^-} \tau_a(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} \tau_a(x)$ sont finies. Cela signifie que f est dérivable à gauche et à droite en a. Alors, au voisinage de a^+, $f(x) = f(a) + f_d'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. Donc, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Donc f est continue à droite en a.

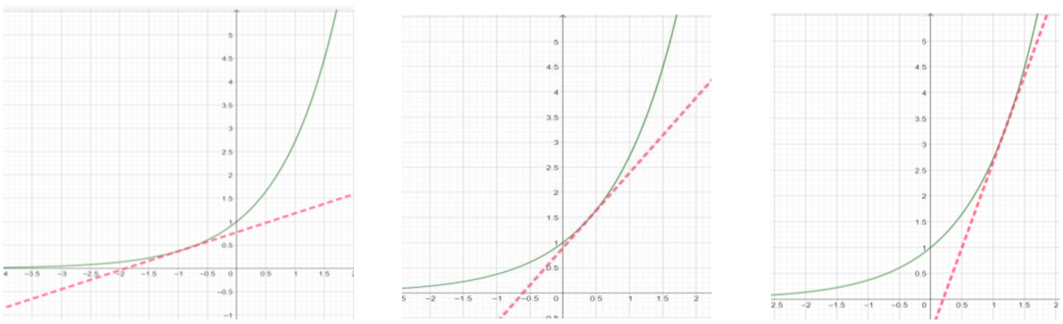
De même, au voisinage de a^-, $f(x) = f(a) + f_g'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. Donc, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$. Donc f est continue à gauche en a.

Ainsi f est continue en a.

63 **Caractérisation des fonctions convexes dérivables :** Soit f une fonction réelle et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I <u>sietssi</u> $\underbrace{\text{pour tout } (x,a) \in I^2,\ f(x) \geq (x-a)f'(a) + f(a)}_{Cf \text{ est au-dessus de chacune de ses tangentes}}$ <u>sietssi</u> f' est croissante sur I.
- f est concave sur I <u>sietssi</u> f' est décroissante sur I <u>sietssi</u> $\underbrace{\text{pour tout } (x,a) \in I^2,\ f(x) \leq (x-a)f'(a) + f(a)}_{Cf \text{ est en-dessous de chacune de ses tangentes}}$.

64 Illustration



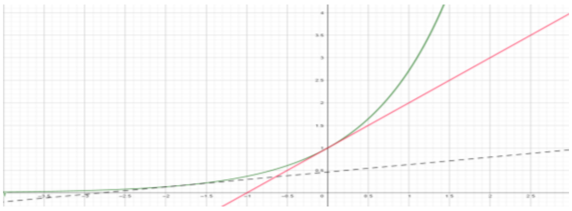
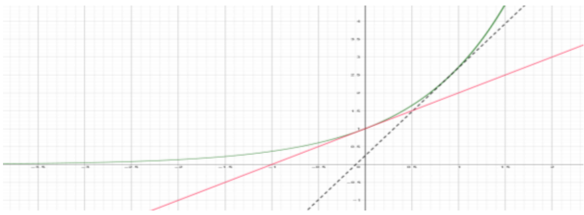
Démo : Montrons tout d'abord que f est convexe sietssi f' est croissante.
1)⟹3) Je suppose que f est convexe. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
Comme f est convexe, $\forall x \in]a,b[, \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. En passant à la limite quand $x \to a$ dans la 1ère inégalité et quand $x \to b$ dans la 2ème inégalité, j'otbiens :
Alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \lim\limits_{x\to b} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(b)$. Ainsi, $f'(a) \le f'(b)$. Donc f'est croissante.
3)⟹2) Je suppose que f' est croissante. Soit a un éléments de I. Montrons que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \ge (x-a)f'(a) + f(a)$.
Soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $x > a$. L'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]a,x[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$. Comme f'est croissante, $f'(c) \ge f'(a)$ et ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le f'(a)$ puis j'obtiens $f(x) \ge (x-a)f'(a) + f(a)$ puisque $x - a > 0$.
De même, soit $x \in \mathrm{I}$ tel que $x < a$. L'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]x,a[$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$. Comme f'est croissante, $f'(a) \ge f'(c)$ et ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le f'(a)$ puis j'obtiens $f(x) \ge (x-a)f'(a) + f(a)$ puisque $x - a < 0$.
2)⟹1) Je suppose que $\underbrace{\forall x \in \mathrm{I}, \forall y \in \mathrm{I},\ f(y) \ge (y-x)f'(x) + f(x)}_{(**)}$. Montrons que f est convexe (par la caractérisation 40)
Soit $a \in I. \tau_a: \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est dérivable sur $I\backslash\{a\}$ (car f et $\left(x \mapsto \frac{1}{x-a}\right)$ le sont) et $\forall x \in\ I\backslash\{a\}, \tau_a'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$.
Or, par $(**)$ en prenant $y = a, (a-x)f'(x) + f(x) - f(a) \le 0$. Donc, $\forall x \in\ I\backslash\{a\}, \tau_a'(x) \ge 0$. Ainsi $\tau_a$est croissante et ainsi f est convexe.

65 **Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables :** Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I sietssi f'' est positive sur I .
- Un point d'inflexion de Cf est un point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in Df\ et\ f''$ s'annule en x_0 en changeant de signe
- f est concave sur I sietssi f'' est négative sur I .

66 **Application à l'obtention d'inégalités :**

1.Les deux inégalités classiques $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x \ge x + 1$ et $\forall t \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \le t$ sont des inégalités de convexité comme le prouve ce qui suit :
•La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp'' = exp > 0$. Donc exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\underbrace{\text{pour tout } (x,a) \in I^2,\ \ e^x \ge (x-a)e^a + e^a}_{C_{exp}\ est\ au-dessus\ de\ chacune\ de\ ses\ tangentes}$. En particulier, pour $a = 0$, on retrouve l' inégalité classique (déjà démontrée par étude fonction), pour tout $x \in \mathbb{R},\ \ e^x \ge x + 1$.

•De même, la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}\ et\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, ln''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$.
Alors, $\underbrace{\text{pour tout } (x,a) \in \mathbb{R}^{+*\,2},\ \ \ln(x) \le \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a)}_{C_{ln}\ est\ en-dessous\ de\ chacune\ de\ ses\ tangentes}$. En particulier, pour $a = 1$, on retrouve l' inégalité classique (déjà démontrée par étude fonction), pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \le x - 1$ ce qui s'écrit aussi pour tout $t \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \le t$.

67 **2.Inégalité de Jensen et une application :**

1. Montrons que : si f est convexe sur l'intervalle I alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in I^n$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$, $\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Longrightarrow\ f(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)\right)$ (JENSEN).

Prenons une fonction f convexe sur l'intervalle I .
Posons $H(n)$: « pour tout $(x_1, x_2, .., x_n) \in I^n$, pour tout réel $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \Longrightarrow\ f(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$ »
Initialisation : $H(1)$ est évidemment vraie. $H(2)$ vraie par définition d'une fonction convexe
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$tq $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

$$f(\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k) = f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \le (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) .$$

Or, $\forall k \in [\![1,n]\!], 1 - \lambda_{n+1} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \ge \lambda_k\ donc\ 0 \le \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} \le 1$. Et

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \left(\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\right)\sum_{k=1}^n \lambda_k = \left(\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k - \lambda_{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1-\lambda_{n+1}}\right)(1-\lambda_{n+1}) = 1.$$

Alors, l'hypothèse de récurrence assure que $f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \le \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k)$.
Par suite, $(1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \le (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.
Alors, $(1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$.
J'en conclus que $f(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k) \le \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.
CCL : le théorème de récurrence simple assure que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n)$ vraie.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que : $\forall (x_1, x_2, .., x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \le \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n x_k)$.

Soit $(x_1, x_2, .., x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$. $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k)} = \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{n}\ln(x_k)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(x_k)}$. Posons $X_k = \ln(x_k)$et $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Alors, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Comme la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que $exp(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k \exp(X_k)$ i.e. $e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(x_k)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \exp(\ln(x_k))$ ce qui s'écrit aussi : $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k)} \le \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n x_k)$.

IV Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

58 **Définition :** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Soit a un point ou bord de I et L un nombre complexe

f tend vers L en a sietssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \underbrace{|f(x)-L|}_{module\ de\ f(x)-L} \leq \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

- Soit a un point de I et $k \in \mathbb{N}$.

f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ i.e. lorsque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

f est dérivable en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ est\ finie$

lorsque il existe un complexe L tel que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} / \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| \leq \varepsilon$

Alors le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

- Lorsque f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et on définit alors la fonction dérivée f' de I dans $\mathbb{C}$.

$f^{(0)} = f\ et\ \ \forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}$ est la **fonction dérivée** $k$ième de f et par définition $f^{(k)}(a)$existe lorsque $f^{(k-1)})$ est dérivable en a.

f est k-fois dérivable sur I lorsque $f^{(k-1)}\ est\ dérivable\ sur\ I\ et\ \forall x \in I, f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$.

69 **Caractérisation :** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On définit deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée $Re(f)$ et $Im(f)$ telles que $Re(f)(x) = Re(f(x))$ et $Im(f)(x) = Im\big(f(x)\big)$.

- Soit a un point ou bord de I et L un nombre complexe

f tend vers L en a lorsque $Re(f)$ tend vers $Re(L)$ et $Im(f)$ tend vers $Im(L)$ en a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

- Soit a un point de I

f est continue en a lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en a.

f est continue sur I lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues sur I.

f est dérivable en a lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables en a et $f'(a)$= $Re(f)'(a) + iIm(f)'(a)$

f est dérivable sur I lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables sur I et f'= $Re(f)' + iIm(f)'$.

f est dérivable k-fois en a lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables k-fois en a et $f^{(k)}(a)$= $Re(f)^{(k)}(a) + iIm(f)^{(k)}(a)$

f est dérivable sur I lorsque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont dérivables k-fois sur I et $f^{(k)}$= $Re(f)^{(k)} + iIm(f)^{(k)}$

70 **Théorème** : On peut étendre les résultats suivants aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

- La caractérisatrion séquentielle de la limite
- Les résultats sur les limites ou la dérivation d'une somme, d'une produit , d'un quotient de fonctions admettant une limite ou dérivables sont valables pour les fonctions complexes.
- L'inégalité des accroissements finis
- L'inégalité de Taylor-Lagrange
- Le critère de dérivabilité
- Le crière de classe C^k