TD 13
Dérivation-Rolle - Accroissements Finis - Taylor Lagrange.

I et J désignent des intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

Ex 0 tsoit $f: I \to \mathbb{R}, g: I \to \mathbb{R}$ et $h: f(I) \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$.

1) Démontrer que si f et h sont dérivables respectivement en a et $f(a)$ alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a)h'(f(a))$.
2) On suppose $a \in \mathring{I}$. Montrer que si f une application dérivable à droite et à gauche en a alors $\Delta_a: \left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 .
3) Règle de (monsieur) l'Hôpital « soft ». On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ et $f(a)$=$g(a) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

I Extrema et Rolle

Ex 1 Théorème de Rolle généralisé. Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Ex 2 Rolle and Rolle and Rolle …. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in D^n([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) =..= f^{(n-1)}(a) = 0 = f(b)$. Montrer que$\exists c \in]a, b[/f^{(n)}(c) = 0$
Application : Soit $f(\mathrm{x}) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que$\exists c \in] - 1,1[/f^{(n)}(c) = 0$

Ex 3 Soit a et b deux réels tq $a < b$. Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1) Montrer que si f' ne s'annule pas sur$]a, b[$ alors f est injective.
2) En déduire que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f' est de signe constant.
3) Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Ex 4 Soit f dérivable sur $[a\ , b]$ telle que $f'(a) = 0$ et $f(a) = f(b)$.
Démontrer qu'il existe un réel c dans $]a\ , b[$ telle que: $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$. <u>Indication</u> : utiliser $\varphi: \left(x \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ si\ x \in]a, b] \\ L\ \text{à}\ déterminer\ si\ x = a \end{cases}\right)$.
Comment lire géométriquement ce résultat ?

Ex 5 Soit f et g deux fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$ (ie f' et f'' continues sur $[a, b]$) telles que :
$f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$ et $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \leq g''(x)$. Montrer que : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$.

Ex 6 Montrer que si f est n-fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en $n + 1$ points en $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que : $a \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq b$ alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

II Accroissements finis

Ex 7 Théorème de Accroissements finis généralisé : Soit a et b deux réels tq $a < b$.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

a) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>Indication</u> : utiliser la fonction $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a))$ où K est une constante à bien choisir !

Ex 8 Règle de (monsieur) l'Hôpital

1. **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ et telles que :
   $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
   Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
2. En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.
3. **Une application pratique :** calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}$ $de\ deux\ manières$.
4. **Une application plus théorique :** Soit $f \in C^\infty([0,1[, \mathbb{R})$. On définit la fonction g : $[0\ ; 1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}\ si\ x \neq 0 \\ f'(0) si\ x = 0 \end{cases}$

a. Démontrer que g est de classe C^1 sur $[0,1[$.
b. Exprimer pour $x \in]0,1[\; et \; n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.
c. En déduire que g est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et déterminer $g^{(n)}(0)$ On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

Ex 9 Encadrements et inégalités obtenus grâce aux accroissements finis.

1. Montrer que : $\forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}+\mathbf{1}} \leq \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{p}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right) \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}$. En déduire un encadrement de $\boldsymbol{S_n}$ ***tel que*** :
   $\boldsymbol{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(\boldsymbol{n})$. Conclure à la convergence de la suite $(\boldsymbol{S_n})$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\boldsymbol{Arctan}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}) - \boldsymbol{Arctan}(\boldsymbol{x}))$
3. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes : $\sqrt{10001} \approx 100$

Ex 10 Soit a , b, et c trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Ex 11 Soit a et b deux réels tq $a < b$ et $f: [a,b] \to \mathbb{R}^*$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Ex 12 On suppose que $\boldsymbol{f}$ est une application deux fois dérivable sur $]\mathbf{0},\mathbf{2}[$. Soit deux réels $\boldsymbol{u}$ ***et*** $\boldsymbol{v}$ tels que $\mathbf{0} < \boldsymbol{u} < \boldsymbol{v} < \mathbf{2}$ .En utilisant à $\boldsymbol{\varphi(x)} = \boldsymbol{f(x)} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{f(v)} + \boldsymbol{K}\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})^2}{\mathbf{4}}$ où $\boldsymbol{K}$ est une constante à bien choisir, démontrer que :
$\exists \boldsymbol{c} \in]\mathbf{0},\mathbf{2}[\,/\, \boldsymbol{f(u)} - \mathbf{2}\,\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{f(v)} = \boldsymbol{f}''(\boldsymbol{c})\frac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2}{\mathbf{4}}$.

Ex 13 Justifier que si f est classe C^1 sur $[a,b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Ex 14 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite de réels vérifiant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Déterminer les limites possibles de u .
b) Montrer que $\forall n, u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$
c) Montrer que : $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f\,'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
d) En déduire la convergence de u . On note α sa limite.
e) Donner une valeur approchée de sa limite α à 10^{-2} près .

Ex 15 Soient f : $([a,b] \to \mathbb{R})$ telle que f , f' et f''sont définies et continues sur $[a,b]$ et f'' est dérivable sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.
<u>Indication</u> : on introduira $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

Ex 16 Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.
Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a,b[$, à valeurs réelles et telles que :
- u et v sont continues sur $[a,b[$
- u et v sont dérivables sur $]a,b[$
- $\forall x \in]a,b[, |u'(x)| \leq v'(x)$.

Montrer en étudiant deux « bonnes » fonctions que : $\forall x \in [a,b[, |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.
APPLICATION : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.
a. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}e^x$.
b. En déduire , en utilisant 1., que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.
c. Justifier que : $\exists B \geq A / \forall x \geq B, |f(x)| \leq \varepsilon$.
d. Qu'en déduit-on sur f ?

Ex 17 Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f:]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$. Nous allons prouver que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.
1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $A > a$ tel que : $\forall x > A, \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
2) Montrer que $\forall x > \mathrm{A}, \left|\frac{f(x)}{x} - L\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right| + \frac{|f(A)|+|\mathrm{A}L|}{\mathrm{x}}$.
1) En déduire que $f(x) \sim_{+\infty} Lx$.

Ex 18 Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On fixe $x \in]a,b[$ $et\ on\ pose$ $\forall t \in [a,b], g_x(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ $où$ A $contante\ réelle$.
1. Déterminer la valeur de A telle que $g_x(x) = 0$.

2. Démontrer l'existence d'un réel $c_x \in]a,b[$ tel que : $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$.
3. Justifier que $M = max_{[a,b]}|f''|$ existe et montrer que $|f'(a)| \leq M\frac{|b-a|}{2}$.
4.

Ex 19 Soit $f \in D^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que : $\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Ex 20 Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^2\,(Arctan(x+1) - Arctan(x))$ en appliquant l'égalité des accroissements finis.

Ex 21 Démonstration du théorème d'intégration terme à terme d'un DL :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I contenant 0 et telle que f' admet le $DL_n(0)$ suivant :

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \; et \; \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Posons $\forall x \in I, \varphi(x) = f(x) - [f(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}]$. Nous devons prouver que : $\varphi(x) = o_0(x^{n+1})$.

1. Justifier que φ est dérivable sur I et vérifier que $\forall x \in I, \varphi'(x) = x^n\varepsilon(x)$.
2. Soit $x \in I\backslash\{0\}$. Justifier qu'il existe c_x coincé entre 0 et x tel que : $\frac{\varphi(x)}{x} = (c_x)^n\,\varepsilon(c_x)$.
3. En déduire que $\varphi(x) = o_0(x^{n+1})$.
4.

III Classe C^∞ *et* formules de Taylor

Ex 22 Critère de classe C^∞. Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\, si\; x > 0 \\ 0\; si\; x \leq 0 \end{cases}$.
Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o_0(x^n)$.

Ex 23 Soit f une fonction de classe $C^2\ sur\ \mathbb{R}$ telle que : $f\ et\ f''$ sont bornées. On note $M_0 = sup|f|\ et\ M_2 = sup\,|f''|$.

1) Soit $x\ et\ h$ deux réels . Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq M_2\frac{|h|^2}{2}$.
2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.
3) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On note M_1 =sup $|f'|$.
4) Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Ex 24 Soit f et g deux fonctions de classe C^3impaires et telles que $g^{(3)}(0) \neq 0$ .Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2f(2x)+f(3x)}{g(x)-2g(2x)+g(3x)}$.

Ex 25 Trouver une valeur approchée de $ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à $10^{-4}\ près$.
Démontrer que pour tout réel $x \in [0,\pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$.

Ex 26 Calculer la limite de S , T, R définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}$, $R_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

Ex 27 Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leq |x|$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n.
2) En déduire, en utilisant Taylor-Lagrange, que f est la fonction nulle.

Ex 28 Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$ telle que : $f'(a) = f'(b) = 0$

1) Justifier que f'' s'annule sur $[a,b]$.
2) Justifier qu'il existe un réel M tel que : pour tout x dans $[a,b], |f''(x)| \leq M$.
3) Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que : $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}M$.
4) On suppose que $b = f(b) = 1\ et\ a = f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que : $|f''(c)| \geq 4$.

IV Convexité

Ex 29 Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Etudier la convexité et les points d'inflexion de f.

Ex 30 Montrer que la fonction sinus est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], x \geq \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

Ex 31 Montrer que $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^+)^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$.

Ex 32 Soit $f\ et\ g$ deux fonctions de classe $C^2\ sur\ [a,b]$ (ie $f'\ et\ f''$ continues sur $[a,b]$) telles que :
$f(a) = g(a)\ et\ f(b) = g(b)\ et\ \forall x \in [a,b]\,, f''(x) \leq g''(x)$. Montrer que : $\forall x \in [a,b]\,, f(x) \geq g(x)$.

Ex 33 Soit $f\colon [0+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x \to +\infty$.
2. On suppose que L est finie. Montrer que $\psi\colon (x \mapsto f(x) - Lx\,)$ est décroissante et admet une limite quand $x \to +\infty$.

Ex 34 Soit $f\colon (I \to J)$ une fonction convexe et $g\colon (J \to \mathbb{R})$une fonction. Montrer que :

- si g est convexe et croissante alors la composée $g \circ f$ est convexe
- si g est concave et décroissante alors la composée $g \circ f$ est concave.

V Des équations fonctionnelles avec hypothèses de dérivabilité

Ex 35 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : pour tous réels $x\ et\ y$, $f(x+y) = f(x^2) + f(y)$. Montrer que f est nulle.

Ex 36 Montrer qu'il existe une unique fonction f définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0, f'(x) \leq f(x)$.

Ex 37 Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$,dérivables ,et vérifiant :$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy) = f(x) + f(y)$.

Ex 38 Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)f(t)dt$.

Ex 39 Déterminer toutes les fonctions dérivables en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\,, f(x+y) = f(x)f(y)$.

Ex 40 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :pour tout $x\in\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$. En déduire que $f = cos$.