Corrigé du TD 13 Dérivation-Rolle - Accroissements Finis - Taylor Lagrange.

I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

f est dérivable en a et $f'(a) = L$ sietssi f admet le $DL_1(a)$ *suivant* : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a((x-a))$.
f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = L$ sietssi f admet le $DL_1(a^+)$ *suivant* : $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_{a^+}((x-a))$.
Applications : soit $f: I \to \mathbb{R}, g: I \to \mathbb{R}$ *et* $h: f(I) \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$.

1) Démontrer que si f et h sont dérivables respectivement en a et $f(a)$ alors $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = f'(a)h'(f(a))$.
2) On suppose $a \in \mathring{I}$. Montrer que si f une application dérivable à droite et à gauche en a alors $\Delta_a: \left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 .
3) Règle de (monsieur) l'Hôpital « soft ». On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ *et* $f(a)=g(a) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

1. f et h sont dérivables en respectivement a *et* $f(a)$. Donc, f admet un $DL_1(a)$ *et* h admet un $DL_1(f(a))$. Il existe donc deux fonctions ε *et* θ telles que : $\forall x \in D, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ *et* $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$

et $\forall y \in E, h(y) = h(f(a)) + h'(f(a))(y - f(a)) + (y - f(a))\theta(y)$ *et* $\lim_{y\to f(a)} \theta(y) = 0$.

Alors, $\forall x \in D, h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\theta(u(x))$ *et* $\lim_{x\to a} \theta(u(x)) \underbrace{=}_{par\ composition} 0$.

$$h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))(f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)) + (f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x))\theta(u(x))$$
$$h(f(x)) = h(f(a)) + h'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a)\underbrace{\left(f'(a)\theta(u(x)) + \varepsilon(x)\theta(u(x)) + h'(f(a))\varepsilon(x)\right)}_{\alpha(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0}$$

$h \circ f(x) = h \circ f(a) + h'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a)\alpha(x)$ et $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $h \circ f$ admet un $DL_1(a)$. J'en déduis que $h \circ f$ est dérivable en a et $(h \circ f)'(a) = h'(f(a))f'(a)$.

2. On suppose $a \in \mathring{I}$. Je suppose que f est une application dérivable à droite et à gauche en a.

Alors $f(x) = f(a) + f'_d(a)(x-a) + o_{a^+}((x-a))$ et $f(x) = f(a) + f'_g(a)(x-a) + o_{a^-}(x-a)$.

Alors, pour h au voisinage de 0^+, $f(a+h) = f(a) + f'_d(a)h + o_{0^+}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_g(a)(-h) + o_{0^+}(h)$.

$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{\left(f(a)+f'_d(a)h+o_{0^+}(h)\right)-\left(f(a)-f'_g(a)h+o_{0^+}(h)\right)}{h} = f'_d(a) + f'_g(a) + o_{0^+}(1)$. Donc, $\lim_{h\to 0^+} \Delta_a(h) = f'_d(a) + f'_g(a)$.

De même, pour h au voisinage de 0^-, $f(a+h) = f(a) + f'_g(a)h + o_{0^-}(h)$ et $f(a-h) = f(a) + f'_d(a)(-h) + o_{0^-}(h)$.

$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} = \frac{\left(f(a)+f'_g(a)h+o_{0^-}(h)\right)-\left(f(a)-f'_d(a)h+o_{0^-}(h)\right)}{h} = f'_g(a) + f'_d(a) + o_{0^-}(1)$. Donc, $\lim_{h\to 0^-} \Delta_a(h) = f'_g(a) + f'_d(a)$.

J'en conclus que $\left(h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f'_g(a) + f'_d(a)$.

3. On suppose que $I = [a, b[$ et f et g sont continues et dérivables en a et $g'(a) \neq 0$ *et* $f(a) = g(a) = 0$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{car\ f(a)=g(a)=0\ et \\ f\ et\ g\ dérivables\ en\ a}}{\hat{=}} \frac{f'(a)(x-a)+o_a(x-a)}{g'(a)(x-a)+o_a(x-a)} = \frac{f'(a)+o_a(1)}{g'(a)+o_a(1)} \underset{x\to a}{\overset{\substack{pas\ de\ FI \\ car\ g'(a)\neq 0}}{\longrightarrow}} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

I Extrema et Rolle

Théorème de Rolle généralisé. Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ et tq : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

1er cas f constante . Alors $\forall c \in]a, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.

2eme cas f non constante . Alors $\exists r \in]a, +\infty[$ tel que : $f(r) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(r) > f(a)$.

Sur $[a, r]$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\alpha \in]a, r[$ tel que $f(\alpha) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Sur $[r, +\infty[$, f est continue donc $\frac{f(a)+f(r)}{2}$ admet un antécédent par f . Il existe un réel $\beta \in]r, +\infty[$ tel que $f(\beta) = \frac{f(a)+f(r)}{2}$.

Travaillons sur $[\alpha, \beta]$. f est continue sur ce segment donc admet un maximum M ce segment. Il existe donc un réel $c \in]\alpha, \beta[$ tel que : $\forall x \in [\alpha, \beta], f(c) \geq f(x)$. Alors, $f(c) \geq f(r) > \frac{f(a)+f(r)}{2} = f(\alpha) = f(\beta)$. Donc, $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, +\infty[$. Par suite, f est dérivable en c et ainsi, le théorème de condition nécessaire d'extremum assure que $f'(c) = 0$.

Rolle and Rolle and Rolle …. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in D^n([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f''(a) =.. = f^{(n-1)}(a) = 0 = f(b)$. Montrer que $\exists c \in]a, b[/f^{(n)}(c) = 0$
Application : Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $\exists c \in]-1,1[/f^{(n)}(c) = 0$

$\boldsymbol{f \in D^n([a, b], \mathbb{R})}$ donc $\boldsymbol{f, f', f'', f \dots, f^{(n-1)}}$ sont dérivables donc continues sur $\boldsymbol{[a, b]}$.
De plus $f(a) = f(b)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que : $f'(c_1) = 0$.
Alors, $f'(a) = f'(c_1)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que : $f''(c_2) = 0$.
Alors, $f''(a) = f''(c_2)$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c_3 \in]a, c_2[$ tel que : $f^{(3)}(c_3) = 0$.
Je peux ainsi construire les réels $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ tels que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], f^{(k)}(c_k) = 0$ et $a < c_{n-1} < c_{n-2} < \cdots < c_2 < c_1 < b$.
Alors, $f^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(c_{n-1})$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, c_{n-1}[\subset]a, b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.
Application : Soit $f(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$. f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $f(1) = f(-1) = 0$.

<u>**1ère méthode**</u> : Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. $f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{(p-k)}(x)v^{(k)}(x)$ où $u(x) = (x-1)^n$ *et* $v(x) = (x+1)^n$ et $v^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$.
Comme $p \in [\![0, n-1]\!]$, $(k \in [\![0, p]\!] \Longrightarrow n - k > 0 \Longrightarrow v^{(k)}(-1) = 0)$. Par conséquent, $\forall p \in [\![0, n-1]\!], f^{(p)}(-1) = 0$
Alors, le résultat précédent s'applique à f, il existe donc $c \in]-1,1[/f^{(n)}(c) = 0$.

<u>**2ère méthode**</u> : de la factorisation $f(x) = (x-1)^{\boldsymbol{n}}(x+1)^{\boldsymbol{n}}$, je peux dire que 1 et -1 les racines de f et sont de multiplicité n dans f. Alors le cours sur les polynômes (caractérisation de la multiplicité par les polynômes dérivés) permet d'affirmer que $\forall p \in [\![0, n-1]\!], f^{(p)}(-1) = f^{(p)}(1) = 0$. Alors, le résultat précédent s'applique à f, il existe donc $c \in]-1,1[/f^{(n)}(c) = 0$.

Soit a et b deux réels tq $a < b$. Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1) Montrer que si f' ne s'annule pas sur$]a, b[$ alors f est injective.
2) En déduire que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors f' est de signe constant.
3) Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

1) Soit x et y deux éléments distincts de $[a, b]$. On note S le segment d'extrémités x et y. Comme f est continue sur $[a, b]$ donc sur S et dérivable sur $]a, b[$donc sur $\mathring{S}$, le théorème de Rolle assure que : $f(x) = f(y) \Longrightarrow f' s'annule\ sur\ \mathring{S} \Longrightarrow f' s'annule\ sur\ ]a, b[$. Donc par contraposée , si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$ alors $f(x) \neq f(y)$. Donc si f' ne s'annule pas sur$]a, b[$ alors f est injective.
2) <u>1ère méthode</u> : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Alors d'après 1) f est injective. Comme de plus f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, f est strictement monotone sur $[a, b]$ (résultat de cours chap 5 bijection prop 39). Par conséquent, f' garde un signe strict constant sur $]a, b[$.
<u>2ème méthode</u> : Je suppose que f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Imaginons un instant que f' change de signe.
Alors il existe $c\ et\ d \in]a, b[$ tel que : $f'(c) > 0$ et $f'(d) < 0$. Alors nécessairement $c \neq d$. Supposons par exemple $c < d$. Comme f est injective (d'après 1) , $f(c) \neq f(d)$. Par exemple $f(c) < f(d)$. f est continue sur le segment $[c, d]$ donc admet un maximum M sur ce segment tel que $M = f(u)\ avec\ u \in [c, d]$.
$\lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) > 0$. Donc il existe $\alpha \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(c)}{\alpha - c} > 0$ et par conséquent, $f(\alpha) > f(c)$. Alors $M \geq f(\alpha) > f(c)$.
$\lim\limits_{x \to d^-} \frac{f(x)-f(d)}{x-d} = f'(d) < 0$. Donc il existe $\beta \in]c, d[$ tel que $\frac{f(\beta)-f(d)}{\beta - d} < 0$ et par conséquent, $f(\beta) > f(d)$. Alors $M \geq f(\beta) > f(c)$. Ainsi, $u \in]c, d[$. Alors la condition nécessaire d'extremum permet d'affirmer que $f'(u) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse « f' ne s'annule pas ». J'en conclus que f' ne peut pas changer de signe.
3) Soit c et d deux réels de $]a, b[\ tels\ que\ f'(c) < f'(d)$. Soit m un réel compris entre $f'(c)$ et $f'(d)$. Posons $g(x) = f(x) - mx$. Alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - m$. Donc, $g'(c) < 0$ et $g'(d) > 0$. Comme g' change de signe sur $]a, b[$, g' s'annule sur $]a, b[$ par contraposée du résultat 2). Il existe donc un réel $u \in]a, b[$ tel que $g'(u) = 0$ et par conséquent, $f'(u) = m$. Ainsi, f' prend toutes les valeurs comprises entre $f'(c)$ et $f'(d)$.
f' possède donc la propriété des valeurs intermédiaires.

Soit $\boldsymbol{f}$ dérivable sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ telle que $\boldsymbol{f'(a) = 0\ et\ f(a) = f(b)}$.
Démontrer qu'il existe un réel $\boldsymbol{c}$ dans $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ telle que: $\boldsymbol{f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)}$. <u>Indication</u> : utiliser $\boldsymbol{\varphi}: \left(\boldsymbol{x} \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \boldsymbol{si\ x \in]a, b]} \\ \boldsymbol{L}\ \text{à}\ \boldsymbol{déterminer\ si\ x = a} \end{cases} \right)$.
Comment lire géométriquement ce résultat ?

Soit $\varphi: \left(x \to \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ si\ x \in]a, b] \\ 0\ si\ x = a \end{cases} \right)$.
Comme f est dérivable sur $[a, b]$, φ est dérivable donc continue sur $]a, b]$ et $\forall x \in]a, b], \varphi'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$. De plus, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 0$ donc φ est continue en a et finalement sur $[a, b]$. De plus, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure qu'il existe un réel c dans $]a, b[$ telle que $\varphi'(c) = 0$. Par conséquent, $f'(c)(c-a) - (f(c) - f(a)) = 0$ et ainsi, $f(c) - f(a) = f'(c)(c - a)$.
Cela s'écrit aussi $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ ce qui signifie que le coefficient directeur de la tangente T_C à Cf au point C est égale le coefficient directeur de la droite (AC) ; comme ces deux droites ont le point C en commun, cela signifie que ce sont une et une seule et même droite .
Ainsi, il existe un point C de Cf telle que $T_C = (AC)$.

Soit $f\ et\ g$ deux fonctions de classe $C^2\ sur\ [a, b]$ (ie $f'\ et\ f''$ continues sur $[a, b]$) telles que :
$f(a) = g(a)\ et\ f(b) = g(b)\ et\ \forall x \in [a, b], f''(x) \leq g''(x)$. Montrer que : $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.
Posons $\forall x \in [a, b], h(x) = g(x) - f(x)$. Alors h est de classe C^2 sur $[a, b]$.
$\forall x \in [a, b], h'(x) = g'(x) - f'(x)\ et\ h''(x) = g''(x) - f''(x) \geq 0$. Donc h' est croissante.

<u>1ère méthode :</u>
De plus, $h(a) = h(b) = 0$. Donc le théorème de Rolle assure que h' s'annule sur $]a, b[$ en un réel c. Par conséquent, $\forall x \in [a, c], h'(x) \leq 0\ et$ $\forall x \in [c, b], h'(x) \geq 0$. Donc h est décroissante sur $[a, c]$ et croissante sur $[c, b]$. De plus, $h(a) = h(b) = 0$.Donc nécessairement, h est positive. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

<u>2ère méthode :</u>
Alors h est convexe. Donc la courbe de h se trouve en-dessous de toutes ses cordes. Or, la corde (AB) reliant $A(a, h(a))$ et $B(b, h(b))$ est la droite des abscisses puisque $h(a) = h(b) = 0$. Ainsi, la courbe de h se trouve en-dessous de l'axe des abscisses ce qui signifie que , h est négative. Ainsi, $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$.

<u>II Accroissements finis</u>

Théorème de Accroissements finis généralisé : Soit a et b deux réels tq $a < b$.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.
a) Justifier que $g(a) \neq g(b)$.
b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>Indication</u> : utiliser la fonction $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$ où K est une constante à bien choisir !

a. La contraposée du théorème de Rolle s'applique à g. g est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Comme g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, $g(a) \neq g(b)$.
b. Soit $\varphi: (x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)))$. Alors, φ est une fonction continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\ et\ \varphi(a) = 0$. Cherchons K tq $\varphi(b) = 0$. $\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) - K(g(b) - g(a)) = 0 \Leftrightarrow K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Désormais $K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ et\ \varphi(b) = 0$.
Alors, le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or, $\forall x \in]a, b[, \varphi'(x) = f'(x) - Kg'(x)$. Alors, $f'(c) - Kg'(c) = 0$ et par conséquent, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Règle de (monsieur) l'Hôpital

1. **Règle de (monsieur) l'Hôpital** : Soit f et g sont deux fonctions dérivables $sur\ ]a,b[\ et$ telles que :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$ ..

Montrer, en utilisant les accroissements finis généralisés, que : $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

3. **Une application pratique :** calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3}\ de\ deux\ manières$.

4. **Une application plus théorique :** Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$. On définit la fonction g : $[0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}\ si\ x \neq 0 \\ f'(0) si\ x = 0 \end{cases}$

a. Démontrer que g est de classe C^1 sur [0,1[.

b. Exprimer pour $x \in]0,1[\ et\ n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.

c. En déduire que g est de classe C^∞ sur [0,1[et déterminer $g^{(n)}(0)$ On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.

1.Considérons les prolongements $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ par continuité en 0 de f et g.

Soit $x \in]a,b[$. Alors, $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont continues sur $[a,x]$ et dérivables sur $]a,x[$. Donc $\tilde{g}' = g' donc\ \tilde{g}'$ne s'annule pas sur $]a,x[$. Alors, le théorème de accroissements finis généralisé assure qu'il existe $c_x \in]a,x[$ tel que : $\frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)} = \frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}$ i.e.$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$.

Or, comme $c_x \in]a,x[, \lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et par suite, par composition, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = L$.

2. $f : \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$ sont deux fonctions dérivables $sur\ ]0,1[\ et \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

De plus, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \underbrace{x}_{\substack{limite\\ nulle\\ en\ 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{bornée} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Mais $T(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne tend pas vers 0 (et, en fait, n'a pas de limite en 0) puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n\pi} = 0\ et\ T\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 2\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. J'en conclus que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Ainsi, la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

4. <u>première méthode</u> : $\frac{cos(2x)-1}{5x^2+6x^3} = \frac{-\frac{(2x)^2}{2}+o_0(x^2)}{5x^2+6x^3} = \frac{-2x^2+o_0(x^2)}{5x^2+6x^3} = \frac{-2+o_0(1)}{5+6x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{2}{5}$.

<u>deuxième méthode</u> : Posons $f(x) = cos(2x) - 1\ et\ g(x) = 5x^2 + 6x^3$. f et g sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2sin(2x)\ \ et\ \ g'(x) = 10x + 18x^2\ \ et\ \ f''(x) = -4cos(2x)\ \ et\ \ g''(x) = 10 + 36x$. Et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$, la règle de l'Hopital assure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{5}$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{5}$, la règle de l'Hopital assure que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{2}{5}$.

5. Soit $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R})$. On définit la fonction g : $[0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \overbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x}}^{\tau(x)}\ si\ x \neq 0 \\ f'(0)\ si\ x = 0 \end{cases}$

a. Comme $f \in C^\infty([0,1[,\mathbb{R}), \tau \in C^\infty(]0,1[,\mathbb{R})\ et\ par\ suite\ g \in C^\infty(]0,1[,\mathbb{R})\ et$

De plus, comme f est dérivable en 0, $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = f'(0)$ ce qui signifie que g est continue en 0 et par suite g est continue en [0,1[.

Enfin, $\forall x \in]0,1[, g'(x) = \tau'(x) = \frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2} \overset{\substack{en\ appliquant\ T.Y\\ à\ f\ et\ à\ f'}}{=} \frac{x[f'(0)+xf''(0)+o_0(x)]-\left[f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)\right]}{x^2} = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o_0(x^2)}{x^2} = \frac{f''(0)}{2} + o_0(1)$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$.

Alors le critère de classe C^1assure que g est de classe C^1 sur [0,1[.

b. Soit $x \in]0,1[\ et\ n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = \tau^{(n)}(x) \underbrace{=}_{\substack{en\ posant\\ u(x)=f(x)-f(0)\\ v(x)=\frac{1}{x}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$

$$g^{(n)}(x) = [f(x) - f(0)]\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} = \frac{(-1)^n n![f(x)-f(0)]+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(n-k)!f^{(k)}(x)x^k}{x^{n+1}}$$

c. Appliquons le critère de classe C^∞ .

τ est de classe C^∞ sur [0,1[.

Calculons la limite de $g^{(n)}$en 0 grâce à la règle de l'Hôpital :

Posons $P(x) = (-1)^n n!\,[f(x) - f(0)] + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)!\,f^{(k)}(x)x^k$ et $Q(x) = x^{n+1}$.

P et Q sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $0 = P(0) = \lim\limits_{x\to 0} P(x)\ \ et\ 0 = Q(0) = \lim\limits_{x\to 0} Q(x)$.

$\forall x \in]0,1[, Q'(x) = (n+1)x^n$.

$$et\ P'(x) = (-1)^n n!\,f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)!\,\left[f^{(k+1)}(x)x^k + kf^{(k)}(x)x^{k-1}\right]$$

$$= (-1)^n n!\,f'(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\left[f^{(k+1)}(x)x^k + kf^{(k)}(x)x^{k-1}\right]$$

$$= (-1)^n n!\, f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!} f^{(k+1)}(x)x^k - (-1)^{n-k+1}\frac{n!}{(k-1)!} f^{(k)}(x)x^{k-1}\right]}_{télescopage}$$
$$= (-1)^n n!\, f'(x) + (-1)^0 \frac{n!}{n!} f^{(n+1)}(x)x^n - (-1)^{n-1+1}\frac{n!}{(1-1)!} f^{(1)}(x)x^{1-1}$$
$$= (-1)^n n!\, f'(x) + f^{(n+1)}(x)x^n + (-1)^{n+1} n!\, f'(x)$$
$$= f^{(n+1)}(x)x^n$$

Donc $\frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}$. Donc $\lim_{x\to 0}\frac{P'(x)}{Q'(x)} \overset{car\ f^{(n+1)} est\ continue\ en\ 0}{\triangleq} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Donc,on peut conclure avec le critère de classe C^∞ , g est de classe C^∞ sur [0,1[et $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Encadrements et inégalités obtenus grâce aux accroissements finis.

1. Montrer que : $\forall \boldsymbol{p} \in \mathbb{N}\backslash\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$. En déduire un encadrement de $\boldsymbol{S_n}$ ***tel que*** :
   $\boldsymbol{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Conclure à la convergence de la suite $(\boldsymbol{S_n})$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^2\big(\boldsymbol{Arctan}(x+1) - \boldsymbol{Arctan}(x)\big)$
3. Majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes : $\sqrt{10001} \approx 100$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in [x, x+1]/ Arctan(x+1) - Arctan(x) = Arctan'(c)(x+1-x) = \frac{1}{1+c^2}$.

Alors, $\frac{1}{1+(x+1)^2} \leq Arctan(x+1) - Arctan(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc $\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \leq x^2[Arctan(x+1) - Arctan(x)] \leq \frac{x^2}{1+x^2}$.

Comme $\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ *et* $\frac{x^2}{1+x^2} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^2\big(Arctan(x+1) - Arctan(x)\big) = 1$.

3.$\sqrt{10001} = \sqrt{10000+1}$. Soit $f(x \mapsto \sqrt{10000+x})$. f est de classe C^1 sur [0,1] et $\forall x \in [0,1], |f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{10000+x}}\right| \leq \left|\frac{1}{2\sqrt{10000}}\right| = \frac{1}{200}$. Alors, l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre 0 et 1 assure que : $\left|\sqrt{10000+1} - 100\right| = \left|\sqrt{10000+1} - \sqrt{10000}\right| \leq \frac{1}{200}|1-0| =$. Donc 100 est une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ à 0,005 *près*.

Soit a , b, *et* c trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Posons $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Alors f est polynomiale donc continue sur [0,1] et dérivable sur]0,1[. Alors l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $f(1) - f(0) = f'(x)(1-0)$ *i.e.* $f'(x) = a + b + c$ *i.e.* $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Soit a et b deux réels tq $a < b$ et $f: [a,b] \to \mathbb{R}^*$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

f continue sur l'intervalle $[a,b]$ et ne s'annule pas sur $[a,b]$ donc garde un signe strict constant sur $[a,b]$. Posons $g(x) = ln|f(x)|$.
Alors f est continue sur $[a,b]$ donc g l'est aussi. f est dérivable et ne s'annule pas sur $]a,b[$ donc g est dérivable sur $]a,b[$ (puisque la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable que sur $\mathbb{R}^*$)et $\forall x \in]a,b[, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Alors l' égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ i.e. $ln|f(b)| - ln|f(a)|$=$\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$.

Donc, $ln\left[\frac{|f(b)|}{|f(a)|}\right]$=$\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$ et par conséquent, $\frac{|f(b)|}{|f(a)|} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$i.e. $\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$. Comme f conserve le même signe sur $[a,b]$, $\frac{f(b)}{f(a)} > 0$ et ainsi, $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)}$.

On suppose que f est une application deux fois dérivable sur $]0,2[$. Soit deux réels u *et* v tels que $0 < u < v < 2$ .En utilisant à $\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à bien choisir, démontrer que :
$\exists c \in]0,2[\ / f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4}$.

Soit $\varphi(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+v}{2}\right) + f(v) + K\frac{(v-x)^2}{4}$ où K est une constante à choisir de sorte que φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle.
f est une application deux fois dérivable sur]0,2[donc sur $[u,v]$ donc φ l'est aussi. Et $\forall x \in [u,v], \varphi'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(x-v)$. De plus, $\varphi(v) = 0$. Choisissons K tel que $\varphi(u) = 0$ i.e. $K = \frac{4\left[f(u)+2f\left(\frac{u+v}{2}\right)+f(v)\right]}{(v-u)^2}$. Alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et il existe donc un réel $d \in]u,v[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{d+v}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. De plus, f'est dérivable donc continue sur $[u,v]$. Alors, l'égalité des accroissements finis assure qu'il existe un réel $c \in]u,d[$ tel que : $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v+d}{2} - d\right)$ i.e. $f'(d) - f'\left(\frac{v+d}{2}\right) = f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right)$. Alors $f''(c)\left(\frac{v-d}{2}\right) + \frac{K}{2}(d-v) = 0$. Comme $d \neq v$, $\frac{v-d}{2} \neq 0$ et par conséquent, $f''(c) - K = 0$.

Ainsi, $\frac{4\left[f(u)+2f\left(\frac{u+v}{2}\right)+f(v)\right]}{(v-u)^2} = K = f''(c)$. J'en conclus que $\boldsymbol{f(u) - 2f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v) = f''(c)\frac{(v-u)^2}{4}}$où $c \in]u,d[\subset]u,v[$.

Justifier que si f est classe C^1 *sur* $[a,b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit f classe C^1 *sur* $[a,b]$. Alors f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc y est borné. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a,b], |f'(t)| \leq M$. L'inégalité des accroissements finis assure alors que f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Déterminer les limites possibles de u .

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$. En déduire la convergence de u . On note α sa limite.

c) Donner une valeur approchée de sa limite α à 10^{-2} près .

Soient $f:([a,b]\to\mathbb{R})$ telle que f , f' et f'' sont définies et continues sur $[a,b]$ et f'' est dérivable sur $]a,b[$.

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que : $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)-\frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

Indication : on introduira $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{(x-a)}{2}\left(f'(x)+f'(a)\right)-A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

Soit $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{(x-a)}{2}\left(f'(x)+f'(a)\right)-A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on va choisir de sorte que g vérifie les hypothèses de théorème de Rolle. g est de classe C^1sur $[a,b]$ et deux -fois dérivable sur $]a,b[$.

Et, $\forall x\in[a,b], g'(x)=\frac{1}{2}(f'(x)-f'(a))-\frac{(x-a)}{2}f''(x)-3A(x-a)^2$ et $\forall x\in]a,b[, g''(x)=\frac{(x-a)}{2}(f'''(x)-12A)$.Donc, $g(a)=g'(a)=0$.

Choisissons A tel que $g(b)=0$. Donc, prenons $A=\frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3}$. Alors, appliquons le théorème de Rolle à g : il existe donc un réel $d\in]a,b[$ tel que : $g'(d)=0$. Comme f' est continue sur $[a,d]$ et dérivable sur $]a,d[$ et $g'(d)=g'(a)=0$, il existe un réel $c\in]a,d[$ tel que : $g''(c)=0$ et donc $\frac{(c-a)}{2}(f'''(c)-12A)=0$ et finalement , $A=\frac{f'''(c)}{12}$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}(f'(b)+f'(a))}{(b-a)^3}=\frac{f'''(c)}{12}$ et j'en conclus que : $f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}\left(f'(a)+f'(b)\right)-\frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a<b$.

Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a,b[$, à valeurs réelles et telles que :

- u et v sont continues sur $[a,b[$
- u et v sont dérivables sur $]a,b[$
- $\forall x\in]a,b[, |u'(x)|\leq v'(x)$.

Montrer en étudiant deux « bonnes » fonctions que : $\forall x\in[a,b[, |u(x)-u(a)|\leq v(x)-v(a)$.

APPLICATION : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;+\infty[$ telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)+f'(x)=0$. On pose $h(x)=f(x)e^x$.

a. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que : $\exists A\geq a/\forall x\geq A, |h'(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}e^x$.

b. En déduire , en utilisant 1., que $\forall x\geq A, |f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+|h(A)|e^{-x}$.

c. Justifier que : $\exists B\geq A/\forall x\geq B, |f(x)|\leq\varepsilon$.

d. Qu'en déduit-on sur f ?

Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $f:]a,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=L\in\mathbb{R}^*$.

1) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $A>0$ tel que : $\forall x>A, \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}$

2) Montrer que $\forall x>0, \left|\frac{f(x)}{x}-L\right|\leq\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right|+\left|\frac{AL+f(A)}{x}\right|$

3) En déduire que $f(x)\sim_{+\infty}Lx$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=L\in\mathbb{R}^*$, $\exists A\in]a,+\infty[/\forall x\geq A, |f'(x)-L|\leq\frac{\varepsilon}{4}$.

Soit $x>A$. $\frac{f(x)}{x}-L=\left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right)\frac{x-A}{x}+\frac{f(A)-AL}{x}$. Alors

$\left|\frac{f(x)}{x}-L\right|=\left|\left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right)\frac{x-A}{x}+\frac{f(A)-AL}{x}\right|\overset{1\text{ère } I.T}{\leqq}\left|\left(\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right)\frac{x-A}{x}\right|+\left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|$

$\left|\frac{f(x)}{x}-L\right|\leq\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right|+\left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|$.

Or, d'après l'EAF, il existe $c_{A,x}\in[A,x]$ tel que $\frac{f(x)-f(A)}{x-A}=f'(c_x)$.

Alors, $c_x\geq A$ et par conséquent, $\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|=|f'(c_x)-L|\leq\frac{\varepsilon}{4}$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-A}{x}=1$. Donc, $\exists B>a/\forall x\geq B, \left|\frac{x-A}{x}\right|\leq 2$. Alors $x\geq\max(A,B)\Longrightarrow\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|*\left|\frac{x-A}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Enfin, $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|=0$. Donc, $\exists C>a/\forall x\geq C, \left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$..

Alors $x\geq\max(A,B,C)\Longrightarrow\left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}-L\right|\left|\frac{x-A}{x}\right|+\left|\frac{f(A)-AL}{x}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Et par suite, $\forall x\geq\max(A,B,C)$, $\left|\frac{f(x)}{x}-L\right|\leq\varepsilon$.

J'en déduis que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L$ et par conséquent, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{Lx}=1$ puisque L non nul. Et ainsi, je peux conclure que $f(x)\sim_{+\infty}Lx$.

III Taylor -Lagrange

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que : f et f'' sont bornées. On note $M_0=\sup|f|$ et $M_2=\sup|f''|$.

1) Soit x et h deux réels . Justifier que $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|\leq M_2\frac{|h|^2}{2}$.

2) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall h\in\mathbb{R}^{+*}, |f'(x)|\leq\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2h}{2}$.

3) En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On note $M_1=\sup|f'|$.

4) Montrer que $M_1\leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

1) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f avec $a=x$ et $b=x+h$. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $|f''|$ est majorée par M_2 (donc f'' est bornée sur $\mathbb{R}$). Donc $T.L$ assure que $|f(b)-[f(a)+(b-a)f'(a)]|\leq M_2\frac{|b-a|^2}{2}$ i.e. $|f(x+h)-f(x)-hf'(x)|\leq M_2\frac{h^2}{2}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \overset{car\ t\le|t|}{\leq} \big||hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)|\big| \overset{2^{ème}\ I.T}{\leq} \big|hf'(x) - \big(f(x+h) - f(x)\big)\big| \overset{car\ |t|=|-t|}{=} |f(x+h) - f(x) - hf'(x)|.$$

Donc, $|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq M_2\frac{|h|^2}{2}$. Et par conséquent, $h|f'(x)| = |hf'(x)| \leq |f(x+h) - f(x)| + M_2\frac{h^2}{2}$.

De plus, $|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq 2M_1$. Il s'en suit que $h|f'(x)| \leq 2M_1 + M_2\frac{h^2}{2}$ et ainsi, $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ $(car\ h > 0)$.

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$. Comme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ est indépendant de x, tous les réels de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$ sont des majorants de $|f'|$. La fonction f' est donc bornée.

4) Cherchons le plus petit majorant de $|f'|$ qui soit de la forme $\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ tq $h > 0$.

Posons $\varphi(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car son expression …). Et $\forall h > 0, \varphi'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$.

1^er^ cas : $M_2 \neq 0$. Alors, $\varphi'(h) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} > 0 \Leftrightarrow h^2 > 4\frac{M_0}{M_2} \Leftrightarrow h > 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$. Donc φ est décoirssante sur $\left]0, 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right[$ et coirssante sur $\left]2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}, +\infty\right[$ et admet donc un minimum en $2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ qui vaut $\varphi\left(2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{M_2 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}}{2} = 2\sqrt{M_0 M_2}$. Comme tous les réels $\varphi(h)$ tels que $h > 0$, $2\sqrt{M_0 M_2}$ est un majorant de $|f'|$. DOnc $2\sqrt{M_0 M_2}$ est supérieur au plus petit majorant de $|f'|$. Ainsi, $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

2^ème^ cas : $M_2 = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$. Donc, il existe a et b constantes réelles telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Comme f est bornée, $a = 0$. Et par suite $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$. Donc $M_1 = 0$. Ainsi, $M_1 = 0 = 2\sqrt{M_0 M_2}$. Ainsi, $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Soit f et g deux fonctions de classe C^3 impaires et telles que $g^{(3)}(0) \neq 0$ .Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$.

D'après Taylor-Young , $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$. De plus, comme f est impaire, $f(0) = f''(0) = 0$.

Donc, $f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, $f(2x) = 2f'(0)x + 8\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et $f(3x) = 3f'(0)x + 9\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

De même, $g(x) = g'(0)x + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$, $g(2x) = 2g'(0)x + 8\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$ et $g(3x) = 3g'(0)x + 9\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

Alors, $\frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} = \frac{f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3 - 2\left(2f'(0)x + 8\frac{f'''(0)}{6}x^3\right) + 3f'(0)x + 9\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3)}{g'(0)x + \frac{g'''(0)}{6}x^3 - 2\left(2g'(0)x + 8\frac{g'''(0)}{6}x^3\right) + 3g'(0)x + 9\frac{g'''(0)}{6}x^3 + o_0(x^3).} = \frac{\frac{4f'''(0)}{3}x^3 + o_0(x^3)}{\frac{4g'''(0)}{3}x^3 + o_0(x^3)} = \frac{f'''(0) + o_0(1)}{g'''(0) + o_0(1)}$.

Alors ,comme $g'''(0) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} \overset{\substack{pas\ de\ FI \\ car\ g'''(0)\neq 0}}{=} \frac{f'''(0)}{g'''(0)}$.

1. Trouver une valeur approchée rationnelle de $ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à 10^{-4} *près* . (taylor Lagrange)

2. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$ (Taylor reste intégral) .

$ln\left(\frac{11}{10}\right) = ln\left(1 + \frac{1}{10}\right)$.

$g: (t \mapsto \ln(1+t))$ est de classe C^∞ sur $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \frac{1}{10}\right], g^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $\left|g^{(n+1)}(t)\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$.

Donc, comme $0 \in [0, +\infty[$, l' inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in \left[0, \frac{1}{10}\right],, \left|g(t) - P_{n,\ln(1+t),0}(t)\right| \leq n!\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t = \frac{1}{10}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln\left(\frac{11}{10}\right) - P_{n,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right)\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}\left|\frac{1}{10}\right|^{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^{n+1}}$.

Cherchons le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4}$.

$\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)} < 10^{-4+n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)} < 10^{n-3} \Leftrightarrow -\ln(n+1) < (n-3)\ln(10) \Leftrightarrow (n-3)\ln(10) + \ln(n+1) > 0$.

Posons $h(t) = (t-3)\ln(10) + \ln(t+1)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall t \geq 0, h'(t) = \ln(10) + \frac{1}{t+1} > 0$.

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $h(2) < 0 < h(3)$. Donc $n = 3$ est le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{1}{(n+1)10^{n+1}} < 10^{-4}$.

Alors, $\left|\ln\left(\frac{11}{10}\right) - P_{3,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right)\right| \leq \frac{1}{(4+1)10^{3+1}} < 10^{-4}$.

Donc $P_{3,\ln(1+t),0}\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{10^k} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{10^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{10^3} = \frac{143}{1500}$ est une valeur approchée rationnelle de $ln\left(\frac{11}{10}\right)$ à 10^{-4}près.

Calculer la limite de S ,T définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!}$

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = -P_{n,\ln(1+t),0}(1)$.

$g: (t \mapsto \ln(1+t))$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, g^{(n+1)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ donc $\left|g^{(n+1)}(t)\right| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$.

Donc, comme $0 \in [0, +\infty[$, l' inégalité de Taylor Lagrange assure que $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, +\infty[, \left|g(t) - P_{n,\ln(1+t),0}(t)\right| \leq n!\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$.

En particulier pour $t = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|g(1) - P_{n,\ln(1+t),0}(1)\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |\ln(2) + \quad S_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \quad S_n = -\ln(2)$.

2. $T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-3)^k}{(2k+1)!} = P_{2n+1,\mathrm{sh},0}(-3)$.

sh est de classe C^∞ sur $[-3,3]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-3,3]$, $\left|sh^{(2n+2)}(t)\right| \leq ch(3)$.

Donc, comme $0 \in [-3,3]$,l' inégalité de Taylor-Lagrange assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, +\infty[, \left|sh(t) - P_{2n+1,\mathrm{sh},0}(t)\right| \leq ch(3)\frac{|t|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

En particulier pour $t = -3, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|sh(-3) - P_{n,sh,0}(-3)\right| \leq ch(3)\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |-sh(3) - \quad T_n| \leq ch(3)\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n!}\overset{CC}{=}0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}=0$ $\left(puisque\ \left(\frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\ est\ extraite\ de\ \left(\frac{3^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Ainsi, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=-\operatorname{sh}(3)$.

Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\left|f^{(n)}(x)\right|\le|x|$.

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ .Déterminer le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n.
2) En déduire, en utilisant Taylor-Lagrange, que f est la fonction nulle.

1) $\forall n\in\mathbb{N},\left|f^{(n)}(0)\right|\le|0|=0$ donc $f^{(n)}(0)=0$. Donc, $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},P_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=0$. Ainsi, tous les polynômes de Taylor en 0 de f sont nuls.
2) Soit x un réel non nul et S le segment d'extrémités 0 et x. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur S :

$f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in S,\left|f^{(n)}(t)\right|\le|t|\le|x|$. Donc l'$I.T.L$ assure que : $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in S$, $\left|f(t)-\underbrace{P_{n,f,0}(t)}_{=0}\right|\le|x|\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$, en particulier pour $t=x$, j' obtiens $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f(x)|\overset{(**)}{\le}|x|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or les croissances comparées pour les suites assurent que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{(n)!}=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|x|\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x)|=|f(x)|$. Alors en passant à la limite $n\to+\infty$ dans l'inégalité$(**)$, j'obtiens : $|f(x)|\le0$. Ainsi, je peux conclure que $\forall x\in\mathbb{R}^*,f(x)=0$. Cette égalité étant encore vraie pour $x=0$, nous pouvons conclure que f est la fonction nulle.

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a,b]$ telle que : $f'(a)=f'(b)=0$

1) Justifier que f'' s'annule sur $[a,b]$.
2) Justifier qu'il existe un réel M tel que : pour tout x dans $[a,b]$, $|f''(x)|\le M$.
3) Démontrer en appliquant deux fois la formule de Taylor-Lagrange que : $|f(b)-f(a)|\le\frac{(b-a)^2}{4}M$.
4) On suppose que $b=f(b)=1\ et\ a=f(a)=0$. Montrer qu'il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que : $|f''(c)|\ge4$.

1) On peut appliquer le théorème de Rolle à f'qui en vérifie toutes les hypothèses. Il existe donc un réel $c\in[a,b]$ tel que $f''(c)=0$
2) f'' est continue sur le segment $[a,b]$donc y est bornée autrement dit, $|f''|$ est majorée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que : pour tout x dans $[a,b]$, $|f''(x)|\le M$.
3) Appliquons Taylor-Lagrange entre $x=b$ et $y=\frac{a+b}{2}$, $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)+\underbrace{f'(b)}_{=0}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)\right|\le\frac{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2}{2}M$ i.e. $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}M$.

Appliquons aussi Taylor-Lagrange entre $x=a$ et $y=\frac{a+b}{2}$, $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)+\underbrace{f'(a)}_{=0}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\right|\le\frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2}{2}M$ i.e. $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}M$

Alors $|f(b)-f(a)|=\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|\le\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|\le2\frac{(b-a)^2}{8}M=\frac{(b-a)^2}{4}M$.

4) Alors $M\ge4$. Comme $|f''|$est continue sur le segment $[a,b]$, $|f''|$ admet un maximum sur ce segment et on peut choisir $M=max_{[a,b]}|f''|$. Et il existe un réel c tel que $|f''(c)|=M$.Alors $|f''(c)|\ge4$.

IV Convexité

Soit $f(x)=e^{-x^2}$. Etudier la convexité et les points d'inflexion de f.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},f'(x)=-2xe^{-x^2}\ et\ f''(x)=(-2+4x^2)e^{-x^2}=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}=4\left(x-\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt2}\right)e^{-x^2}$. Donc, $f''(x)>0\Leftrightarrow x\notin\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]$. Alors, f est concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]$ et convexe ailleurs et Cf admet en $-\frac{1}{\sqrt2}$et en $\frac{1}{\sqrt2}$deux points d'inflexion.

Soit $f:[0+\infty[\to\mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x\to+\infty$.
2. On suppose que L est finie. Montrer que ψ: $(x\mapsto f(x)-Lx)$ est décroissante et admet une limite quand $x\to+\infty$.

1. φ: $\left(x\mapsto\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ est croissante puisque f est convexe donc $\varphi(x)$ admet une limite L , finie ou infinie, quand $x\to+\infty$.
Or, $\forall x>0,\frac{f(x)}{x}=\varphi(x)+\frac{f(0)}{x}$.Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=L+0=L$.
Rque : Si L est réel et non nul alors $f(x)\sim_{+\infty}Lx$.
2. On suppose que L est finie. Soit ψ: $(x\mapsto f(x)-Lx)$. Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que $x<y$.
Alors $\psi(y)-\psi(x)=f(y)-Ly-(f(x)-Lx))=f(y)-f(x)+L(x-y)=[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-L](y-x)$
De plus, $(y\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ est croissante puisque f est convexe . Et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{f(y)}{y}*\frac{y}{y-x}-\frac{f(x)}{y-x}$. Donc $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=L$. Par conséquent, la fonction $(y\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{y-x})$ tend en croissant vers L. Ainsi, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le L$. Et comme $(y-x)\ge0,\psi(y)-\psi(x)\le0$. J'en déduis que ψ est décroissante. Et par conséquent, ψ a une limite en $+\infty$.

Soit I et J deux intervalles, $f:(I\to J)$ une fonction convexe et $g:(J\to\mathbb{R})$ une fonction. Montrer que :

- si g est convexe et croissante alors la composée $g\circ f$ est convexe
- si g est concave et décroissante alors la composée $g\circ f$ est concave.

Je suppose g est convexe et croissante . Soit x et y deux éléments de I et $\lambda\in[0,1]$.
Comme f est convexe, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
De plus, toutes les images par f sont éléments de J donc $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\in J\ et\ f(x)\in J\ et\ f(y)\in J$. Comme $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ est un réel compris entre $f(x)$ et $f(y)$, deux éléments de l'intervalle J , $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ est aussi dans l'intervalle J
Alors comme g est croissante sur J, $g(f(\lambda x+(1-\lambda)y))\le g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))$.
Enfin, g étant convexe, $g\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big)\le\lambda g\big(f(x)\big)+(1-\lambda)g\big(f(y)\big)$.
Même preuve pour g concave et décroissante.

V Des équations fonctionnelles avec hypothèses de dérivabilité

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : pour tous réels x *et* y , $f(x+y)=f(x^2)+f(y)$. Montrer que f est nulle.

Alors $f(0)=f(0+0)=f(0^2)+f(0)=2f(0)$ donc $f(0)=0$.

Fixons $y\in\mathbb{R}$.

- Les fonction $u:\left(x\mapsto f(x+y)\right), v:\left(x\mapsto f(x^2)\right)$ *et* $w:(x\mapsto f(y))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, u'(x)=v'(x)+w'(x)$.

Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x+y)=2xf'(x^2)+0$. En particulier, pour $x=0, f'(y)=0$. Ainsi, $\forall y, f'(y)=0$.Cela implique que f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme $f(0)=0$, f est la fonction nulle.

OU BIEN

- Par définition, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(y)$. De plus, $\forall x\neq 0, \frac{f(x+y)-f(y)}{x}=\frac{f(x^2)}{x}=\frac{f(x^2)-0}{x^2-0}x$.

Or, f est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)\in\mathbb{R}$. Donc par composition, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}=f'(0)\in\mathbb{R}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(0)\times 0=0$. Ainsi, par unicité de la limite $f'(y)=0$. Cela implique que f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et comme $f(0)=0$, f est la fonction nulle.

Montrer qu'il existe une unique fonction f définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

La fonction nulle est solution.

Soit une fonction f définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

Posons $g(x)=f(x)e^{-x}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall x\geq 0, g'(x)=\left(f'(x)-f(x)\right)e^{-x}\leq 0$. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0)=0$, g est négative sur $\mathbb{R}^+$. Et par conséquent, f est négative sur $\mathbb{R}^+$. Comme, de plus, f est positive sur $\mathbb{R}^+$, f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi la fonction définie et nulle sur $\mathbb{R}^+$ est la seule fonction définie, positive et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que : $f(0)=0$ et $\forall x\geq 0, f'(x)\leq f(x)$.

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$,dérivables ,et vérifiant :$\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy)=f(x)+f(y)$.

La fonction nulle est solution.

Soit f une solution. Alors f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$,dérivable et $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, f(xy)=f(x)+f(y)(**)$.

Alors $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1). Donc\ f(1)=0$.

<u>Fixons $y\in\mathbb{R}^{+*}$.</u>

Par définition, $\lim\limits_{t\to y}\frac{f(t)-f(y)}{t-y}=f'(y)$. Donc par composition,

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}=f'(y)$.

Or, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\}, \frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}\overset{par\ (**)}{\cong}\frac{f(x)}{(x-1)y}\overset{car\ f(1)=0}{\cong}\frac{1}{y}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}=\frac{1}{y}f'(1)$.

Alors, par unicité de la limite, $f'(y)=\frac{1}{y}f'(1)=\frac{a}{y}$ où $a\in\mathbb{R}$. Ainsi, il existe une constante réelle a telle que : $\forall y>0, f(y)=\frac{a}{y}$.

OU BIEN

$u:(x\mapsto f(xy))$ *et* $v:\left(x\mapsto f(x)+f(y)\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\forall x>0, u(x)=v(x)$.

Donc, $\forall x>0, u'(x)=v'(x)$ i.e. $\forall x>0\ yf'(xy)=f'(x)$. Ainsi, $\forall x>0, \forall y>0,\ yf'(xy)=f'(x)$. En particulier pour $x=1, , \forall y>0,\ yf'(y)=f'(1)$ donc $f'(y)=\frac{a}{y}$ *où a constante.*

J'en déduis qu'il existe a et b deux constantes réelle telles que : $\forall y>0, f(y)=aln(y)+b$. Mais comme $f(1)=0$, nécessairement $b=0$. J'en conclus que : $f(y)=aln(y)$.

Donc les solutions de notre problème sont nécessairement de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle.

Réciproquement : toutes ces fonctions de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2, aln(xy)=a(\ln(x)+\ln(y)=aln(x)+aln(y)$.

Donc toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto aln(x))$ où a constante réelle sont solutions . J'en conclus que ce sont exactement les solutions.

Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2+\int_0^x(x-t)f(t)dt$.

Déterminer toutes les fonctions dérivables en 0 et telles que : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)f(y)$.

L'exponentielle et les fonctions constantes égales à 0 et à 1 sont solutions.

Soit f une solution. Alors f est dérivable donc continue en 0 et $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)f(y)$.

Alors $f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)$. Donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.

Fixons $y\in\mathbb{R}$. Donc, $u:\left(x\mapsto\ f(x+y)\right)$ *et* $v:\left(x\mapsto f(x)f(y)\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x, u'(x)=v'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x+y)=f'(x)f(y)$. En particulier pour $x=0, f'(y)=f'(0)f(y)$. Ainsi, il existe un réel $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall y, f'(y)=af(y)$.

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et homogène : $z'-az=0$

Alors il existe une constante k réelle telle que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ke^{ax}$. Comme $f(0)=0$ ou $f(0)=1$, $k=0$ ou $k=1$.

Ainsi, les soutions de notre pble sont nécessairement de la forme $(x\mapsto 0)$ *ou* $(x\mapsto e^{ax})$ tq $a\in\mathbb{R}$.

Réciproquement : la fonction nulle est solution mais toutes ces fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont-elles solutions ?

Chacun de ces fonctions est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, e^{a(x+y)}=e^{ax+ay}=e^{ax}e^{xb}$

Donc toutes les fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont solutions . J'en conclus que la fonction nulle et les fonctions de la forme $(x\mapsto e^{ax})$ où a constante réelle sont exactement les solutions.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :pour tout $x\in\mathbb{R}$,$f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$.
En déduire que $f = cos$.