DL 8

Ex 1 Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.

1. Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a, b[$, à valeurs réelles et telles que :
   - u et v sont continues sur $[a, b[$
   - u et v sont dérivables sur $]a, b[$
   - $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$.

Montrer en étudiant deux « bonnes » fonctions que : $\forall x \in [a, b[, |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

2. **APPLICATION** :

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.

2.1.1 Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.

2.1.2 En déduire , en utilisant 1., que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.

2.1.3 Justifier que : $\exists B \geq A / \forall x \geq B, |f(x)| \leq \varepsilon$.

2.1.4 Qu'en déduit-on sur f ?

Ex 2

Soient $f : ([a, b] \to \mathbb{R})$ telle que f , f' et f'' sont définies et continues sur $[a, b]$ et f'' est dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.

Indication : on introduira $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\left(f'(x) + f'(a)\right) - A(x-a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

A RENDRE LE VENDREDI 23 FEVRIER

DL 9

A. Une nouvelle inégalité de convexité.

1. Soit φ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .

   1.1 Rappeler sans démonstration les propriétés de continuité et de dérivabilité vérifiées par φ.

   1.2 Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$, $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}$". (indication : remarquer que : $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}$)

2. Soit f une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(J) \subset I$. Soit $(a, b) \in J^2$ tel que $a < b$.

   2.1 Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ et justifier que cette limite appartient à I.

   2.2 Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.

   2.3 Déduire de tout ce qui précède que $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (\varphi \circ f)(t)dt$ (indication : on choisira judicieusement les réels x_k).

   2.4 Enoncer un résultat analogue au 2.3 dans le cas où φ est une fonction concave sur I.

B. Application

3. $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$, on pose $I_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x dx$.

   3.1 Justifier que : $\forall x > 0, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$. (on pourra utiliser une inégalité usuelle sans la prouver).

   3.2 En déduire que (I_n) est majorée.

   3.3 Montrer en utilisant 2., que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(I_n) \geq \frac{1}{n-1}\int_1^n x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

   3.4 En déduire que (I_n) est convergente de limite e.