Corrigé du DL 6

EXERCICE 1 Soit (u_n) une suite réelle croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{n}$. On pose $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = u_{2^p}$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, v_p - v_0 \leq \frac{2^p-1}{2^{p-1}}$.
2. En déduire que (u_n) converge .

1. $\forall p \in \mathbb{N}, v_{p+1} - v_p = u_{2^{p+1}} - u_{2^p} = u_{2\times 2^p} - u_{2^p} \leq \frac{1}{2^p}$.

Donc, $\forall p \in \mathbb{N}, v_p - v_0 = \sum_{k=0}^{p-1} v_k \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2^p-1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^p-1}{2^{p-1}}\left(= \frac{2^p-1}{2^{p-1}(2-1)} = \frac{2^p-1}{2^p-2^{p-1}}\right)$.

2. Alors, $\forall p \in \mathbb{N}, v_p - v_0 \leq \frac{2^p-1}{2^{p-1}} = 2 - \frac{1}{2^{p-1}} \leq 2$ et $v_p \leq v_0 + 2$. La suite v est donc majorée.

De plus $v_{p+1} - v_p = u_{2^{p+1}} - u_{2^p} \geq 0$ car u est croissante. Par conséquent, v est croissante et par suite, v converge vers un réel L .

De plus, la suite u étant croissante, u admet une limite. v étant extraite de u, u et v ont la même limite. Ainsi, u converge aussi vers le réel L.

EXERCICE 2

Soit a un réel supérieur à 1 *et* l'entier naturel k tel que $k^2 \leq a < (k+1)^2$.

Soit u la suite définie par : $u_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$existe.
2. Montrer que la suite u est décroissante à partir du rang 1.
3. Justifier l'existence et la valeur de la limite de la suite u.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}$.
7. Ecrire un programme en python permettant d'obtenir une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{a}$ à 10^{-4}près .

1.Posons $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Comme $a > 0, f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Or, $u_0 = k \geq 1$. Donc, $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Et par conséquent, $\forall n, u_n$existe et $u_n \in \mathbb{R}^{+*}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}(x^2 - a) = \frac{1}{2x^2}(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.

Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) - 1 = \frac{-1}{2x^2}(x^2 + a) < 0$. g est donc strictement décroissante et s 'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Or $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \Leftrightarrow \frac{a}{2x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\, x>0} x = \sqrt{a}$ (**). Donc, g s'annule en $\sqrt{a}$ et uniquement en $\sqrt{a}$. D'où le tableau :

x	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\sqrt{a}$	↗ $+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

J'en déduis que , $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset [\sqrt{a}, +\infty[$.

Et par conséquent, $\forall n \geq 1, u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$. De plus,

$\forall x \in [\sqrt{a}, +\infty[, g(x) \leq 0$ donc $\forall n \geq 1, g(u_n) = u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Donc, la suite u est décroissante à partir du rang 1.

3. Comme u est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, u admet une limite finie supérieur à $\sqrt{a}$. Comme f est continue sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, la limite de u est un point fixe de f dans $[\sqrt{a}, +\infty[$. Or, d'après (**), f admet en $\sqrt{a}$ comme unique point fixe dans $[\sqrt{a}, +\infty[$. Ainsi, u converge vers $\sqrt{a}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}u_n\right) = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$.

Donc, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{u_n}\right| |u_n - \sqrt{a}|^2$. De plus, $u_n \geq \sqrt{a} > 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > 0$. Ainsi, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|u_n - \sqrt{a}|^2$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, notons\ H(n)$: $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n-1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$.

Init : $|u_0 - \sqrt{2}| = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^0 |u_0 - \sqrt{2}| = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^0} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$.

Propag : Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $H(n)$ vraie. On sait donc que $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n-1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$. Alors,

$|u_n - \sqrt{2}|^2 \leq \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n-1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}\right]^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2\times(2^n-1)} |u_0 - \sqrt{a}|^{2\times 2^n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{(2^{n+1}-2)} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^{n+1}}$ et

$\frac{1}{2\sqrt{a}}|u_n - \sqrt{2}|^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{(2^{n+1}-2)} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{(2^{n+1}-1)} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^{n+1}}$.

Alors, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|u_n - \sqrt{a}|^2 \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{(2^{n+1}-1)} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^{n+1}}$. OK !!

CCL : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n-1} |u_0 - \sqrt{a}|^{2^n}$.

6. $k^2 \leq a < (k+1)^2$ donc $k \leq \sqrt{a} < (k+1)$ *et* par conséquent, $k = \lfloor\sqrt{a}\rfloor$. Donc $|u_0 - \sqrt{a}| < 1$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n-1}$. De plus, $a \geq 1$ donc $\sqrt{a} \geq 1$ *et* $\frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{2}$. J'en déduis que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}$.

7. Un premier programme permettant de trouver la valeur de l'entier k :

```
def trouvek(a) :
    k = 1
    while (k + 1)^2 <= a :
        k = k + 1
    return(k)
```

Un second programme permettant de trouver une valeur de $\sqrt{a}$ à 10^{-4} près:

```
def approx(a):
    u = trouvek(a)
    n = 0
    while 1/(2 ** ((2 ** n) - 1)) > (1/10000) :
        u = 1/2 * (u + a/u)
        n = n + 1
    print (u)
```

EXERCICE 3

On définit la suite (x_n) par : pour tout entier naturel n , x_n est l'unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation : $t+\ln(t)=n$ d' inconnue $t\in\mathbb{R}^{*+}$.

a. Justifier que $\forall n, x_n$ est bien défini. Représenter (illustrer) la suite (x_n) .
b. Etudier la monotonie et la limite de la suite (x_n).
c. Montrer que $x_n = n-\ln(n)+\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
d. Montrer que $\varphi: (t\mapsto t+\ln(t))$ est bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$.
e. Montrer que $\varphi^{-1}(t)=t-\ln(t)+\frac{\ln(t)}{t}+o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$.
f. Retrouver alors le développement asymptotique la suite (x_n) obtenue à la question c.

a. Soit n un entier naturel.

Posons $\varphi_n(t)=t+\ln(t)-n$. φ_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\forall t>0, \varphi'(t)=1+\frac{1}{t}>0$. Donc φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$. De plus, $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_n(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_n(t)=+\infty$. Alors le corollaire du TVI assure que φ_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}^{*+}$. On note $x_n$cette unique racine de φ_n . Alors, x_n est l'unique réel vérifiant : $x_n>0\ et \varphi_n(x_n)=0\ i.e. x_n+\ln(x_n)=n$.

b. Soit n un entier naturel.

$\varphi_n(x_{n+1})=x_{n+1}+\ln(x_{n+1})-n=n+1-n=1>0=\varphi_n(x_n)$.

Comme φ_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, $x_{n+1}>x_n$. Ainsi, (x_n) est strictement croissante. Par conséquent, (x_n) admet une limite L et $L>0$.

Imaginons un instant que L soit finie. Alors comme $L>0$, ln est continue en L et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n+\ln(x_n)=L+\ln(L)\in\mathbb{R}$. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n+\ln(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$. Une suite ne pouvant avoir deux limites, L ne peut pas être finie. Ainsi, $L=+\infty$.

c. Développement asymptotique de x_n:

- Cherchons un équivalent de x_n: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty\ et \ln(t)=o_{+\infty}(t)$ donc $\ln(x_n)=o_{+\infty}(x_n)$ et $x_n+\ln(x_n)\sim_{+\infty}x_n$. Donc, $n\sim_{+\infty}x_n$.
- Cherchons un équivalent de $y_n=x_n-n$. Alors comme, $n\sim_{+\infty}x_n$, $x_n= n+o_{+\infty}(n)$ et y_n=$o_{+\infty}(n)$ et

$$n=x_n+\ln(x_n)=y_n+n+\ln(y_n+n)=y_n+n+\ln\left(n\left(1+\frac{y_n}{n}\right)\right)=y_n+n+\ln(n)+\ln\left(1+\frac{y_n}{n}\right).$$

Donc $y_n=-\ln(n)-\ln\left(1+\frac{y_n}{n}\right)\underbrace{=}_{\substack{car\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{y_n}{n}=0\\ donc\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+\frac{y_n}{n})=0}}-\ln(n)+o_{+\infty}(1)\underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car\ \lim\limits_{n\to+\infty} o_{+\infty}(1)=0\\ alors\ que\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty}}-\ln(n)$.

Ainsi, $y_n\sim_{+\infty}\ln(n)$. Et $x_n=n-\ln(n)+o_{+\infty}(1)$

- Cherchons un équivalent de $z_n=x_n-n+\ln(n)$. Alors $z_n=o_{+\infty}(1)$ et

$$n=x_n+\ln(x_n)=z_n+n-\ln(n)+\ln(z_n+n-\ln(n))=z_n+n-\ln(n)+\ln(n)+\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{o_{+\infty}(1)}{n}\right).$$

Donc, $z_n=-\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{o_{+\infty}(1)}{n}\right)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{o_{+\infty}(1)}{n}=0$ et $\ln(1+t)\sim_0 t$. Donc, $\ln\left(1-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{o_{+\infty}(1)}{n}\right)\sim_{+\infty}-\frac{\ln(n)}{n}+\frac{o_{+\infty}(1)}{n}\sim_{+\infty}-\frac{\ln(n)}{n}$. Par suite, $z_n\sim_{+\infty}\frac{\ln(n)}{n}$.

Ainsi, $x_n=n-\ln(n)-\frac{\ln(n)}{n}+o_{+\infty}\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

d. $\varphi: (t\mapsto t+\ln(t))$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme somme de deux telles fonctions. Donc le TBCSM assure que f est bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $]\lim\limits_0 f, \lim\limits_{+\infty} f[=\mathbb{R}$.

e. Déterminons son développement asymptotique de φ^{-1} :

- Cherchons un équivalent de $\varphi^{-1}(t)$:

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi^{-1}(t)=+\infty$. De plus, $\forall t>0, t=\varphi(\varphi^{-1}(t))=\varphi^{-1}(t)+\ln(\varphi^{-1}(t))$.

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi^{-1}(t)=+\infty$ et $ln(x)=o_{+\infty}(x)$, $\ln(\varphi^{-1}(t))=o_{+\infty}(\varphi^{-1}(t))$. Par suite, $t=\varphi^{-1}(t)+o_{+\infty}(\varphi^{-1}(t))\sim_{+\infty}\varphi^{-1}(t)$.

- Cherchons un équivalent de $y(t)=\varphi^{-1}(t)-t$. Alors $y(t)=o_{+\infty}(t)\ et$

$t=\varphi^{-1}(t)+\ln(\varphi^{-1}(t))=y(t)+t+\ln(t+y(t))=y(t)+t+\ln(t+y(t))$.

Donc, $0=y(t)+\ln(t+o_{+\infty}(t))$. Donc $y(t)$=$-\ln(t+o_{+\infty}(t))=-\ln(t)-\ln(1+o_{+\infty}(1))\underbrace{=}_{car\ \lim\limits_{t\to+\infty}\ln(1+o_{+\infty}(1))=0}-\ln(t)+o_{+\infty}(1)$

Donc, $\underbrace{y(t) \sim_{+\infty}}_{\substack{car \\ \lim_{t\to+\infty} -\ln(t)=-\infty \\ et\ \lim_{t\to+\infty} \ln(1+o_{+\infty}(1))=0}} - \ln(t)$. et $\varphi^{-1}(t) = t - \ln(t) + o_{+\infty}(1)$.

- Cherchons un équivalent de $z(t) = \varphi^{-1}(t) - t + \ln(t)$. Alors, $z(t) = o_{+\infty}(1)$ .Donc,

$t = \varphi^{-1}(t) + \ln\left(\varphi^{-1}(t)\right) = z(t) + t - \ln(t) + \ln(z(t) + t - \ln(t)) = z(t) + t - \ln(t) + \ln(\mathrm{t}) + \ln\left(\left(1 - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{o_{+\infty}(1)}{t}\right)\right.$.

Donc, $z(t) = -\ln\left(1 - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{o_{+\infty}(1)}{t}\right) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car \\ \ln(1+x)\sim_0 x \\ et \\ \lim_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{t}+\frac{o_{+\infty}(1)}{t}=0}} -\left[-\frac{\ln(t)}{t} + \frac{o_{+\infty}(1)}{t}\right] \sim_{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}$. Par suite, $z(t) = \frac{\ln(t)}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$.

Et ainsi, $\varphi^{-1}(t) = t - \ln(t) + \frac{\ln(t)}{t} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$.

f. $\forall n, \varphi(x_n) = n\ et\ \ x_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc, $x_n = \varphi^{-1}(n)$. Alors comme $n \to +\infty$, $x_n = \varphi^{-1}(n) = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.