Programme de colle 18

Chap12 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle.

I Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

1. Théorème de condition nécessaire d'extremum.

Si I est un intervalle et a est un réel intérieur à I et $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

2. Théorème de Rolle.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3. Théorèmes d'égalité et d'inégalités des accroissements finis.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (EAF)
Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

4. Théorème « monotonie et signe de la dérivée ».

Si f est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I alors
f est croissante sur l'intervalle I sietssi f' est positive sur l'intérieur de I .
f est décroissante sur l'intervalle I sietssi f' est négative sur l'intérieur de I .
f est constante sur l'intervalle I sietssi f' est nulle sur l'intérieur de I .

5. Théorème de critère de dérivabilité.

Si a est un élément de l' intervalle I et est continue en a et dérivable au moins sur $I \backslash \{a\}$ et $\lim_{x \to a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$.
Si a est un élément de l' intervalle I et f est continue en a et dérivable au moins sur $I \backslash \{a\}$ et $\lim_{x \to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f' est continue en a.

6. Théorème de critère de classe C^n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si a est un élément de l' intervalle I et f est continue en a et de classe C^n au moins sur $I \backslash \{a\}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], \lim_{x \to a} f^{(k)}(x) = L_k \in \mathbb{R}$
alors f *est* de classe C^n sur I et $\forall k \in [\![1, n]\!], f^{(k)}(a) = L_k$.

II Formule de Taylor-Lagrange

1. Inégalité de Taylor Lagrange.

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ alors $\forall (a, b) \in I^2$, $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
Csq : Si f est de classe C^∞ sur l'intervalle I et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel M_n tel que : $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M_n$ alors
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (a, b) \in I^2$, $\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M_n \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. Application : pour tout réel x, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

III Fonction convexe

1. Définition d'une fonction convexe/concave

f est convexe sur l'intervalle I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
f est concave sur l'intervalle I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

2. Caractérisation d'une fonction convexe (sans hypothèse de dérivabilité) . Inégalité vérifiée par une fonction convexe

f est convexe sur l'intervalle I sietssi $\forall a \in I, \tau_a: \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.
Csq : si f est convexe sur l'intervalle I alors $\forall (a, b, c) \in I^3, (a < b < c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c})$

3. Régularité d'une fonction convexe

Si f est convexe sur l'intervalle I alors f est continue en tout point intérieur à I et est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I.

4. Caractérisations d'une fonction convexe dérivable

Ici f est dérivable sur l'intervalle I. f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** f'est croissante sur I **sietssi** $\forall (a, x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

5. Caractérisation d'une fonction convexe deux fois dérivable

Ici f est deux fois dérivable sur l'intervalle I. f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** $f'' \geq 0$ sur I .

Chap13 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par morceaux).

I Définitions

1. Définition d'une subdivision , d'une fonction en escalier, de l'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment.

Une subdivision de $[a, b]$ est une famille de réels $(a_k)_{k=0..n}$ *tels que* $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
Une fonction en escalier sur $[a, b]$ est une application e de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a, b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], e_{/]a_k, a_{k+1}[}$est constante. Si $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, e_{/]a_k, a_{k+1}[}(x) = \lambda_k$ alors par définition$\int_{[a,b]} e(x)dx = \int_a^b e(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (a_{k+1} - a_k)$. Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à e.

2. Théorème (admis) -définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue et réelle sur ce segment.

Si f est continue et réelle sur le segment $[a, b]$ alors

- il existe une suite (e_n) de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que $sup_{[a,b]}|f - e_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $(**)$ et $\left(\int_a^b e_n(x)dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$converge vers un réel L
- Si (e_n) est une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $(**)$ alors $\left(\int_a^b e_n(x)dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$converge aussi vers ce même réel L.
- Par définition, $\int_a^b f(x)dx = L$

3. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction complexe

Si f est continue et complexe sur le segment $[a, b]$ alors$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b Re(f(x))dx + i \int_a^b Im(f(x))dx$.

4. Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux sur ce segment.

Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ est une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a, b]$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_k = f_{/]a_k, a_{k+1}[}$est continue *sur* $]a_k, a_{k+1}[$ et admet une limite finie à droite a_k en et une limite finie à gauche en a_{k+1}. Alors par définition$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \widetilde{f_k}(x)dx$). Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à f.

5. Définition de l'intégrale entre des bornes non croissantes .

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors par définition, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Csq : Si f est continue par morceaux sur un intervalle I alors $\forall(a,b) \in I^2, \int_b^a f(x)dx$ existe.

II Propriétés déjà rencontrées

1. Relation de Chasles

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(a,b,c) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

2. Linéarité

Si f et g sont continues (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall(a,b) \in I^2, \int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.

3. Positivité

Si f est réelle, continue (par mcx) et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

4. Croissance

Si f et g sont réelles, continues (par mcx) et $\forall t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

III Inégalité triangulaire

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(a,b) \in I^2, \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|dt\right|$

IV Primitive

1. Théorème fondamental de l'intégration TFI et sa conséquence

$\boldsymbol{TFI}$: Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ alors $(x \mapsto \int_a^x f(t)dt)$ est une primitive de f sur I et est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a

Csq : Si f est **continue** sur un intervalle I alors f admet une primitive sur I.

2. Théorème fondamental de calcul d'une intégrale $TFCI$

Si f est **continue** sur l'intervalle I alors pour toute primitive F de f sur I , $\forall(a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\triangleq} [F(t)]_a^b$.

3. Lien entre f et f'

Si f est **de classe C^1** sur l'intervalle I et $a \in I$ alors $\forall x \in I^2, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

4. Théorème d'intégration par parties

Si f *et* g sont **de classe C^1** sur l'intervalle I alors $\forall(a,b) \in I^2$ $\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$.

5. Théorème de changement de variable

Si φ est de classe C^1 sur l'intervalle I et f est continue sur $\varphi(I)$ alors $\forall(a,b) \in I^2, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

V Lemme d'annulation

1. Lemme d'annulation

Si f est **réelle, continue et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $\forall x \in [a,b], f(x) = 0$.

2. Sa contraposée

Si f est **continue** , **réelle et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\exists x \in [a,b], f(x) \neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

VI Moyenne d'une fonction continue sur un segment

1. Définition

Lorsque f est continue (par mcx) sur $[a,b]$, la moyenne de f entre a et b *est* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \left(= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt\right)$.

2. Inégalités de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$, alors $min_{[a,b]}f \leq \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt \leq max_{[a,b]}f$.

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I et bornée sur I alors $\forall(a,b) \in I^2, \left|\int_b^a f(t)dt\right| \leq sup_I|f||b-a|$.

3. Egalité de la moyenne

Si f est **continue et réelle** sur $[a,b]$ alors $\exists c \in [a,b], f(c) = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt$.

VII Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g sont **continues et réelles** sur $[a,b]$, alors $\left(\int_b^a f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_b^a f(t)^2dt\right)\left(\int_b^a g(t)^2dt\right)$.

VIII Somme de Riemann

Si f est **continue** sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$. **Cas particulier :** Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$.

QUESTIONS DE COURS : Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.
Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

Q1 : Condition nécessaire d'extremum et théorème de Rolle
Q2 : Egalité des accroissements finis et son application au critère de dérivabilité
Q3 : Théorème fondamental de l'intégration
Q4 : Lemme d'annulation
Q5 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
Q6 : Théorème des Sommes de Riemann dans le cas d'une fonction lipschitzienne.