Propriétés fondamentales de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

I. Définition officielle

1 **Définition** : Soit a et b deux rées tq $a < b$ et φ une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Si φ est constante égale à λ sur $]a, b[$ alors par définition, $\int_{[a,b]} f = \lambda(b-a)$ $(= \int_a^b f(t)dt)$.

2) Une **subdivision de** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ est une famille $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ d'éléments de $[a, b]$ telle que: $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.

3) La fonction φ est **en escalier** sur le segment $[a, b]$ lorsqu' il existe une subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que sur chaque $]a_k, a_{k+1}[$, φ est constante. Dans ce cas, la subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est dite adaptée à φ. Si $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \varphi(x) = \lambda_k$ (i.e φ est constante égale à λ_k sur $]a_k, a_{k+1}[$), alors $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(a_{k+1} - a_k)$ $(= \int_a^b \varphi(t)dt)$.

2 **Théorème et définition admis :** Soit f une fonction réelle et continue sur le segment $[a, b]$.

Pour tout réel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier e_n telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\forall x \in [a, b], 0 \leq |f(x) - e_n(x)| \leq \frac{1}{n}\right]^{(**)}$

Pour toutes les suites de fonctions en escalier $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $(**)$, les suites $\left(\int_{[a,b]} e_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes une **même** limite finie et par définition, $\int_{[a,b]} f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} e_n(t)dt$.

Autrement dit, pour toutes les suites de fonctions en escalier (e_n) qui vérifient $(**)$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt \overset{def}{\triangleq} \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} e_n(t)dt.$$

La fonction que l'on intègre s'appelle **l'intégrande**.

3 **Conséquence :** . L'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ est l'aire algébrique $^{(*)}$de la surface délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses , les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Cette aire est notée $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_{[a,b]} f$.

4 **NB** : 1)L'aire géométrique de la même surface est $\int_a^b |f(t)|dt$.

2)L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de t , $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend que de l'expression de f , de a et de b. La variable t est dite muette, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\theta)d\theta$.

5 Plus généralement, si f est réelle et continue sur le segment $[a, b]$ alors il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui vérifie $[\sup\{|e_n(x) - f(x)|/x \in [a, b]\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0](**)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} e_n(t)dt$ existe est finie et ne dépend pas de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie vérifiant $(**)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} e_n(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt$.

6 **Définition** : Soit a et b deux réels. L'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a, b]$ est $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b Re(f)(t)dt + i \int_a^b Im(f)(t)dt$. Alors $Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(f)(t)dt$ et $Im\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Im(f)(t)dt$

7 **Définition :** Une fonction f est **continue** sur $]a, b]$ et prolongeable par continuité en a alors $\int_{[a,b]} f(t)dt \overset{def}{\triangleq} \int_{[a,b]} \tilde{f}(t)dt$

8 **Définition :** Une fonction φ est **continue par morceaux** (« par mcx ») sur le segment $[a, b]$ lorsque il existe une subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que : sur chaque $]a_k, a_{k+1}[$ tq $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi = \varphi_k$ avec φ_k continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et ayant des limites finies en $a_k{}^+$ et à gauche en $a_{k+1}{}^-$. Dans ce cas, la subdivision $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est dite adaptée à φ. Et, par définition, $\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{\varphi}_k(x)dx$ où $\tilde{\varphi}_k$ est le prolongement par continuité de φ_k sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$.

9 **NB** : 1) les valeurs de $\varphi(a_k)$ n'ont aucune influence sur le calcul de $\int_{[a,b]} \varphi$.

2) on peut prouver que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie adaptée à φ. Autrement dit , quelle que soit la subdivision adaptée à la fonction φ **continue par morceaux** sur $[a, b]$, $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \tilde{\varphi}_k(x)dx$ vaut toujours le même réel $\int_{[a,b]} \varphi$.

10 **Par convention**, $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ pour tous a et b réels tels que $a < b$.

11 **Def** : f est continue par morceaux sur un intervalle I lorsque f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.
CONSEQUENCE : Si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans l'intervalle I et à valeurs réelles ou complexes alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $\int_a^b f(t)dt$ existe

12 **Exemple** : Justifier l'existence et calculer $I = \int_0^2 f(t)dt$ où $f(t) = \begin{cases} t\ln(t) \ si \ t \in]0,1] \\ \frac{1}{t^2+2t+4} \ si \ t \in]1,\frac{3}{2}] \\ \frac{t}{t^2+7t+6} \ si \ t \in]\frac{3}{2},2] \end{cases}$

II. Rappel des premières propriétés déjà rencontrées.

13 **Théorème Relation de Chasles** : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a, b, c trois réels de I.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

(Valable si f est complexe et/ou continue par morceaux)

14 **Théorème Linéarité de l'opérateur intégral :** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Soit a, b deux réels de I . soit α et β deux constantes réelles ou complexes . $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

(Valable si f est complexe et/ou continue par morceaux)

15 **Théorème Positivité de l'opérateur intégral** : Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f est réelle et continue et positive sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \geq 0$. (valable si f continue par morceaux)

16 **Théorème Croissance de l'opérateur intégral :** Si a, b sont deux réels tels que $a < b$ et f *et* g sont réelles et continues sur $[a,b]$ et $\forall t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt = \int_{[a,b]} g(t)dt$

(valable si f *et* g continues par morceaux)

17 NB : L'ordre des bornes est important !!! Il doit un ordre CROISSANT !!

18 Méthode : Pour majorer (minorer ou encadrer) une intégrale , il suffit de majorer (minorer ou encadrer) la fonction sur le **segment d'intégration.** (rappel : pour encadrer une somme , il suffit d'encadrer chaque terme de la somme)

19 **Exemple :** Soit f une fonction réelle et continue sur $[0\,;1]$. $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \int_0^1 \underbrace{x^n f(x)}_{g(x)} dx$. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Existence : Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n existe car g est continue sur $[0\,;1]$ (car f et $(x \mapsto x^n)$ le sont).
Calcul de la limite : f est continue sur le segment [0 ;1] donc f est bornée sur [0 ; 1] : il existe m *et* M réels tels que :$\forall x \in [0\,;1], m \leq f(x) \leq M$. Alors, $\forall x \in [0;1], x^n \geq 0, et\ ainsi\ , mx^n \leq x^n f(x) \leq x^n M$. Alors, $\int_0^1 mx^n dx \leq \int_0^1 f(x)x^n dx \leq \int_0^1 Mx^n dx$ par croissance de l'opérateur intégral. Il s'en suit que : $m\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq M\int_0^1 x^n dx$. Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc,$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n+1} \leq u_n \leq \frac{M}{n+1}$. Ainsi, par encadrement, je peux conclure que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

III. Inégalité triangulaire

20 **Prop d' inégalité triangulaire intégrale:** Soit a *et* b deux réels tels que $a < b$.
Si f *est* continue (réelle ou cpxe) sur $[a,b]$ alors$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ i.e. $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

21 **NB** : l'ordre des bornes est important et doit être CROISSANT car $\left|\int_b^a f\right| \geq 0$ et $|f|$ positive sur le segment $[a,b]$ donc $\int_a^b |f| \geq 0$ *et* $\int_b^a |f| \leq 0$. L'inégalité est grossièrement fausse si les bornes sont inversées. Généralisation :

22 **Inégalité triangulaire intégrale bis :** Si f est continue sur l'intervalle I contenant c *et* d alors $\left|\int_c^d f(t)dt\right| \leq \left|\int_c^d |f(t)|dt\right|$.
Formule valable si $c \geq d$ et si f est complexe (admis) et/ou continue par morceaux

23 **Exemple**: Soit f une fonction complexe de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt = 0$.

f est dérivable donc continue sur $[a,b]$. Donc $Re(f)$ et $Im(f)$ sont réelles et continues sur le segment $[a,b]$. Elle sont donc bornées sur le segment $[a,b]$ et âr conséquent, f est aussi bornée sur[a ;b] : il existe $M \in \mathbb{R}^+ / \forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$. De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, g$: $\left(t \mapsto e^{i\lambda t} f(t)\right)$ est continue sur $[a,b]$ (puisque $\left(t \mapsto e^{i\lambda t}\right)$ *et* f sont continues sur $[a,b]$) donc $I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt$ *existe*.

Alors , $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |I(\lambda)| = \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt\right| \overset{IPP}{\triangleq} \left|\left[\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda i} f(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{i\lambda t}}{\lambda i} f'(t)\,dt\right| = \underbrace{\left|\frac{1}{\lambda i}\right|}_{\left|\frac{1}{\lambda}\right|} \left|\underbrace{e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a) - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)dt}_{\varphi(\lambda)}\right|$(**).

Or, $\left|e^{i\lambda b} f(b) - e^{i\lambda a} f(a) - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)dt\right| \overset{I.T\ dans\ \mathbb{C}}{\leqq} \left|e^{i\lambda b} f(b)\right| + \left|e^{i\lambda a} f(a)\right| + \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)dt\right|$.

De plus , $|e^{i\lambda b} f(b)| + |e^{i\lambda a} f(a)| = |e^{i\lambda b}||f(b)| + |e^{i\lambda a}||f(a)| = |f(b)| + |f(a)| \leq 2M$.

et $\left|\int_a^b e^{i\lambda t} f'(t)dt\right| \overset{I.T\ intégral}{\leq} \left|\int_a^b |e^{i\lambda t} f'(t)|dt\right| = \left|\int_a^b |e^{i\lambda t}||f'(t)|dt\right| = \underbrace{\left|\int_a^b |f'(t)|dt\right|}_{cste\ indépendante\ de\ \lambda}$. Donc, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\varphi(\lambda)| \leq 2M + \underbrace{\left|\int_a^b |f'(t)|dt\right|}_{cste\ indépendante\ de\ \lambda}$.

J'en déduis que la fonction $|\varphi|$ est bornée. Comme $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \left|\frac{1}{\lambda}\right| |\varphi(\lambda)| = 0$ et je conclus par (**) que: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt = 0$.

IV. Primitive

24 **Théorème fondamental :** Si f est **continue sur un intervalle** I et a est un élément de I alors F , l'application définie sur I par : $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est la primitive de f qui s'annule en a . (valable si f est complexe)

25 **Attention** : toutes les primitives de f n'ont pas cette forme … celles qui ne s'annulent pas n'ont pas cette forme . Par contre celle qui sont définies sur un intervalle et s'annulent en un point de cet intervalle ont cette forme .

26 **Conséquence fondamentale** : Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle et chacune de ces primitives est de classe C^1sur cet intervalle. (valable si f est complexe)

27 **Propriété :** Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I contenant a alors $\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.
(valable si f est complexe).

28 **Théorème :** Soit f continue sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$.
Pour toute primitive F de f sur I , on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{notation}{\triangleq} [F(t)]_a^b$. (valable si f est complexe).

29 **Théorème d'intégration par parties (IPP) :** Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I et $(a\,,b) \in I^2$. Alors,
$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$. (valable si u et v est complexe).

30 **Théorème de changement de variables (CV)** (valable si f est complexe):
Soit f une fonction continue sur un intervalle J et φ une fonction réelle de classe C^1 sur un intervalle I telles que : $\varphi(I) \subset J$.
Soit $(a\,,b) \in I^2$. Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

$$\boldsymbol{x = \varphi(t)}$$
$$\boldsymbol{dx = \varphi'(t)dt}$$
$$\boldsymbol{t = a \Rightarrow x = \varphi(a)}$$
$$\boldsymbol{t = b \Rightarrow x = \varphi(b)}$$

Application :

31
1. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire alors pour tout réel a, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique alors pour tous réels a et b , $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt$ et $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$

V. Lemme fondamental d'annulation

32 **Théorème ou lemme d'annulation**
Si f est réelle et **continue** et $\forall t \in [a,b], f(t) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

33 **Sa contraposée** : Si f est réelle et **continue** sur le segment $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$ et prend une valeur non nulle alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ est strictement positive.

VI. Moyenne d'une fonction continue sur un segment

34 **Théorème d'inégalités de la moyenne :**

1) Si f est réelle et **continue** sur le segment $[a,b]$ tq a,b *réels et* $a<b$ alors $min_{[a,b]}f \le \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \le max_{[a,b]}f$
2) Si f est continue sur l'intervalle I alors pour tous réels a et b de I, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le |b-a| sup_I |f|$.

35 **Théorème de l' égalité de la moyenne :** Si f est continue sur l'intervalle I alors pour tous réels a et b de I, il existe un élément x_0 compris entre a et b tel que : $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$.

36 **Définition :** $\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(t)dt\right)$ est appelée **la valeur moyenne de f entre a et b.**

37 **Exercice classique : Egalité de la moyenne généralisée** (**A SAVOIR DEMONTRER**)**:** Si f et g sont réelles et **continues** sur le segment $[a,b]$ et g est positive sur $[a,b]$ alors $\exists x_0 \in [a,b]\ tq$: $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(x_0)\int_a^b g(t)dt$ (encore valable si $a \ge b$; dans ce cas, $x_0 \in [b,a]$).

38 **Rque :** Si g n'est pas toute nulle, alors le réel $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$ est appelée **la moyenne** $\underbrace{\textbf{pondérée}}_{coefficientée}$ **par g de f entre a et b.**

VII. Inégalité de la Cauchy-Schwarz

39 **Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz :** Soit a et b réels tels que $a \le b$.
SI f *et* g sont réelles et continues sur $[a,b]$ alors $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f(t)^2dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2dt\right)$.

VIII. Sommes de Riemann-Approximation par la méthode des rectangles -

40 **Théorème** : Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})}_{\substack{une\ somme \\ de\ Riemann \\ associée\ à\ f sur\ [a,b]}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})}_{\substack{une\ AUTRE\ somme \\ de\ Riemann \\ associée\ à\ f sur\ [a,b]}}$$

41 **Cas particulier** : Si f une fonction continue sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

42 **Exemple :** Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4k^2}}$. Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

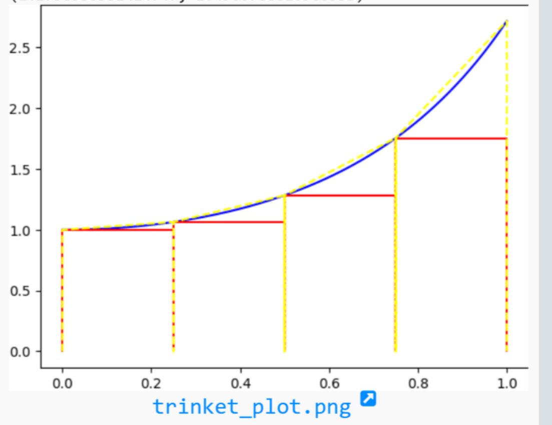
Alors $u_n = \frac{1}{\sqrt{5n^2}} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{1+4\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}n} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{v_n}$ où $f : (x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}})$. Or , f est continue sur $[0\,;1]$ donc d'après le théorème des sommes de Riemann ,

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(x)dx$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx$. De plus, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx \underset{\substack{t=2x \\ \frac{dt}{2}=dx \\ x=0\Leftrightarrow t=0 \\ x=1\Leftrightarrow t=2}}{\overset{CV}{=}} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. Ainsi,

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

```python
from pylab import *
import matplotlib.pyplot as pl
from math import*
#approchons l'intégrale sur [0,1] de la fonction f(t)=exp(t²)
#par la méthode des rectangles et celle des trapèzes.
#cette intégrale vaut 1,46265.
def Riemann(n):
  U=[k/(4**n) for k in range(4**n+1)]
  V=[exp(x**2) for x in U]
  plot(U,V,color='blue',)
  X=[]
  Y=[]
  Z=[]
  S=0
  T=0
  for i in range (n):
    X+=[i/n,i/n,(i+1)/n,(i+1)/n]
    Y+=[0,exp((i/n)**2),exp(((i)/n)**2),0]
    Z+=[0,exp((i/n)**2),exp(((i+1)/n)**2),0]
    S+=exp((i/n)**2)/n
    T+=(exp((i/n)**2)+exp(((i+1)/n)**2))/(2*n)
  plot(X,Y,color='red')
  plot(X,Z,'--',color='yellow')
  return(S,T)
print(Riemann(4))
show()
()
```

```
(1.2758936331414747, 1.4906788616988553)
```



IX. Formule de Taylor reste-intégral

43 **Théo Formule de Taylor avec reste intégral :** Si f est de classe C^{n+1} sur $l'intervalle\ I$ alors pour tous réels $a\ et\ x$ de I,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_{n,a,f}(x)\ \text{polynôme de Taylor en } a \text{ de rang } n \text{ de } f} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)du}_{R_{n,a,f}(x)\ \text{ou}\ R_n(x)\ \text{reste intégral de rang } n \text{ associé à } f \text{ entre } a \text{ et } x.}$$

i.e. $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)du}_{R_{n,a,x}(f)}$.

44 **NB :**

- $R_{n,a,x}(f) = (x-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{n!}f^{(n+1)}\big(at + x(1-t)\big)dt$ en effectuant le changement de variable : $u = at + x(1-t)\ u$.
- Il existe un reel c coincé entre $a\ et\ x$ tel que : $R_{n,a,b}(f) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ (il suffit d'appliquer l'égalité de la moyenne généralisée) . On obtient alors l'égalité de Taylor-Lagrange (ci-dessous).

Application à l'obtention d'inégalité : Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

L'exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc d'après la formule de Taylor reste-intégral , on peut dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-u)^2}{2!}e^u du$. Or $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in [0,x],\ 0 \leq \frac{(x-u)^2}{2!}e^u$ donc $0 \leq \int_0^x \frac{(x-u)^2}{2!}e^u\,du$. J' en déduis que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

X. Etude de fonctions de la forme: $\varphi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ où f continue sur un intervalle I.

45 Domaine de définition de φ : Considérons $D = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \in I\ et\ v(x) \in I\}$.
$\forall x \in D, u(x) \in I et\ v(x) \in I$, comme I est un intervalle, le segment d' extrémités $u(x)$ et $v(x)$ est inclus dans I et donc f est continue sur ce segment et par conséquent $\varphi(x)$ existe. Donc φ est au moins définie sur D . Si f est continue sur une réunion d'intervalles disjoints : $I_1 \cup I_2$, alors on fait le même travail sur chacun de ces intervalles, on trouve deux domaines $D_1\ et\ D_2$, et φ est au moins définie sur $D_1 \cup D_2$.

46 Continuité et dérivabilité de φ : Considérons une primitive F de f sur I (F existe puisque f est continue sur I) .
Alors $\forall x \in D, \varphi(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) = F \circ v(x) - F \circ u(x)$.
On sait que F est de classe C^1sur I et $u(D) \subset I\ et\ v(D) \subset I$. Donc si $u\ et\ v$ sont continues sur D alors φ est continue sur D.
Et si $u\ et\ v$ sont dérivables sur D alors φ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = v'(x)F'\big(v(x)\big) - u'(x)F'\big(u(x)\big) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

47 **Exemples :** 1) Posons $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ et $G(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2}dt$.

Domaine de définition : $f : (t \mapsto e^{t^2})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(x)\ et\ G(x)$existent . $D_F = D_G = \mathbb{R}$.
Etude de F : D'après le théorème fondamental, $\boxed{F \text{ est la primitive de } f \text{ qui s'annule en } 0}$.

- Donc, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = e^{-x^2}$. Par conséquent, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = -\int_{-x}^0 e^{-t^2}dt \underset{u=-t}{\overset{CV}{=}} -\int_x^0 e^{-u^2}(-1)du = -F(x)$. Donc F est impaire .
- F étant croissante , $\forall x \in [0;1], F(0) \leq F(x) \leq F(1) et\ \ \forall x > 1, F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt = F(1) + H(x)$. Or, $\forall t \in [1\,; x], -t^2 \leq -t\ donc, e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Donc par croissance de l'intégrale ,$H(x) = \int_1^x e^{-t^2}dt \leq \int_1^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_1^x = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{e}$ .Alors $\forall x > 1, F(1) \leq\ F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e}$. F est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ et par imparité sur $\mathbb{R}^-$aussi . Ainsi F est bornée.
- F étant croissante et bornée, F a une limite finie en $+\infty$ et une limite finie en $-\infty$ et par imparité ces deux limites sont opposées.

Etude de G $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = F(3x) - F(x)}$.

- Par conséquent, $G(-x) = F\big(3(-x)\big) - F(-x) = -G(x)$; donc G est impaire.
- De plus, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2} = 3e^{-x^2}\left(e^{-8x^2} - \frac{1}{3}\right)$.

  Alors,$G'(x) > 0$ $\boldsymbol{si\ et\ ssi}$ $e^{-8x^2} - \frac{1}{3} > 0$ $\boldsymbol{si\ et\ ssi}$ $-8x^2 > -\ln(3)$ $\boldsymbol{si\ et\ ssi}$ $x^2 < \frac{\ln(3)}{8}$ $\boldsymbol{si\ et\ ssi}$ $x \in \left]-\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}, \sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}\right[$.

Donc, G est strictement croissante sur $]-\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}},\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}[$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}},+\infty[$ et sur $]-\infty;-\sqrt{\frac{\ln(3)}{8}}[$

- Enfin, fixons $x>0$. pour tout $t\in[x,3x],-9x^2\leq -t^2\leq -x^2$. Donc, $e^{-9x^2}\leq e^{-t^2}\leq e^{-x^2}$.
  Alors , par croissance de l'intégrale , $\int_x^{3x}e^{-9x^2}dt\leq\int_x^{3x}e^{-t^2}dt\leq\int_x^{3x}e^{-x^2}dt$ **Ie .** $2xe^{-9x^2}\leq G(x)\leq 2xe^{-x^2}$.
  Or , $\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt{t}e^{-t}\overset{CC}{=}0$ donc par composition , $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}e^{-x^2}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}e^{-9x^2}$.Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$.

1) Soit $f:\left(x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt\right)$. Calculons les limites de f aux bords de son domaine de définition.

<u>Domaine de définition</u> : $Soit\ g:\left(t\mapsto\frac{1}{\ln(t)}\right).Dg=]0,1[\cup]1,+\infty[$ et g est continue sur Dg.

$Soit\ x\in]0,1[$. Alors $x^2\in]0,1[\ et\ x^2<x\ donc$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Ainsi, g est continue sur $[x^2,x]$ et $f(x)$ existe .

$Soit\ x\in]1,+\infty[$. Alors $x^2\in]1,+\infty[\ et\ x<x^2\ donc,[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Ainsi, g est continue sur $[x^2,x]$ et $f(x)$ existe. Ainsi, $Df=Dg$.

<u>Limites aux bords de son domaine de définition.</u>

<u>En 0 ?</u> Soit $x\in]0,1[$. Alors $\forall t\in[x^2,x],\ln(x^2)\leq\ln(t)\leq\ln(x)<0\ donc,\frac{1}{\ln(x)}\leq\frac{1}{\ln(t)}\leq\frac{1}{\ln(x^2)}<0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln(x)}dt\leq\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln(t)}dt\leq\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln(x^2)}dt<0$.

Ainsi, $\forall x\in]0,1[,\ \frac{x-x^2}{\ln(x)}\leq -f(x)\leq\frac{x-x^2}{2\ln(x)}<0$. Or, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{\ln(x)}=0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

Mais, $\frac{x-x^2}{\ln(x)}=x\frac{(1-x)}{\ln(x)}=\frac{-x}{\frac{\ln(x)}{x-1}}.Donc\ ,\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^2}{\ln(x)}=-1\ et\ alors\ \lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^2}{2\ln(x)}=-\frac{1}{2}$. Donc cet encadrement ne permet pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

<u>En $+\infty$?</u> Soit $x\in]1,+\infty[$. Alors $\forall t\in[x,x^2],0<\ln(x)\leq\ln(t)\leq\ln(x^2)\ donc,\frac{1}{\ln(x)}\geq\frac{1}{\ln(t)}\geq\frac{1}{\ln(x^2)}>0$ et par croissance de l'opérateur intégral $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x)}dt\geq\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt\geq\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(x^2)}dt>0$. Ainsi, $\forall x\in]1,+\infty[,\frac{x^2-x}{\ln(x)}\geq f(x)\geq\frac{x^2-x}{2\ln(x)}>0$. Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)}=\frac{x^2}{\ln(x)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}\right)$. Et grâce aux croissances comparées , $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{2\ln(x)}=+\infty$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Mais ce deuxième encadrement ne permet toujours pas de conclure sur la limite de f en 1^-.

<u>En 1 ?</u> Soit $x\in]1,+\infty[$ et $t\in[x,x^2]$.la fonction ln est continue et dérivable sur $[1,t]$. Alors d'après l'EAF , $\exists c_{(t)}\in]1,t[$ tel que : $\frac{\ln(t)-ln(1)}{t-1}=ln'(c)=\frac{1}{c}$. Or , $c\in]1,x^2[\ donc\ ,\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{c}\leq 1\ et\ alors,0<\frac{1}{x^2}\leq\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1}=\frac{\ln(t)}{t-1}\leq 1$.

Alors, $\forall t\in[x,x^2],0<\frac{1}{t-1}\leq\frac{1}{\ln(t)}\leq\frac{x^2}{t-1}$. Donc par croissance de l'opérateur intégral, $\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}dt\leq f(x)\leq\int_x^{x^2}\frac{x^2}{t-1}dt$

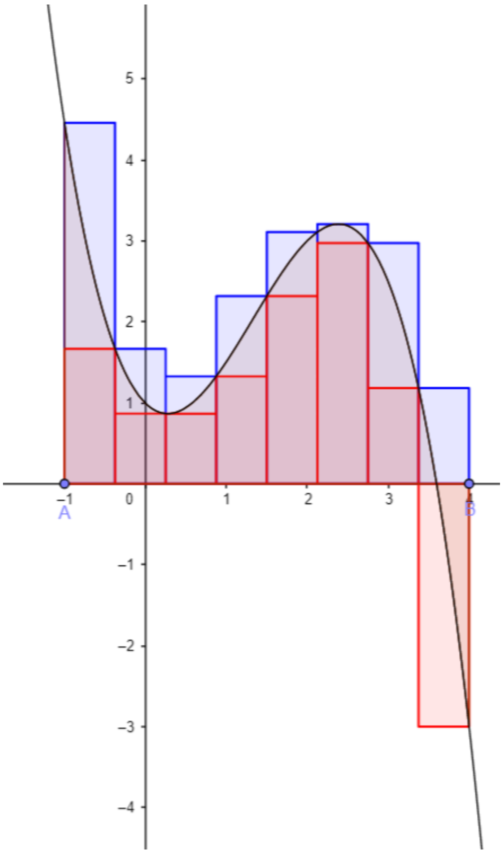
i.e. $[ln|t-1|]_x^{x^2}\leq f(x)\leq x^2[ln|t-1|]_x^{x^2}$ i.e. $ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|\leq f(x)\leq x^2ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|$. Alors $\forall x\in]1,+\infty[,ln|x+1|\leq f(x)\leq x^2ln|x+1|$. Or , $\lim\limits_{x\to1^+}ln|x+1|=\ln(2)=\lim\limits_{x\to1^+}x^2ln|x+1|$.Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\ln(2)$. Idem en 1^- : il faut travailler avec $x\in]0,1[\ et\ t\in[x^2,x]\subset[x^2,1]$ et intégrer entre x^2et x ,on obtient $\int_{x^2}^{x}\frac{1}{t-1}dt\leq -f(x)\leq\int_{x^2}^{x}\frac{x^2}{t-1}dt$ et finalement $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\ln(2)$.

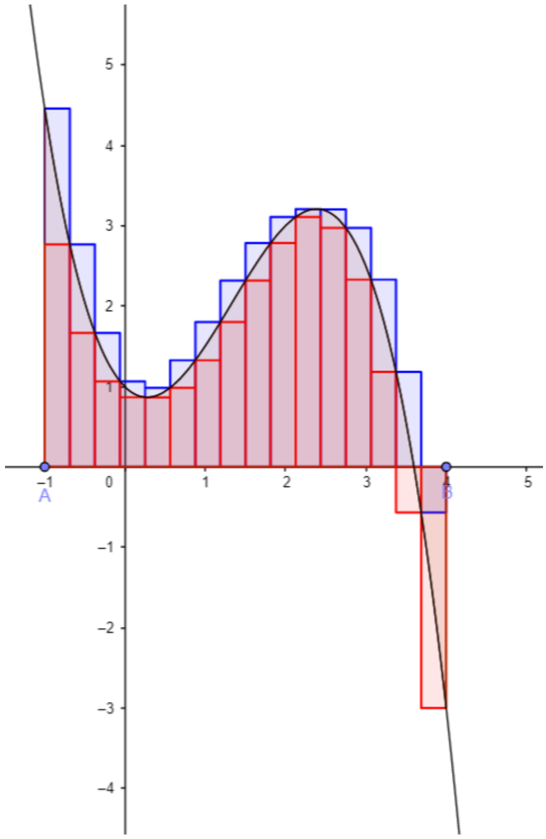
METHODES DE RESOLUTION D'EXERCICES D'INTEGRATION

Etude de la fonction f définie par : $f(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}g(t)dt$	
Domaine de définition de f	• Chercher le domaine de définition de g . • Chercher le domaine D de continuité (ou de prolongement par continuité possible) de g. • Chercher l'ensemble D' les réels x tels que tout l'intervalle d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$ soit inclus dans D. f est alors définie sur D' (au moins : vous verrez l'an prochain comment étendre ce domaine) .
Parité de f	• Je regarde si D' est centré en 0 • Si oui , je calcule $f(-x)=\int_{u(-x)}^{v(-x)}g(t)dt$ .Si $u\ et\ v$ sont paires alors f est paire . sinon, il est souvent utile de faire le changement de variable $u=-t$.
Périodicité de f	• Je regarde si D' est périodique de périodique T • Si oui , je calcule $f(x+T)=\int_{u(x+T)}^{v(x+T)}g(t)dt$. Si $u\ et\ v$ sont T-périodiques alors f l'est aussi. Sinon, il est souvent utile de faire le changement de variable $u=t-T$.
Signe de f	**Le signe de f :**

	• Fixer x dans D' . **si g est de signe constant** sur tout l'intervalle d'extrémités $u(x)$ et $v(x)$alors par positivité de l'intégrale (attention les bornes doivent être croissantes : le signe de $v(x) - u(x)$ dépend parfois de x), j'obtiens le signe de $f(x)$. • Sinon , **l'étude des variations** pourra donner son signe **.**
$Continuité\ et\ Dérivation\ \ de\ f$	Introduire une **primitive G de g** sur D . • Ecrire f en fonction de G : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D'}, \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{G(v(x))} - \boldsymbol{G(u(x))} = (\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x})$.(**) • Justifier la continuité de f grâce à la continuité de u , $v\ et\ G$. • Justifier la dérivabilité de f grâce à la dérivabilité de u , $v\ et\ G$. • Déterminer la dérivée de $f$grâce à (**) . Attention ,il y a des **fonctions composées** : $f'(x) = v(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x))$ $f'(x) = v'(x)g(v(x)) - u'(x)g(u(x))$.
$Variations\ de\ f$	**En revenant à la définition de la monotonie** Soit x, y deux éléments de D' tels que $x < y$. Etudier le signe de $f(x) - f(y)$. **Par dérivation :** • Justifier la dérivabilité de f et calculer f' (Cf paragraphe précédent) • Etudier le signe de f'.
$Limite\ de\ f au\ bord\ a\ de\ D'$	**Par encadrement :** le but est d'encadrer $f(x)$ par deux fonctions de même limite en a. • Fixer x dans D' . Pour t compris entre $u(x)$ et $v(x)$,encadrer $g(t)$. • « Intégrer » cet encadrement entre les bornes $u(x)\ et\ v(x)$ **croissantes** en utilisant la croissance de l'intégrale . • Calculer les intégrales qui encadrent . • Conclure en faisant tendre $x\ vers\ a$. Parfois , l'encadrement prouve simplement que f est **bornée** ou majorée ou minorée . Si f est minorée et décroissante (resp. croissante)alors f admet une limite finie au bord supérieur (resp. inférieur) de D' (…). On peut ainsi **justifier l'existence d'une limite sans déterminer la valeur de cette limite.**
Etude de la suite I définie par : $I_n = \int_a^b g_n(t)dt$ (où $n \in \mathbb{N}$).	
$Existence\ de\ I_n$	• Chercher le domaine de définition de g_n . • Chercher le domaine D de continuité de g_n. • Vérifier que le segment d'extrémités $a\ et\ b$ est inclus dans D .
$Variation\ de\ la\ suite\ (I_n)$	Le but est d'étudier le signe de $I_{n+1} - I_n$: • Ecrire $I_{n+1} - I_n = \int_a^b g_{n+1}(t) - g_n(t)dt$ en utilisant la linéarité de l'intégrale • Etudier le signe de $g_{n+1}(t) - g_n(t)$ pour t compris entre a et . • Conclure en utilisant la propriété de positivité de l'intégrale entre les bornes $a\ et\ b$ **croissantes**.
$Convergence\ de\ la\ suite\ (I_n)$	Le but est souvent de montrer que $la\ suite\ (I_n)$ est minorée si elle est décroissante ou majorée si elle est décroissante. • Le signe de $la\ suite\ (I_n)$permet de démontrer que la suite est majorée ou minorée par 0. Pour connaitre ce signe , il suffit de connaitre le signe de $g_n(t)$ pour t compris entre $a\ et\ b$ et d'appliquer la positivité de l'intégrale. Plus généralement , • Minorer (ou majorer) $g_n(t)$ pour t compris entre $a\ et\ b$ par une CONSTANTE (indépendante de t) et d'appliquer la croissance de l'intégrale entre $a\ et\ b$ avec bornes croissantes.
$Limite\ de\ la\ suite\ (I_n)$	**Par encadrement ,** le but est d'encadrer I_n par deux suites de même limite quand n tend vers l'infini. • Fixer n .Pour tout t compris entre a et b ,encadrer $g_n(t)$. • « Intégrer » cet encadrement entre les bornes $a\ et\ b$ **croissantes** en utilisant la croissance de l'intégrale . • Calculer les intégrales qui encadrent . • Conclure en faisant tendre n vers l'infini . **Par intégration par parties** , en choisissant la fonction à intégrer et celle à dériver de sorte de faire apparaitre des suites de limite nulle ($par\ ex$: $\frac{1}{n}$) **En revenant à la définition de la convergence d'une suite (avec les $epsilon$Cf plus tard)**
Etude de la fonction f définie par : $f(x) = \int_a^b g(x,t)dt$	
$Domaine\ D\ de\ déf°\ de\ f$	• Chercher les réels x tels que $h: (t \mapsto g(x,t))$ soit continue (par mcx) sur $[a, b]$.
$Variations\ de\ f$	• Comparer $f(x)$ et $f(y)\ en\ comparant\ g(x,t)\ et\ g(y,t)$ à $t\ fixé$.

Limite de f	**Par encadrement .** **Par intégration par parties.** **En revenant à la définition de la limite d'une fonction (Cf plus tard).**





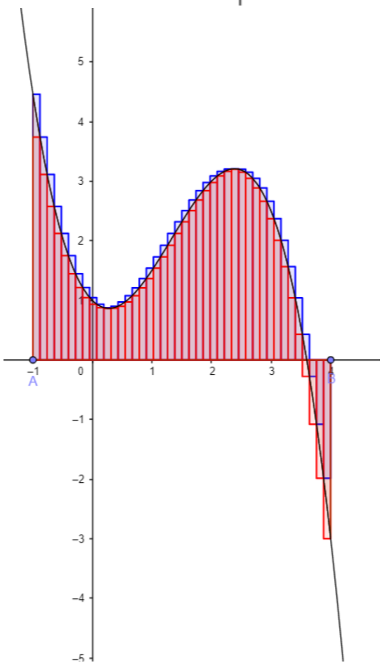


Illustration de la définition de l’intégrale d’une intégrale d’une fonction continue sur un segment et des sommes de Riemann.