TD 14
Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Ex 1 Trouver toutes les primitives de f sur I, intervalle où f est continue :

1) $f:(x \mapsto xArccos(x))$.
2) $f:\left(x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$.
3) $f:(x \mapsto tan^3(x))$.
4) $f:\left(x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}\right)$.
5) $f:(x \mapsto \sin(\ln(x)))$

Ex 2 Pêle-mêle

1) Soit f définie que [0,1] par : $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que pour toute fonction g continue sur [0,1] , $\int_0^1 g(f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx$.
2) Montrer que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$ alors pour tout réel $\alpha \in [-2,2]$, $\int_{[a,b]} f^2 - \alpha fg + g^2 \geq 0$. Etudier le cas d'égalité.
3) Soit $f \in C^0([0,1],[0,1])$ telle que :$\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$. Montrer que f est constante égale à 0 ou 1.
4) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et a un $réel$ tel que $f(a) > 0$. Justifier que : $\exists r > 0$ / $\int_a^{a+r} f(x)dx > 0$ et $\int_{a-r}^{a} f(x)dx > 0$.

Ex 3 Sommes de Riemann

1. Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de $u_n = \frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+..+\sqrt[n]{2^n}}{n}$, $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$, $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$, $r_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} ksin(\frac{k\pi}{n})$ et $x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$
2. Justifier que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
3. Soit $T_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Démontrer que : $\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{n+p} \leq T_n \leq \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+p}$.
   b. En déduire la limite de T_n quand $n \to +\infty$.
4. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots . + \frac{1}{2n}\right) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots . + \frac{1}{n})$.
   b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$. On reconnaitra une somme de Riemann .
   c. En déduire que la suite (S_{2n+1}) est aussi convergente et déterminer sa limite.
   d. Que peut-on en déduire sur la suite (S_n) ? Illustrer .
   e. Donner un exemple de suite (u_n) telle que (u_n) diverge tandis que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent .
   f. Compléter le théorème suivant : (u_n) a pour limite L ***si et ssi*** (u_{2n}) et (u_{2n+1}) … … … … . .
5. Soit f une fonction réelle et M-lipchitzienne sur [0,1] où $M \in \mathbb{R}^{+*}$. But :calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq k\leq l\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right)$.
   a. Justifier que f admet une unique primitive F sur [0,1] s'annulant en 0 et que les réels $\int_0^1 f(t)dt$, $\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\int_0^1 f(t)F(t)dt$ existent.
   b. Compléter $\frac{1}{n^2}\sum_{1\leq k\leq l\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac{l}{n}\right)\left[\frac{\cdots}{\cdots}\sum_{\cdots}^{\cdots} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$. On pose $\varepsilon_{l,n} = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] - \left[\int_0^{l/n} f(t)dt\right]$.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall l \in [\![1,n]\!], |\varepsilon_{l,n}| \leq \frac{M}{n}$. $(Cf$ preuve du théorème des sommes de Riemann) .
   d. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac{l}{n}\right)\varepsilon_{l,n} = 0$.
   e. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq k\leq l\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{l}{n}\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt$.

Ex 4 Suites d'intégrales

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}}dt$.
   a. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
   b. Etudier la monotonie et la convergence de (I_n). Trouver sa limite.
   c. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de (nI_n) grâce à une IPP. En déduire un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
   d. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et vérifier la cohérence avec les limites obtenues aux questions b et c
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$.
   a. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
   b. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
   c. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer la limite de I_n.

3. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2n+2}(t)dt$.
   1) Etudier le sens de variation de (I_n). En déduire que (I_n)est convergente.
   2) Calculer $I_n + I_{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de (I_n).
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$. Montrer que la suite u est convergente .

Soit $l = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite u.

5. Soit $\forall n, S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

a. Montrer que $(S_{2n}\ )\ et\ (S_{2n+1})$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

b. En remarquent que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

Ex 5 Théorique…

1. Soit f une fonction continue sur [0,2]. Objectif : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{n\int_0^1 \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)dx}_{u_n}$.
   a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$ existe et $u_n = n\left[\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\right]$.
   b. En utilisant une primitive de f, déterminer la limite de la suite u.
2. Soit f une fonction réelle et continue sur $[a,b]$. Montre qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.
3. Soit f une fonction continue sur [0,1] . Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x^n)\,dx = f(0)$. En déduire un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. (on pourra faire une I.P.P).

Ex 6 $\boldsymbol{Suite}$ $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha})_{n\geq 1}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

A.Convergence ou divergence $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha})_{n\geq 1}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite (Z_n) définie par : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$
2. Montrer que si $\alpha > 0$ alors pour tout entier naturel k non nul , $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.
   a. En déduire la limite et un équivalent de $(Z_n)\ quand\ \alpha \leq 1$.
   b. Montrer que la suite (Z_n) converge quand $\alpha > 1$.

B. Limite de $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})_{n\geq 1}$.

1. Justifier que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

2. Prouver que si f est une fonction de classe C^1sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

3. Montrer que : $\varphi: \left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & si\ t \in]0,\frac{\pi}{2}] \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on donnera une expression φ' .

4. Trouver une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0,\pi], h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.

6. En déduire que : $S_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u}{\pi} - 1\right)\varphi(u)\sin((2n+1)u)\,du - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$.

7. En déduire que $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Ex 7 A. Dérivation de fonctions définies par un intégrale .

1. Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt\right)$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer cette dérivée.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$.
3. Montrer que $f : \left(x \mapsto \int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt\right)$ est constante (par deux méthodes).

B. Limite d'une fonction définie par un intégrale .

4. Etude de la limite en 0 des fonctions $\left(x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt\right)$ et $\left(x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(2t)}{t} dt\right)$.
5. Soit f une fonction continue sur [0,1]. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

C. Etude de fonctions définies par un intégrale .

6. Soit f la fonction définie sur **R*** par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
   a. Montrer que f est impaire.
   b. Etudier les variations de f.
   c. Montrer que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \ et \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$et déterminer sa limite en 0 et sa limite en $+\infty$.
8. Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$.
   a. Déterminer $D_\Phi$et calculer $\Phi(0)$.
   b. Montrer que :$\forall x > 0, \frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq \Phi(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$ .En déduire la limite de Φ en $+\infty$ et la branche infinie $C_\Phi \ en + \infty$.
   c. Faites de même en $-\infty$.
   d. Etudier les variations de Φ et représenter son graphe.
9. Soit $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt.$
   a. Déterminer Df. Etudier la parité de f.
   b. Etudier la dérivabilité de f et donner une expression de $f'(x)$. Reconnaitre f.

Ex 8 Etude d'une primitive

Soit $f \ et \ I$ les fonctions définies par : $f(t) = \frac{Arctan(2t) - Arctan(t)}{t}$ et $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. Calculer $\lim_{t \to 0} f(t)$.
2. Montrer que I est définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $I'(x)$.

Dans la suite , on cherche à justifier l'existence et calculer $\lim_{x \to +\infty} I(x)$

3. Montrer que I est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Que peut -on en déduire sur $\lim_{x \to +\infty} I(x)$?
4. Montrer par IAF que $\forall x \geq 0, Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.
5. En déduire que I est majorée sur $\mathbb{R}^+$. Que peut -on en déduire sur $\lim_{x \to +\infty} I(x)$?
6. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\int_0^x f(t)dt = \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt.$
7. Prouver, par encadrement, que $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} ln(2).$
8. En déduire $\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

Ex 9 Etude de deux primitives

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, I(x) = \int_0^x \frac{1-cos(t)}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{sin(t)}{t} dt.$

1. Justifier que $I \ et \ J$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et donner une expression de $I'(x)$ et de $J'(x)$.
2. Démontrer que I a une limite finie L en $+\infty$.
3. Démontrer que $\forall (x, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, J(x) - J(\varepsilon) = \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + I(x) - I(\varepsilon)$. Pourquoi a -t-on introduit ε?
4. En déduire $J(x)$ en fonction de $I(x), \cos(x) \ et \ x$.
5. Conclure que : $J(x)$ tend aussi vers L quand $x \to +\infty$.

Ex 10 INTEGRALES DE WALLIS

A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose. $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre $W_n et \ W_{n-2}$.
2. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
3. Montrer que $nW_n W_{n-1}$ est indépendant de n et préciser sa valeur.
4. Montrer que la suite (W_n) est monotone et convergente.
5. Déterminer sa limite .
6. Remontrer que $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$ par une autre méthode.
7. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
8. En déduire que $\lim_{p \to +\infty} \frac{\sqrt{\pi p}}{4^p} \binom{2p}{p} = 1.$

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n$ existe et est finie.
2. Etablir une relation entre $J_n \ et \ J_{n+1}$.
3. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = W_{2n-1}$ et en déduire la limite de (J_n).

C . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Justifier que f_n est bien définie sur [0,1[.
   b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^-.
   c) Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .
   d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1^-.
2. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
   b) Trouver une relation entre f_n et f_{n-2}, pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
   c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)\, I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \geq 2$.
   d) Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = W_n$ par deux méthodes.

Ex 11 Inégalité de Cauchy-schwarz

A. Soit f une fonction de classe C^1 sur [0,1] à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.
   a) Soit $x \in [0,1]$ .Montrer que : $f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt$.
   b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)^2 dx$.
B. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.
   Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$.
C. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $\inf\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})\right\} = (b-a)^2$.

Ex 12 Une preuve de l'irrationnalité de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-\mathrm{t})^{\,n} e^t dt$.

a. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.
b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,!}$. On note $v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,!}$.
c. Démontrer que la suite v converge en croissant vers le réel e. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = e$.
d. Supposons un instant que e soit rationnel. Posons alors $e = \frac{m}{q}$ tel que m et q entiers naturels non nuls.
   a. Montrer que $q!\,(e - v_q) \in \mathbb{N}^*$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\ tq\ n > q$, $0 < q!\left(v_n - v_q\right) \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + .. + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$.
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\ tq\ n > q,\ \ 0 < q!\left(v_n - v_q\right) < \frac{1}{q}$.
   d. En déduire que $0 \leq q!\left(e - v_q\right) \leq \frac{1}{q}$.
   e. Conclure.

Ex 13 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$.

1. On pose $h(x) = f(x) + f'(x)$. f est donc solution de l'edl1 : $y' + y = h(x)$.
   Montrer qu'il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \geq 0, f(x) = e^{-x} \int_0^x h(t) e^t dt + c e^{-x}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.