POLYNÔMES À UNE İNDÉTERMİNÉE

Dans tout le chapitre, n , p , q , m , r et s désignent des entiers naturels et r et s non nuls .
K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de K sont encore et encore appelés des scalaires.

Introduction : A LIRE EN AUTONOMIE ...

- Soit f une fonction polynomiale réelle telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$

où p entier naturel et $a_0,.., a_p$ réels appelés coefficients de f (a_k étant le coefficient de rang k). Alors,
ou bien tous les a_k sont nuls et f est la fonction nulle et a pour degré $-\infty$.
ou bien l'un des a_k est non nul et le degré de f noté $deg(f)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
Deux fonctions polynomiales sont égales lorsqu'elles ont les mêmes coefficients.
Une racine réelle (resp. complexe) de f est un réel (resp complexe) α tel que $f(\alpha) = 0$. Lorsque α est racine de f, on peut factoriser $f(x)$ par $(x - \alpha)$.

- Soit f et g deux fonctions polynomiales telles que :

$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p = \sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_q t^q = \sum_{k=0}^{q} b_k t^k$ où p et q entiers naturels et $a_0,.., a_p, b_0,.., b_q$ réels avec $a_p et\ b_q$ non nuls. Donc $\deg(f) = p\ et\ \deg(g) = q$.
Quitte à ajouter des termes nuls dans l'expression de f ou celle de g, on peut écrire :
$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ et $g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$ où $m = max(p, q)$.
Alors,

$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \ldots + (a_m + b_m)t^m = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k)t^k$

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_2 b_2 + a_0 b_2)t^2 \ldots + (a_p b_q)t^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} c_k t^k$$

$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. De plus, $deg(f+g) \leq m = \max(p,q)$car je ne sais pas si $a_m + b_m = 0$ et $\deg(fg) = p + q\ car\ a_p b_q \neq 0$.

On va ci-dessous définir un ensemble plus abstrait et plus large que l'ensemble des fonctions polynomiales vérifiant quasiment les mêmes propriétés qui va nous permettre de travailler avec des polynômes de matrices, d'endomorphismes...
Pour cela, on va définir un polynôme par la suite de ses coefficients.

I Généralités

1. Définitions et opérations

1 Def : Un polynôme à coefficients dans K est une suite d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang (dite presque nulle), c'est donc un objet de la forme $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots \ldots \ldots, a_n, 0,0, \ldots \ldots)$ où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots \ldots, a_n$ sont des éléments de K et sont appelés les coefficients de P.

2NB : D'après l'égalité de deux suites, deux polynômes sont égaux sietssi ils ont les mêmes coefficients.

On définit trois opérations sur les polynômes à coefficients dans K : une addition entre polynômes, une multiplication d'un polynôme par un scalaire et une multiplication entre polynômes.

3 Def : Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans K . Soit $\alpha \in K$.
On pose $P = \left(a_0, a_1, a_2, \ldots \ldots \ldots, a_p, 0,0, \ldots \ldots\right) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n > p, a_n = 0$
et $Q = \left(b_0, b_1, b_2, \ldots \ldots \ldots, b_q, 0,0, \ldots \ldots\right) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n > q, b_n = 0$.
$P + Q = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \ldots \ldots, a_m + b_m, 0,0, \ldots \ldots)$ où $m = \max(p, q)$.
$\lambda P = \left(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \ldots \ldots, \lambda a_p, 0,0, \ldots \ldots\right) = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$P \times Q = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}\ tel\ que\ \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$.
Prop : $P + Q, \lambda P\ et\ P \times Q$ ainsi définis sont des polynômes à coefficients dans K.

4 Def : Soit P un polynôme à coefficients dans K. Par convention, $P^0 = (1,0,0, \ldots .)$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $P^m = P^{m-1} \times P$.

4bisNB : cela revient à dire que $\forall m \in \mathbb{N}^*, P^m = \underbrace{P \times P \times \ldots \times P}_{m\ fois}$.

2. Nouvelle écriture d'un polynôme-Indéterminée.

5 Déf.: On note X la suite presque nulle $X = (0,1,0,0,\dots)$. X est appelée l'indéterminée.
X n'est pas un scalaire, c'est un polynôme i.e. une suite presque nulle. On ne doit pas écrire « $X = 2$ « ($HORREUR\,!$).

6 Théo.: $\forall k \in \mathbb{N}, X^k$ est la suite presque nulle : $X^k = \left(\underbrace{0}_{u_0}, 0, \dots\dots, 0, \underbrace{1}_{u_k}, 0, 0, \dots\right) = (u_n)$ tq $u_n = \begin{cases} 0 \ si\ n \neq k \\ 1 \ si\ n = k \end{cases}$.

7 Nouvelle définition d'un polynôme :
Tout polynôme à coefficients dans K s'écrit de manière unique (**) sous la forme :

$$P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \text{ (forme développée de } P).$$

où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots\dots, a_n$ sont des éléments de K, appelés coefficients de P et X est l'indéterminée.
P est aussi noté $P(X)$. On note $\boldsymbol{K[X]}$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée X et) à coefficients dans K.

7 bis NB :

1. (**) d'après l'égalité de deux polynômes, LES COEFFICIENTS a_k SONT UNIQUES. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{n} a_kX^k = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, \max(n,m)]\!], a_k = b_k \ (\,avec\ la\ convention:\ \forall k \geq n+1, a_k = 0\ et\ \forall k \geq m+1, b_k = 0).$$

2. $0 = 0X^0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{n-1} + 0X^n$ est le polynôme nul. Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
3. Tout polynôme non nul peut s'écrire sous la forme $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k \ \ tq\ p \in \mathbb{N}\ et\ a_p \neq 0\,. On\ a\ p = \max\{k / a_k \neq 0\}$.

8 Des Polynômes particuliers :

- Tout polynôme βX^0 ($où\ \beta \in K$) est noté β et appelé polynôme constant. De même, $a_0X^0 \underbrace{=}_{noté} a_0$.
- Pour tout $\lambda \in K^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda X^k = 0 + 0X + 0X^2 + \dots + 0X^{k-1} + \lambda X^k + 0X^{k+1}$ est un monôme (polynôme avec un seul coefficient non nul).

9 Déf: A tout polynôme $P = a_0X^0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on associe la fonction polynomiale $\tilde{P}$ définie par : $\forall t \in K$, $\tilde{P}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$.
$\tilde{P}$ est une fonction de K dans K.

10 Attention : P et $\tilde{P}$ sont deux objets de natures mathématiques distinctes : $P \neq \tilde{P}$ **mais en pratique $\tilde{P}$ est souvent notée P. Et tous les résultats sur les polynômes sont valables sur les fonctions polynomiales .... Mais je ne préciserai pas systématiquement !!**

11 Notation : On note souvent E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Opérations dans $K[X]$.

12 Nouvelles écritures de $P + Q, PQ\ et\ \lambda P$ - Combinaison linéaire.
Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_kX^k$ deux éléments de $K[X]$ et λ un élément de K. Alors,

- $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k)X^k$
- $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_kX^k$
- $P \times Q = PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_kX^k \quad tel\ que\ c_k = \sum_{l=0}^{k} a_lb_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l = \underbrace{\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k \\ i+j=k}} a_ib_j}_{somme\ double}$
- Pour tous scalaires $\alpha\ et\ \beta$, $\alpha P + \beta Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (\alpha a_k + \beta b_k)X^k$ est appelé une combinaison linéaire de $P\ et\ Q$ et est un élément de $K[X]$.

13 Règles de calcul Soit P, $Q\ et\ R$ trois éléments de $K[X]$, $\mu\ et\ \gamma$ deux scalaires. Alors,

1. $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, X^kX^l = X^{k+l}\ et\ (X^k)^l = X^{kl}$.
2. $(P + Q) + R = P + (Q + R) \overset{noté}{\equiv} P + Q + R$
3. $P + Q = Q + P$
4. $P + 0 = P = 0 + P$
5. $P + (-1)P = 0$
6. $\gamma(P + Q) = \gamma P + \gamma Q$
7. $(\gamma + \mu)P = \gamma P + \mu P$
8. $1P = P$
9. $(\mu\gamma)P = \mu(\gamma P) = \gamma(\mu P) \equiv \gamma\mu P$
10. $(PQ)R = P(QR) \equiv PQR$
11. $PQ = QP$
12. $(P + Q)R = PR + QR\ \ et\ R(P + Q) = RP + RQ$
13. $\gamma(PQ) = P(\gamma Q) = (\gamma P)Q \equiv \gamma PQ$
14. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0\ ou\ Q = 0$ (le produit est **intègre**)

13 bis Exemple : 1) Développons dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (2X^5 - 3X + 1)(4X^2 - X + 3) = 8X^7 - 2X^6 + 6X^5 - 8X^3 + 7X^2 - 10X + 3$

13 ter Exercice : $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre s au voisinage de 0 .On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j + o_0(t^s)$. Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$.

14 NB: ce sont quasiment les mêmes règles de calcul que dans K sauf que l'inverse d'un polynôme n'existe pas dans $K[X]$ donc on n' écrit pas $\frac{P}{Q}$. Par contre, on pourra utiliser le théorème de division euclidienne.

Les fonctions polynomiales vérifient les mêmes règles de calcul.

15 Généralisation : Soit $P_1, P_2, \dots, P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1, \dots, \beta_m$ des éléments de K .
$\prod_{k=1}^{m} P_k$ est un élément $K[X]$, c'est le produit des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$.
$\sum_{k=1}^{m} \beta_k P_k$ est un élément $K[X]$, c'est une combinaison linéaire des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$.

16 Prop : Formule du binôme de Newton et formule de factorisation
pour tous polynômes P et Q et tout entier naturel m ,
$(P+Q)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} P^j Q^{m-j}$ et si m non nul, $P^m - Q^m = (P-Q)\left(\sum_{j=0}^{m-1} P^j Q^{m-1-j}\right)$.

16bis Exemple : $X^n - 1 = X^n - 1^n = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$

17 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et Q deux éléments de $K[X]$. Alors, $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$ est un élément de $K[X]$ appelé composée de Q par P. En particulier, $X^p \circ X^k = (X^k)^p = X^{kp}$.

18 Attention : ne pas confondre $P(Q)$ et PQ .

19 Exemple : $P = X^9 + 4X^3 - 5 = T(X^3) = T \circ Q$ avec $T = X^3 + 4X - 5$ et $Q = X^3$.

20 Exercice : Polynômes pairs ou impairs. Montrons que :

- *Si* $P(X) = P(-X)$ (on dit que P est pair)alors $P = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^{2k} = T(X^2) = T \circ X^2$ *tq* $T = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} X^k$.
- *Si* $P(X) = -P(-X)$ (P est impair) alors $P = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} X^{2k+1}$ $P = X \times T(X^2) = X \times (T \circ X^2)$ *tq* $T = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} X^k$.

4. Degré

21 Déf : Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in K[X]$.
•Si $P = 0$ (i.e. tous les a_k sont nuls) alors par **convention**, le degré de P est $-\infty$. On note $\deg(0) = -\infty$.
•Si $P \neq 0$ (i.e. au moins l'un des a_k est non nul) alors par **définition**, le degré de P est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Autrement dit, $deg(P)$ est l'entier qui vérifie : $a_{\deg(P)} \neq 0$ et $\forall k > \deg(P), a_k = 0$.

Alors, $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *avec* $n \geq \deg(P)$.

$a_{\deg(P)}$ est appelé le coefficient dominant de P.
$a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$ est appelé le terme dominant de P.

Si $P \neq 0$ alors
$\deg(P) = max\,\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}$

•Le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant, ni de terme dominant.
•Un polynôme unitaire est un polynôme non nul dont le coefficient dominant vaut 1.

22 Rques :1)Dans la suite du cours, on notera $codom(P)$ le coefficient dominant de P. Cette notation n'est pas officielle mais pratique ! Si vous souhaitez l'utiliser en devoir, vous devez donc la définir.
2) Quitte à ajouter des termes nuls, tout polynôme P s'écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq \deg(P)$.

23 Exercice : Soit $P_n = \frac{1}{2i}[(X-i)^n - (X+i)^n]$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons son degré et son coefficient dominant et vérifions que P_n est à coefficients réels.

24 Théo : Soit P et Q deux éléments de $K[X]$ et β un scalaire.

1. $\deg(\beta P) = \begin{cases} \deg(P) & si\ \beta \neq 0 \\ -\infty & si\ \beta = 0 \end{cases}$ et si P *et* β sont non nuls alors $codom(\beta P) = \beta codom(P)$.
2. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et si P et Q sont non nuls alors $codom(PQ) = codom(P)codom(Q)$.
3. $\deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$. De plus,
Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$ *et* $codom(P+Q) = codom(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $codom(P) + codom(Q) \neq 0$ alors $\deg(P+Q) = \deg(Q) = \deg(P)$
et $codom(P+Q) = codom(P) + codom(Q)$.
Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $codom(P) + codom(Q) = 0$ alors $\deg(P+Q) < \deg(P) = \deg(Q)$.

24 bis Conséquence essentielle : $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$ (le produit est **intègre**).
Autrement dit, le produit de deux polynômes non nuls n'est jamais nul.

25 Généralisation : Soit $P_1, P_2, \dots, P_m$ des éléments de $K[X]$ et $\beta_1, \dots, \beta_m$ des éléments de K.

- $\deg(\prod_{k=1}^{m} P_k) = \sum_{k=1}^{m} \deg(P_k)$ et si $P_1, P_2, \dots, P_m$ sont tous non nuls, alors $\text{codom}(\prod_{k=1}^{m} P_k) = \prod_{k=1}^{m} codom(P_k)$.
- En particulier , $\forall P \in K[X], \forall m \in \mathbb{N}, \deg(P^m) = m deg(P)$ *et si* $P \neq 0$ *alors* $codom(P^m) = (codom(P))^m$.
- $\deg(\sum_{k=1}^{m} \beta_k P_k) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_m))$ et si pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $\deg P_m > deg P_k$ et $\beta_m \neq 0$ alors

  $\deg(\sum_{k=1}^{m} \beta_k P_k) = deg P_m$ et $\text{codom}(\sum_{k=1}^{m} \beta_k P_k) = \beta_m codom(P_m)$.

25bis Exemples importants:

1) Les polynômes constants sont les polynômes de degré 0 ou $-\infty$. Un polynôme constant non nul est de degré 0.
2) Si $\mu \in K$ *et* $n \in \mathbb{N}$ alors $\deg((X-\mu)^n) = n$ et si $\beta \in K^*$ alors $\deg(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r}) = \sum_{k=1}^{r} n_k$.

De plus, $\text{codom}((X-\mu)^n) = 1$ et si $\beta \in K^*$alors $\text{codom}(\beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r}) = \beta$.

27 Exercice : Soit $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}} \end{pmatrix}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,,il existe une fonction polynomiale P_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$.

b) Déterminer le terme dominant de P_n .

26 Théo Soit P et Q deux polynômes. Alors,

$$deg(P \circ Q) = \begin{cases} -\infty & si\ P = 0\ ou\ (Q = \lambda\ constant\ et\ \tilde{P}(\lambda) = 0) \\ 0 & si\ \ Q = \lambda\ constant\ et\ \tilde{P}(\lambda) \neq 0 \\ \deg(P) \times \deg(Q) & si\ P\ non\ nul\ \ et\ Q\ non\ constant \end{cases}$$

Et *si* P *est non nul et* Q *non constant alors* $codom(P \circ Q) = codom(P)(codom(Q))^{\deg(P)}$

27 Exercice : Soit $P \in K[X]$ *et* $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. Déterminons $deg(Q)$ en fonction de $deg(P)$et le cas échéant $codom(Q)$.

28 Déf Un polynôme P de $K[X]$ est dit scindé (sur K) lorsqu'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $K[X]$de degré 1.

29 Trois écritures sous forme scindée d'un même polynôme : $P = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2) \dots (a_sX + b_s)$

$$\underset{\substack{en\ mettant \\ a_k(\neq 0)\ en\ facteur \\ dans\ chaque \\ parenthèse}}{\Longleftrightarrow} P = \beta(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_s) \underset{\substack{en\ regroupant \\ les facteurs \\ contenant \\ le\ même\ \alpha}}{\Longleftrightarrow} P = \beta(X-\mu_1)^{n_1}(X-\mu_2)^{n_2} \dots (X-\mu_r)^{n_r} .$$

5. L'ensemble $K_n[X]$.

30 Def Soit n un entier naturel. On note $K_n[X]$ l'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficient dans K et de degré **inférieur ou égal** à n .

31 Exemples : $K_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants et $K_1[X] = \{aX + b \ /(a,b) \in K^2\}$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

32 NB : $\forall n, K_0[X] \subset K_n[X] \subset K_{n+1}[X] \subset K[X]$.

33 Théorème Tout polynôme de $K_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.

On dira que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

34 Notation : On note souvent E_n l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On a les mêmes définitions et les mêmes résultats sur les fonctions polynomiales associées.

II Polynômes dérivés

1. Définition, écriture et degré

35 Déf: Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$. Le polynôme dérivé de P est : $P^{(1)} = P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{p-1} (l+1) a_{l+1} X^l & \text{si degP} \geq 1. \\ 0\ si\ depP \leq 0. (\ i.e.\ P\ est\ constant) \end{cases}$

On définit alors les polynômes dérivés successifs : par convention, $P^{(0)} = P$ est le polynôme dérivé $0^{\text{ème}}$ de P

Et $\forall j \in \mathbb{N}^*, P^{(j)} = (P^{(j-1)})'$ est le polynôme dérivé $j^{\text{ème}}$ de P.

36 Conséquence: on retrouve les formules de dérivation des fonctions polynomiales. Autr**ement dit, pour tout entier naturel** j **,** $\widetilde{P}^{(j)} = \widetilde{P^{(j)}}$. On a aussi les mêmes règles de calcul :

37 Règles de calcul Soit j un entier naturel, α , β , γ des scalaires et P et Q des polynômes .

■$(\beta P+\gamma Q)^{(j)}=\beta P^{(j)}+\gamma Q^{(j)}$ ■$(PQ)^{(j)}=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}P^{(l)}Q^{(j-l)}$ $(Leibniz)$ ■$\left(\prod_{j=1}^{m}P_j\right)'=\sum_{i=1}^{m}P_i'\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}P_j\right)$

■$'=Q'\times(P'\circ Q)$ ■$(P\circ(X+\alpha))^{(j)}=P^{(j)}(X+\alpha)$

38 Prop : Pour tous entiers naturels k et j ,$(X^k)^{(j)}=\begin{cases}0 \; si \; j>k\\ \frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j} \; si \; j\leq k\end{cases}$.

39 Prop : Pour tout entier naturel j , si $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$, alors $P^{(j)}=\begin{cases}0 \; si \; j>p\\ \sum_{k=j}^{p}a_k\frac{k!}{(k-j)!}X^{k-j} \; si \; j\leq p\end{cases}$.

40 Prop : Pour tout entier naturel j et tout polynôme P, $deg\left(P^{(j)}\right)=\begin{cases}-\infty & si \; j>\deg(P)\\ \deg(P)-j & si \; j\leq \deg(P)\end{cases}$

et <u>si P est non nul</u> alors et $j\leq\deg(P)$ alors $codom\left(P^{(j)}\right)=\frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!}codom(P)$ et $P^{(\deg(P))}=cst=\deg(P)!\,codom(P)$.

(Si P est nul alors tous ses polynômes dérivés son nuls)

41 Théo : Soit $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ un polynôme. Alors, $\forall j\in\mathbb{N},\ a_j=\frac{\tilde{P}^{(j)}(0)}{j!}$ et $P=\sum_{k=0}^{p}\frac{\tilde{P}^{(k)}(0)}{k!}X^k$

42 Exercice: Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul de degré n et $Q=(X^2+1)P''-6P$. Déterminons le degré de Q et le cas échéant son coefficient dominant. Pour quels polynômes P, a-t-on $Q=0$?

2. Formule de Taylor pour les polynômes

43 Théo de formule de Taylor pour les polynômes : Soit P un élément de $K_n[X]$ et α un élément de K .

Alors , $P=\sum_{k=0}^{n}\frac{\tilde{P}^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$ et cette écriture est l'unique manière d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1,X-\alpha,(X-\alpha)^2,\dots,(X-\alpha)^n$.

On dira que la famille $(1,X-\alpha,(X-\alpha)^2,\dots,(X-\alpha)^n)$ est une base de $K_n[X]$.

Exemple : Appliquons la formule de Taylor au polynôme $P(X)=X^2+2X-5$ en $\alpha=1$.

$P\in\mathbb{R}_2[X]$. $Donc$ $P(X)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\widetilde{P^{(k)}}(1)}{k!}(X-1)^k=\tilde{P}(1)+\tilde{P}'(1)(X-1)+\frac{\widetilde{P''}(1)}{2}(X-1)^2$

$Or, P(X)=X^2+2X-5,\ P'(X)=2X+2$ et $P''(X)=2$. Donc, $\tilde{P}(1)=-2,\ \tilde{P}'(1)=4$ et $\widetilde{P''}(1)=2$. Ainsi, $P(X)=-2+4(X-1)+(X-1)^2$ c'est l'unique écriture de P comme combinaison linéaire de $1,(X-1)$ et $(X-1)^2$.

44 Corollaire

- Si deux polynômes ont toutes leurs dérivées successives qui prennent les mêmes valeurs en un scalaire α alors ces polynômes sont égaux.
- Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes les dérivées successives s'annulent en α. Si deg $(P)\leq n$ et il existe un réel α tq : $\tilde{P}(\alpha)=\tilde{P}^{(1)}(\alpha)=..=\tilde{P}^{(n)}(\alpha)=0$ alors P est le polynôme nul.

45 Exercice : Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminons tous les polynômes P de $K_n[X]$ vérifiant : $\tilde{P}'(2)=2\tilde{P}^{(4)}(2)$.

III Divisibilité

1. Définition

46 Déf Soit A et B deux polynômes de $K[X]$.
On dit que B <u>divise</u> A (dans $K[X]$) lorsqu' il existe un polynôme Q (de $K[X]$) tel que : $A=BQ$.

47 Remarques: • Tout polynôme divise 0, 0 ne divise que 0 .

- Les polynômes constants non nuls divisent tout polynôme. Tout polynôme P est divisible par tout polynôme βP tels que $\beta\in K^*$. Ces polynômes βP tels que $\beta\neq 0$ sont appelés les **polynômes associés** de P.
- Si B divise A non nul alors $deg(B)\leq deg(A)$.

48 Exemples

1) La formule de factorisation assure que $\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall(A,B)\in K[X]^2, A-B$ divise A^m-B^m.

2) X^2+X+1 et $X-1$ divise X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$ (d'après la formule de factorisation 16) et $X-j$, $X-j^2$, $X-1$ divisent X^3-1 dans $\mathbb{C}[X]$. $X-i$ *et* $X+i$ divisent X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$.

49 Déf: Un polynôme P *de* $K[X]$, non constant, est <u>irréductible</u> lorsque ses seuls diviseurs dans $K[X]$ sont les polynômes constants non nuls et ses polynômes associés i.e. les polynômes de la forme λ *ou* λP *tq* $\lambda \in K^*$.

50 Théo : Tout polynôme de $K[X]$ de degré 1 est irréductible dans $K[X]$.

51 Déf-prop : Un polynôme P est <u>unitaire</u> lorsque P non nul et $codom(P)=1$. Tout polynôme non nul a un polynôme associé unitaire.

2. Théorème de la division euclidienne

52 Théorème de la division euclidienne : Soit A *et* B deux éléments $K[X]$ tels que $B\neq 0$.
Alors il existe un unique polynôme Q et un unique polynôme R tels que : $A=BQ+R$ **et** $degR<degB$.

53 En pratique. On peut poser la division euclidienne comme ci-dessous (valable quand le degré de A est chiffré)

$$
\begin{array}{c|c}
2X^5-3X^4+X^2-4X+1 & 3X^2-2X-2 \\
\underline{-\left(X^5-\frac{4}{3}X^4-\frac{4}{3}X^3\right)} & \hline \frac{2}{3}X^3-\frac{5}{9}X^2+\frac{2}{27}X+\frac{1}{81} \\
-\frac{5}{3}X^4+\frac{4}{3}X^3+X^2-4X+1 & \\
\underline{-\left(-\frac{5}{3}X^4+\frac{10}{9}X^3+\frac{10}{9}X^2\right)} & \\
\frac{2}{9}X^3-\frac{1}{9}X^2-4X+1 & \\
\underline{-\left(\frac{2}{9}X^3-\frac{4}{27}X^2-\frac{4}{27}X\right)} & \\
\frac{1}{27}X^2-\frac{104}{27}X+1 & \\
\underline{-\left(\frac{1}{27}X^2-\frac{2}{81}X-\frac{2}{81}\right)} & \\
-\frac{310}{81}X+\frac{83}{81} &
\end{array}
$$

Alors, on a :

$$2X^5-3X^4+X^2-4X+1=(3X^2-2X-2)\left(\frac{2}{3}X^3-\frac{5}{9}X^2+\frac{2}{27}X+\frac{1}{81}\right)+\left(-\frac{310}{81}X+\frac{83}{81}\right)$$

RQUE : Les « bidouilles » effectuées pour intégrer $\frac{P(t)}{Q(t)}$ où P et Q polynomiale et $deg\ Q\leq 2$ correspondent en fait à une division euclidienne. Exemple :

$$\frac{t^2+t-1}{3t+2}=\frac{\frac{1}{3}t(3t+2)+\frac{1}{9}(3t+2)-\frac{11}{9}}{3t+2}=\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{11}{9}\frac{1}{3t+2}.$$

Ou encore

$$
\begin{array}{c|c}
t^2+t-1 & 3t+2 \\
\underline{t^2+\frac{2}{3}t} & \hline \frac{1}{3}t+\frac{1}{9} \\
\frac{1}{3}t-1 & \\
\underline{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}} & \\
-\frac{11}{9} &
\end{array}
$$

Dc, $t^2+t-1=\frac{1}{3}t(3t+2)+\frac{1}{9}(3t+2)-\frac{11}{9}$

54 Premier critère de divisibilité :
B divise A si et ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

IV Racines d'un polynôme

1. Définition, caractérisation

55 Déf : Soit $P\in K[X]$ et $\alpha\in K$. α est une racine de P (dans K) lorsque $\tilde{P}(\alpha)=0$.

56 Rques:

- le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines.
- X^2+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ mais a deux racines dans $\mathbb{C}$ qui sont i et $-i$.
- Si B est scindé sur K i.e. $B=\beta(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_s)$ avec β , $\alpha_1,..,\alpha_s$ éléments de K , alors <u>les</u> racines de B dans K sont les scalaires $\alpha_1,..,\alpha_s$ .En effet,

$$\widetilde{B(t)}=\beta(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\ldots(t-\alpha_s)=0\Leftrightarrow\begin{cases} t-\alpha_1=0 \\ ou\ t-\alpha_2=0 \\ \vdots \\ ou\ t-\alpha_s=0\end{cases}\Leftrightarrow t\in\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}.$$

57 En pratique : Trouver les racines complexes de P, c'est résoudre l'équation $\tilde{P}(z)=0$ avec z inconnue complexe. Les racines réelles de P sont les réels solutions de cette même équation.

ATTENTION : LORSQUE VOUS CHERCHEZ LES RACINES DE P, polynôme non nul**, IL EST INTERDIT D'ECRIRE** $\cancel{P(X)=0}$ car X n'est pas un scalaire et $P(X)$ n'est pas le polynôme nul ....**Vous devez résoudre** $\widetilde{P}(z)=0$

58 Théorème fondamental : Soit $P \in K[X]$ et $\alpha \in K$. α est racine de P si et ssi $X-\alpha$ divise P.

59 Généralisation : $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont des racines distinctes de P si et ssi il existe un polynôme Q tel que :

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_s)Q(X)$$

(Q est le quotient de la division euclidienne de P par $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_s)$).

60 Exercice CLASSIQUE : Cherchons le reste R de la division euclidienne de X^n par $B=(X+1)(X-2)$.

2. Racines multiples

61 Déf: Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.

α est une racine de P **d'ordre de multiplicité (exactement)** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$ et $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$.

α est une racine de P **d'ordre de multiplicité au moins** $\boldsymbol{m}$ lorsqu'il existe $Q \in K[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)^m Q(X)$.

(Q est le quotient de la division euclidienne de P par$(X-\alpha)^m$).

62 Vocabulaire : α n'est pas racine de P lorsque α est racine de P de multiplicité 0.

α est une racine simple (resp. double ou triple) de P lorsque α est une racine de P d'ordre de multiplicité 1(resp. 2 ou 3).

Lorsque l'on compte les racines d'un polynôme, on peut compter ses racines distinctes ou bien compter ses racines avec leur multiplicité i.e. qu'une racine de P d'ordre de multiplicité m compte pour m racines.

63 Remarque : le polynôme nul admet tous les scalaires comme racines mais sans ordre de multiplicité exacte.

64 Généralisation Soit $P \in K[X]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires distincts et $m_1, \dots, m_s$des entiers naturels .

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **exactement** $m_1, \dots, m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_s)^{m_s}Q(X)$ et $\forall k \in \{1,\dots,s\}, \tilde{Q}(\alpha_k) \neq 0$.
2) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont racines de P d'ordre de multiplicités respectives **au moins** $m_1, \dots, m_s$ **si et ssi** il existe un polynôme Q de $K[X]$ tel que : $P = (X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_s)^{m_s}Q(X)$.

65 Théorème de caractérisation de la multiplicité d'une racine : Soit $P \in K[X]$, $\alpha \in K$ et $m \in \mathbb{N}$.

1. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **(exactement)** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0,\dots,m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0 \ et\ \tilde{P}^{(m)}(\alpha) \neq 0$
2. α est une racine de P d'ordre de multiplicité **au moins** m **si et ssi** pour tout $k \in \{0,\dots,m-1\}, \tilde{P}^{(k)}(\alpha) = 0$.

66 Exercice CLASSIQUE: Déterminons le reste R de la division euclidienne de $P = X^n$ par $A = (X+1)^2(X-2)$.

67 Exercice CLASSIQUE: Déterminons tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = P'(0)$.

3. Relation entre le degré et le nombre de racines.

68 Théorème

• Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) est inferieur ou égal à $\deg(P)$.

• Seul le polynôme nul a un nombre de racines (distinctes ou comptées avec leur multiplicité) strictement supérieur à son degré.

• Seul le polynôme nul a une infinité de racines.

69 BILAN : Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls

Le polynôme nul est le seul polynôme qui a plus de racines que son degré.

Le polynôme nul est le seul polynôme dont toutes ses dérivées qui s'annulent en un scalaire.

70 METHODE : pour prouver que $P = Q$, il suffit de montrer que $T = P - Q$ est le polynôme nul i.e. que T a davantage de racines que son degré

4. Obtention de la forme scindée

71 Prop : Obtention de la forme scindée
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ des scalaires tous distincts, $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels et P un polynôme non nul. Alors ,

$$\begin{cases} \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ sont des racines distinctes de } P \text{ d'ordre de multiplicités respectives au moins } m_1, \dots, m_s \\ \text{et} \quad deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k \quad \text{et } \beta = codom(P) \end{cases}$$

si et ssi

$$P = \beta(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2} \dots (X-\alpha_s)^{m_s} (\text{forme scindée de } P)$$

Dans ce cas, P n'a pas d'autres racines et $m_1, \dots, m_s$ sont les multiplicités exactes de $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ *dans* P.

72Méthode : pour déterminer la forme scindée de P , on cherche les ou des racines complexes de P, ainsi que leur multiplicité respective. On compte ces racines, on compare avec $deg(P)$ pour les avoir toutes !!

73 Exercice de factorisation sous forme scindée sur $\mathbb{C}$: Soit $P = 3X^5 - 10X^4 + 15X^3 - 15X^2 + 10X - 3$. Trouver la forme scindée de P sur $\mathbb{C}$.

73bis Exercice classique sur les polynômes de Tchebychev . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons qu'il existe un unique polynôme P_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}_n(cos\theta) = \cos(n\theta)$ .Puis montrer que $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ *et* trouver la forme scindée de P_n.

74 Deuxième critère de divisibilité Soit A *et* B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ $(ou\ de\ \mathbb{R}[X])$ tel que B scindé sur $\mathbb{C}$.
B divise A **si et ssi** les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

74 bis Exercice CLASSIQUE : Soit $n > 1$. Montrons que $B = (X-1)^2$divise $P_n = (n-1) - nX + X^n$ et déterminons le quotient.

5. Relations coefficients / racines

75 Théorème de calcul de la somme et du produit des racines en fonction des coefficients .
Si P est un polynôme non nul de degré p et scindé tel que : $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \beta \underbrace{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \dots (X-\alpha_p)}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ pas forcément distincts}}$

alors $codom(P) = a_p = \beta$ et $\prod_{k=1}^{p} \alpha_k = (-1)^p \frac{a_0}{a_p}$ et $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = -\frac{a_{p-1}}{a_p}$.

76 Exemple : les racines nièmes de l'unité sont les racines complexes de $X^n - 1$. On retrouve alors le résultat déjà démontrée suivant : la somme des racines nièmes de l'unité est égale à $-\frac{a_{p-1}}{a_p} = -\frac{0}{1} = 0$.

V Factorisation en produit de facteurs irréductibles

1. Théorème de d'Alembert-Gauß

77 Théo de d'Alembert Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Démo hors programme

78 Exercice très classique : Trouver tous les P polynômes de $K[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

2. Factorisation dans ℂ[X] en produit de facteurs irréductibles.

79 Théo : Seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

80 Théo : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé sur $\mathbb{C}$ et sa forme scindée est unique.
Autrement dit , pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ non constant, il existe un unique entier naturel non nul s , une unique famille de s nombres complexes distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ et une unique famille de s entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s$ tels que :
$P = codom(P) \prod_{k=1}^{s} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

81 Conséquence 1 Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul a un nombre de racines comptées avec leur multiplicité égal à son degré.

82 Conséquence 2 Soit P et Q deux polynômes non nuls.
$P = Q$ si et ssi P *et* Q ont exactement les mêmes racines complexes avec la même multiplicité et les mêmes coefficients dominants.

83 Deuxième critère de divisibilité Soit A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ (ou de $\mathbb{R}[X]$).
B divise A **si et ssi** les racines complexes de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B .

83 bis Exercice CLASSIQUE : Soit $n > 1$. Montrons que $B = (X-1)^2$divise $P_n = (n-1) - nX + X^n$ et déterminons le quotient.

3. Factorisation dans ℝ[X] en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X].

84 Théo: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\omega \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$.
ω est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m si et ssi $\overline{\omega}$ est racine de P d'ordre de multiplicité (ou au moins) m.

85 **Exercice CLASSIQUE :** Déterminons tous les entiers naturels n non nuls tq : $B = (X^2 + X + 1)^2$ divise $P = (1+X)^n - X^n - 1$.

Rappel : $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{4i\frac{\pi}{3}} = \bar{j}$
$1, j$ *et* j^2 *sont les racines 3èmes de l'unité.*
j et j^2 sont les racines de $1 + X + X^2$
$1 + j + j^2 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, j^{3k} = 1, j^{3k+1} = j, j^{3k+2} = j^2$.

86 **Conséquences :** 1. Tout polynôme non nul à coefficients réels possède un nombre pair de racines complexes non réelles.
2. Tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

87 Théorème de factorisation en produit de facteurs irréductibles de ℝ[X]

1. Les polynômes irréductibles dans ℝ[X] sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

2. Tout polynôme de ℝ[X] non constant se factorise de manière unique en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Plus précisément , pour tout P de ℝ[X] non constant, il existe deux uniques entiers naturels non tous nuls r et s, une unique famille de s nombres réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, une unique famille de r couples de réels $(b_1, c_1), \dots, (b_r, c_r)$ et une unique famille de $s + r$ entiers naturels non nuls $m_1, \dots, m_s$,$p_1, \dots, p_r$ tels que :

$$P = codom(P)\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}}_{facteurs\ avec\ les\ racines\ réelles}\right]\left[\underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X^2+b_kX+c_k)^{p_k}}_{\substack{facteurs\ avec\ les\ racines\\ complexes\ conjuguées}}\right]$$ et pour tout $k \in \{1, \dots, r\}, {b_k}^2 - 4c_k < 0$

88 NB : $\deg(P) = \sum_{k=1}^{s} m_k + 2\sum_{k=1}^{r} p_k$.

89En pratique : comment factoriser un polynôme en produit de facteurs irréductibles

89 bisDans ℂ[X] : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors *la forme scindée de* P est l'écriture de P comme produit de facteurs irréductibles de ℝ[X]. Pour trouver la forme scindée de P , il suffit :

1) de trouver **soit** toutes les racines complexes de P en résolvant l'équation $\tilde{P}(z) = 0$ d'inconnue z complexe
soit d'en trouver quelques-unes évidentes (mais alors je n'ai peut-être pas toutes les racines de P).
2) d'étudier leur multiplicité dans P :
Ou bien $deg(P)$ =nbre de racines distinctes trouvées. Alors toutes les racines sont simples et
$P = codom(P)\prod_{k=1}^{\deg(P)}(X-\alpha_k)$.
Ou bien $deg(P)$ >nbre de racines distinctes trouvées. Je cherche alors à savoir quelles sont les racines multiples en calculant $\tilde{P}'(\alpha_k)$,$\tilde{P}''(\alpha_k)$, ... On compte, à nouveau, les racines mais cette fois avec leur multiplicité et on compare avec $deg(P)$. Si $deg(P)$ est égal à ce nombre alors je peux factoriser P sous forme scindée.
Dans le cas où je n'ai trouvé que quelques racines évidentes de P, il faut chercher leur multiplicité exacte dans P, factoriser par le facteur correspondant et chercher les racines de l'autre facteur......
3) Ecrire la forme scindée sans oublier le coefficient dominant de P.

89 ter Exerice: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factorisons sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_n = \left(1+\frac{X}{n}\right)^n - \left(1-\frac{X}{n}\right)^n$.

90 Dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$non constant. Donc $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* P est scindé sur ℂ. Pour écrire P comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, il suffit :
1) D'écrire P sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ avec la méthode précédente.
2) D'isoler les facteurs avec racines réelles (polynômes de degré 1 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$).
3) De regrouper 2 à 2 les facteurs avec racines complexes conjuguées, afin de faire apparaitre les polynômes de degré 2 à coefficients réels et irréductibles :$(X-\alpha)^p(X-\bar{\alpha})^p = ((X-\alpha)(X-\bar{\alpha}))^p = \underbrace{\left(X^2 - \underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{2Re(\alpha)}X + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{|\alpha|^2}\right)^p}_{polynôme\ iréductible}$.

Parfois on parvient à factoriser P sans chercher les racines ...comme le prouve ce premier exercice

91 Exerice: Factorisons $1 + X^2 + X^4$ *dans* $\mathbb{R}[X]$.

92 Exercice Revenons à $P_n = \left(1+\frac{X}{n}\right)^n - \left(1-\frac{X}{n}\right)^n$. Factorisons P_n en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

93 Exemple important: Factorisons $X^n - 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. $X^n - 1$ admet les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité comme racine. Comme $deg\ (X^n - 1) = n$, ces racines sont toutes simples et

$X^n - 1 = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}})$ factorisation sous forme scindée dans $\mathbb{C}$[X].

Si n pair alors $X^n - 1$ a deux racines réelles qui sont : 1 (pour $k = 0$) et -1 $\left(k = \frac{n}{2}\right)$ et

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\frac{n}{2}}}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{de\ partie \\ imaginaire \\ positive}}\right)\prod_{k=\frac{n}{2}+1}^{n-1}\left(X - \underbrace{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{de\ partie \\ imaginaire\ n \\ égative}}\right).$$

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right).$$

$$\boxed{X^n - 1 = (X-1)\underbrace{(X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}_{Q(X)}}$$. Factorisation dans $\mathbb{R}$[X]....

Si n impair alors $X^n - 1$ *a une seule racine réelles* et

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (X-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right).$$

$$\boxed{X^n - 1 = (X-1)\underbrace{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)}_{Q(X)}}.$$

Enfin, $X^n - 1 \underbrace{=}_{\substack{formule \\ de\ factorisation}} (X-1)\left(\underbrace{1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}}_{T(X)}\right) \underbrace{=}_{d'apèrsce\ qui\ précède} (X-1)Q(X).$

Donc, $(X-1)[T(X) - Q(X)] = 0$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre et $X - 1$ n' est pas le polynôme nul, $T(X) - Q(X) = 0$.

Je conclus que : $(1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = \begin{cases} (X+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) \ si\ n\ pair \\ \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right)\ si\ n\ impair \end{cases}$.

94 Cas des polynômes réels réciproques : **Un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ réel et de degré n est dit réciproque lorsque : $\forall k, a_{n-k} = a_k$ (ce qui revient à dire que pour tout cpxe z *non nul*, $\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{P(z)}{z^n}$)** Exemple : $P = 5 + 2X - 7X^2 - 7X^3 + 2X^4 + 5X^5$.

On remarque alors que :

- **si n est impair alors -1 est racine de P , on a alors $P = (X+1)Q$ avec $degQ$ pair et Q réciproque.**
- **Si z est racine de P alors $\frac{1}{z}$ l'est aussi.**

Pour déterminer les racines complexes <u>non nulles et non évidentes</u> d'un polynôme réciproque P de degré pair, on pose $w = z + \frac{1}{z}$ et on obtient : $\tilde{P}(z) = 0\ (*)\ \underbrace{\underline{si\ etssi}}_{\substack{en\ mettant \\ z^{n/2}\ en\ facteur}}\ T(w) = 0$ (**) où T polynomiale de degré $\frac{n}{2}$.

On résout (**) (on trouve les valeurs de w) puis on résout $w = z + \frac{1}{z}$ pour chaque valeur trouvée de w.

95 Exemple : Factorisons $P(X) = 1 + 2X - X^2 + 2X^3 + X^4$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}$[X].

<u>Cherchons tout d'abord les racines complexes de P .</u> $\tilde{P}(0) \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et posons $w = z + \frac{1}{z}$.

$$P(z) = 1 + 2z - z^2 + 2z^3 + z^4 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z^2}_{\neq 0}\left(\underbrace{z^2 + \frac{1}{z^2}}_{w^2-2} + 2\left(\underbrace{z + \frac{1}{z}}_{w}\right) - 1\right) = 0$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (w^2 - 2) + 2w - 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + 2w - 3 = 0 \Leftrightarrow w = 1\ ou\ w = -3 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1\ \ ou\ \ z + \frac{1}{z} = -3$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0\ ou\ z^2 + 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{z = -j\ ou\ z = -j^2 ou\ z = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ou\ z = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}}_{\substack{P\ a\ 4\ racines\ distinctes\ \ et\ degP=4 \\ donc\ ces\ racines\ sont\ toutes\ simples}}.$$

Ainsi , $P = \underbrace{(X+j)(X+j^2)\left(X + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\substack{la\ factorisation\ de\ P\ dans\ \mathbb{C}[X] \\ en\ porduit\ de\ fecteurs\ irréductibles}} = \underbrace{(X^2 - X + 1)\left(X + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{\substack{la\ factorisation\ de\ P\ dans\ \mathbb{R}[X] \\ en\ produit\ de\ facteurs\ irréductibles\ .}}$.

<u>Contrôle qualité</u> : somme des racines de P=$-j - j^2 + \frac{-3-\sqrt{5}}{2} + \frac{-3+\sqrt{5}}{2} = 1 - 3 = -2 \underbrace{=}_{OK} -\frac{coeff\ de\ X^3}{coeff\ dominant}$.

Produit des racines de P=$(-j)(-j^2)\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \underbrace{=}_{OK} (-1)^4\frac{coeff\ constant}{coeff\ dominant}$.

VI Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles réelles.

96 Déf. : Une fonction rationnelle réelle est un quotient de fonctions polynômiales réelles.
Soit $F = \frac{A}{B}$ une fonction rationnelle. F est dite irréductible lorsque A et B n'ont aucun facteur irréductible commun.
Les racines de A sont alors racines de F
Les racines de B sont appelés les pôles de F. Une racine simple (resp. double) donne un pôle simple (resp. double)...

97 Déf. : Soit $F = \frac{A}{B}$ une fonction rationnelle. La partie entière E de F est la fonction quotient de la division euclidienne de A par B . On a alors : $F = E + \underbrace{\frac{R}{B}}_{G}$ avec $degR < degB$ et R est fonction reste de la division euclidienne de A par B.

98 Décomposition en éléments simples de G : Soit $\frac{R}{B}$ un représentant irréductible de G.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = codom(B)[\prod_{k=1}^{s}(x-\alpha_k)^{m_k}][\prod_{k=1}^{r}(x^2+b_kx+c_k)^{p_k}]$

- Chaque facteur $(x-\alpha)^m$ donne une partie polaire de la forme $\frac{\gamma_1}{(x-\alpha)^1} + \frac{\gamma_2}{(x-\alpha)^2} + .. + \frac{\gamma_m}{(x-\alpha)^m}$ qui est la somme de m éléments simples de première espèce (éléments simples de la forme $\frac{\gamma_l}{(x-\alpha)^l}$ tq $l \in [\![1,m]\!]$ et $\gamma_l \in \mathbb{R}$)

  Exemple : il existe 6 réels $a, b, \dots, f$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1{,}3\}, \frac{1}{(x+1)^2(x-3)^4} = \underbrace{\frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+1)^2}}_{\substack{partie\\ polaire\\ du\ pôle\ -1}} + \underbrace{\frac{c}{(x-3)} + \frac{d}{(x-3)^2} + \frac{e}{(x-3)^3} + \frac{f}{(x-3)^4}}_{\substack{partie\ polaire\\ du\ pôle\ 3}}$.

- Chaque facteur $(x^2+bx+c)^p$ donne une partie polaire de la forme $\frac{\delta_1 x+\beta_1}{(x^2+bx+c)^1} + \frac{\delta_2 x+\beta_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{\delta_p x+\beta_p}{(x^2+bx+c)^p}$ somme de p éléments simples de deuxième espèce (élément simple de la forme $\frac{\delta_l x+\beta_l}{(x^2+bx+c)^l}$).
  où $l \in \{1,..,p\}$ et $(\alpha_l, \beta_l) \in \mathbb{R}^2$.
  Exemple : il existe 9 réels a, b, u, v, s, t, q, r tels que :
  $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1{,}1\}, \frac{1}{(x^2+1)^2(x-1)^3(x^2-x+1)} = \frac{a}{(x-1)} + \underbrace{\frac{b}{(x-1)^2}}_{\substack{élément\ simple\\ de\ 1ère\\ espèce}} + \frac{c}{(x-1)^3} + \underbrace{\frac{ux+v}{x^2+1}}_{\substack{élément\ simple\\ de\ 2ème\\ espèce}} + \frac{sx+t}{(x^2+1)^2} + \frac{qx+r}{x^2+x+1}$.

99 Théorème (admis)
Si $F = \frac{A}{B}$ est irréductible tel que $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = codom(B)[\prod_{k=1}^{s}(x-\alpha_k)^{m_k}][\prod_{k=1}^{r}(x^2+b_kx+c_k)^{p_k}]$ alors il existe $deg(B)$ réels uniques notés $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ tels que :
$\forall x \in D_F,\ F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = E(x) + \left(\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{\gamma_{lk}}{(x-\alpha_k)^l}\right) + \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p_k}\frac{\delta_{lk}X+\beta_{lk}}{(x^2+b_kx+c_k)^l}\right)$ où E est le quotient de la division euclidienne de A par B ($i.e.$ E est la partie entière de F).

100 En pratique :
1) On détermine E et R en effectuant la division euclidienne de A par B ou en « bidouillant » (Cf. méthode pour le calcul intégral).
2) On factorise B dans $\mathbb{R}[X]$.
3) On cherche les racines communes de R et B et on simplifie $G = R/B$
4) On écrit la forme générale de la décomposition en éléments simples de G .
5) On détermine les valeurs des coefficients $\gamma_{lk}, \delta_{lk}, \beta_{lk}$ par diverses méthodes :
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to\alpha_k}(x-\alpha_k)^{m_k}G(x)$ avec les deux expressions de G.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x)$ avec les deux expressions de G.
   c) Attribuer à x une valeur particulière autorisée dans $D_F = D_G$.
   d) Mettre sur le même dénominateur dans les deux expressions et identifier les numérateurs donc leurs coefficients pour obtenir un système linéaire.

101 APPLICATIONS : calcul intégral, calcul de somme, calcul de dérivées nièmes.
102 Exercice

1. Calculons $I = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^7+2}{x^4-1}dx$.
2. Montrer que la suite (S_N) tq $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)}$ converge et déterminer sa limite
3. Soit $f(x) = \frac{x^3}{x^4-2x^2+1}$. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $x \in Df$.