DC 11

Ex 1 Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que : f et f'' sont bornées. On note $M_0 = sup|f|$ et $M_2 = sup\,|f''|$.

1. Soit x et h deux réels . Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq M_2 \frac{|h|^2}{2}$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.

3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On note M_1 =sup $|f'|$.

4. Montrer que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Ex 2 Soit a et b deux réels tq $a < b$.

1. Théorème de Accroissements finis généralisé

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ et telles que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

a. Justifier que $g(a) \neq g(b)$.

b. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Indication : utiliser la fonction $\varphi: \left(x \mapsto f(x) - f(a) - K(g(x) - g(a)\right)$ où K est une constante à bien choisir !

2. Règle de l'Hôpital : Soit f et g sont deux fonctions dérivables $sur\ ]a, b[\ et$ telles que :

$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ et g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

Montrer, en utilisant 1. , que : $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

3. En utilisant les fonctions $f: \left(x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et $g = id$, montrer que la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse.

4. Une application théorique : Soit $f \in C^\infty([0,1[, \mathbb{R})$.

On définit la fonction g : $[0\,;1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}\ si\ x \neq 0 \\ f'(0) si\ x = 0 \end{cases}$

a. Démontrer que g est de classe C^1 sur $[0,1[$.

b. Exprimer pour $x \in]0,1[\ et\ n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x)$ en fonction des dérivées de f en x et des puissances de x.

c. En déduire que g est de classe C^∞ sur $[0,1[$ et déterminer $g^{(n)}(0)$ On utilisera la règle de l'Hôpital ci-dessus.