DC 10

1. Déterminer un équivalent simple d'une fonction (on appellera f chacune des fonctions étudiées sans le préciser)

1.1. Justifier que : $\frac{\text{Arctan}(x)4^x - x^4\ln(x) + 2024\cos(x)}{(-1)^{\lfloor x \rfloor} - 2^{x+3} + 2024(\ln(x))^{2024}} \sim_{+\infty} -\frac{\pi}{16}2^x$.

1.2. Justifier que : $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} - \frac{x^2}{2} \sim_0 \frac{-7}{6}x^3$.

1.3. Justifier que : $\ln(\tan(x)) \sim_{\frac{\pi}{4}} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1.4. Justifier que : $\text{Arctan}(x)\ln(\sin(x)) \sim_{0^+} x\ln(x)$.

2. Calculer des limites (on appellera f chacune des fonctions étudiées sans le préciser)

1.1. Montrer que $\lim_{x \to \frac{1}{4}} (4x^2 + 3x - 1)\tan(2\pi x) = -\frac{5}{2\pi}$.

1.2. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2ch(x)}\right)^{sh(x)} = \sqrt{e}$.

3. Développement limité par intégration terme à terme

Montrer que $Arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o_1((x-1)^4)$.

4. Prolongement par continuité

Soit $f : \left(x \mapsto \frac{Arctan^2(x)}{\ln(\cos(x))} \right)$.

a. Montrer que $f(x) = -2 + \frac{5}{3}x^2 + o_0(x^2)$

b. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0 et étudier la position de sa courbe par rapport à sa tangente .

5. Asymptote

On admettra ce coefficient

Soit $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + x^2 e^{\frac{3x-1}{x^2}}}$.

a. Montrer que $f(x) = 2x + \frac{73}{12} + \frac{2087}{288x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

b. Justifier l'existence d'une asymptote de Cf et obtenir son équation et la position de la courbe par rapport à cette asymptote

6. Déterminer le DL d'une bijection réciproque

Soit $\forall x \in [0,1], \varphi(x) = \ln(x + \mathrm{e}^x)$

a. Montrer que $\varphi(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o_0(x^3)$.

b. Montrer que φ est bijective de $[0,1]$ sur un intervalle J à déterminer.

c. Montrer que φ^{-1} est de classe C^∞ sur J.

d. Déterminer le $DL_3(0)$ $de\ \varphi^{-1}$.