DS 4

.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso).
Les exercices et problèmes sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Traitez les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. Ils sont indépendants.
- Justifiez toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :
- ✓ Vous n'avez pas affirmé d'emblée que le résultat à démontrer ou que l'équation à résoudre est toujours vraie…. Lorsque vous souhaitez transformer l'énoncé, raisonnez par équivalence. Lorsque vous résolvez une équation, raisonnez par équivalence.
- ✓ Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire.
- ✓ Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …) sont utilisés et utilisés à bon escient.
- ✓ La phrase réponse, attendue et soulignée ou encadrée ou surlignée, répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé, n'hésitez pas à en faire part au professeur surveillant (moi !!!).

Exercice 1 Des suites adjacentes.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

1. Montrer que $(S_{2n}\,)\ et\ (S_{2n+1})$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on sur la suite (S_n) ?
2. En remarquant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que $S_n = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$.
3. Montrer par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = 0$.
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.
5. Ecrire un programme python nommé $approx1$ tel que :
    - en entrée : $approx1$prend en entrée un réel strictement positif noté E.
    - en réponse : $approx1$ renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à $E\ près$.

Exercice 2 Une suite récurrente.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n \in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que u est bornée . Désormais, on supposera que $u_0 \in [0,1]$.
2. Montrer que u a une seule limite possible. On note α cette unique limite possible.
3. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
4. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f\,'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. Montrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ admet α comme unique solution dans $[0,1]$.
6. En déduire que (u_n) est convergente.
7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
8. En déduire la convergence et la limite de u.
9. Ecrire un programme python nommé $approx2$ tel que :
    - en entrée : $approx2$ prend en entrée un réel strictement positif noté E.
    - en réponse : $approx2$ renvoie une valeur approchée de α à $E\ près$.

Exercice 3 Suite implicite.

ETUDE D'UNE SUITE IMPLCITE

1. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $x = n\ln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0, n]$ notée u_n.
2. Justifier que $u_n \in]0,2[$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1 .
5. Ecrire un programme python nommé $approx3$ tel que :

- en entrée : $approx3$ admet comme en entrée un réel strictement positif noté E et un entier naturel $n \geq 3$.
- en réponse : $approx3$ renvoie une valeur approchée de u_n à E $près$.

DEVELOPPEMENT LIMITE de Φ

On pose $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$.

6. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre s au voisinage de 0 .On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j + o_0(t^s)$.
7. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3.

En effectuant le produit des deux parties polynomiales des $DL_s(0)$ de $\ln(1+t)$ et de $\frac{1}{1+t}$, on peut prouver (mais vous admettrez ce résultat) que : $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$

8. Montrer que pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.
9. En déduire que la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$diverge sans limite.

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $(\boldsymbol{u_n})$

10. Montrer que Φ induit une bijection de $]-1, e-1[$ sur un domaine à déterminer . On note ψ la bijection réciproque . Dresser le tableau des variations de ψ et préciser les limites aux extrémités de son intervalle de définition.
11. Justifier que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité .
12. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.

    12.1 Exprimer v_n à l'aide de ψ et n.

    12.2 En déduire qu'il existe trois réels A , B , C que l'on déterminera , tels que $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4 Fonction vérifiant une inégalité.

A. Dans cette partie A, f est une fonction réelle, définie $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|)$.

1) Déterminer un exemple de telle fonction f.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f admet au plus un point fixe.

B. Dans cette partie B, f est une fonction réelle, définie et **<u>continue</u>** sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

4) Déterminer un exemple de telle fonction f.
5) Montrer que f est injective.
6) Montrer, par l'absurde, que f est strictement monotone.
7) Supposons ici que f est strictement croissante. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq x + f(0)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Trouver de même , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Que se passe-t-il si f est strictement décroissante ?
8) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R},\ |f^{-1}(t) - f^{-1}(u)| \leq |t - u|$.
9) On suppose, dans cette question, qu'il existe a et b réels tels que $a < b$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$.
   a) Montrer que f admet au moins un point fixe.
   b) Montrer que $\{f(a), f(b)\} = \{a, b\}$.
   c) Montrer que si f est croissante alors $\forall x \in [a, b], f(x) = x$ ($i.e. f_{/[a,b]} = id_{[a,b]}$).
   d) Reconnaitre $f_{/[a,b]}$ lorsque f est décroissante.
10) Dans cette question, on suppose f croissante.
    a) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ alors $f(x) \sim_{+\infty} x$.
    b) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ alors $f(x) \sim_{-\infty} x$.
    c) Montrer que si f n'a pas de point fixe alors un des deux cas précédents est vérifié.
    d) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un intervalle.
11) On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
    a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \geq 1$.
    b) En déduire que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |(f^{-1})'(x)| \leq 1$.

FIN.