Corrigé du DS 4

Exercice 1

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduit-on sur la suite (S_n) ?

2. En remarquant que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $S_n = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt$.

3. Montrer par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$.

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

5. Ecrire un programme python nommé $approx1$ tel que :

- en entrée : $approx1$prend en entrée un réel strictement positif noté E.
- en réponse : $approx1$ renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ à E $près$.

$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$.

$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$.

Donc (S_{2n+1}) est strictement croissante et (S_{2n}) est strictement décroissante. J'en conclus que (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes et par conséquent, (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont convergentes et de même limite L. Alors, comme ces deux suites extraites de (S_n) particulières tendent vers une même limite, (S_n) converge vers cette même limite L.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \frac{1}{k}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{k-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t^{k-1} dt = \int_0^1 -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} dt$

$$= -\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right] dt = -\int_0^1 \left[\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\right] dt$$

3. $\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ donc $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Cet encadrement permet de conclure que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} dt = -\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = -[\ln(1+t)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt = -\ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

Or, $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$est bornée. Donc$(-1)^n, \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

5. $\forall n > 0, S_{2n+1} < -\ln(2) < S_{2n}$. $Donc$, $0 < S_{2n} + \ln(2) < S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

Donc pour que S_{2n} soit une valeur approchée de $-\ln(2)$ à E près, il suffit que n vérifie $\frac{1}{2n+1} \leq E$..

```
def approx1(E) :
    s = 0
    n = 1
    while 1/(2*n + 1) > E :
        s = s + (-1)/(2*n + 1) + 1/(2*n + 2)
        n = n + 1
    print (-s)
```

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ et (u_n) une suite de réels vérifiant : $\forall n \in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que u est bornée . Désormais, on supposera que $u_0 \in [0,1]$.
2. Montrer que u a une seule limite possible. On note α cette unique limite possible.
3. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
4. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.
6. Conclure à la convergence de u et donner la limite de la suite u.
7. Ecrire un programme python nommé $approx2$ tel que :
   - en entrée : $approx2$ prend en entrée un réel strictement positif noté E.
   - en réponse : $approx2$ renvoie une valeur approchée de α à E $près$.

1. $Df = \mathbb{R}$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{+2}, ab \leq \frac{a+b}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $en\ posant\ a = 1\ et\ b = e^x, 0 < e^x \leq \frac{1+e^{2x}}{2}$ donc $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Autrement dit, $f(\mathbb{R}) \subset]0, \frac{1}{2}]$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{1}{2}]$. La suite u est donc bornée. Désormais, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.

2. $\forall x \in [0,1], f'(x) = \underbrace{\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}}_{>0} \left(\underbrace{1-e^{2x}}_{<0}\right) < 0$.

Et, $|f'(x)| = \left|\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}\right| = \frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|} |f(x)| \underbrace{=}_{car\ f(x)\geq 0} \frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|} f(x) \leq 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Or $f'(x) < 0$. Donc, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

1. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$, les limites possibles de u sont réelles et sont dans $[0,1]$.

De plus, f étant continue sur $[0,1]$.les limites possibles de u sont les points fixes de f dans $[0,1]$.Posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue et dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x(1+e^{2x})-2e^xe^{2x}}{(1+e^{2x})^2} - 1 = \underbrace{\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}}_{=f'(x)<0} - 1 < 0$

. Donc g est strictement décroissante et donc injective. g s'annule donc au plus une fois sur $[0,1]$. De plus, $g(0) = f(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 < 0$. Comme g est continue, le TVI assure que g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$Je déduis de tout ce qui précède que g s'annule une et une seule fois sur $[0,1]$en un réel α. Ainsi, α est l'unique point fixe de f sur $[0,1]$et donc l'unique limite possible de u.

2. $\forall x \in [0,1], f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie contraire. Comme, de plus, elles sont bornées car extraites de u qui est bornée, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.

3. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à $f \circ f$ qui est continue sur $[0,1]$. Donc les limites de ces deux suites sont des points fixes de $f \circ f$.

Posons $h(x) = f \circ f(x) - x$. Alors, h est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], h'(x) = f'(x)f'(f(x)) - 1$. Or, $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$ et $f'(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ donc $f'(f(x)) \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ et par conséquent $f'(x)f'(f(x)) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Donc $\forall x \in [0,1], h'(x) < 0$. h est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ donc injective et s'annule au plus une fois sur $[0,1]$. Or, $h(\alpha) = f\big(f(\alpha)\big) - \alpha \underbrace{=}_{\substack{car \\ f(\alpha)=\alpha}} f(\alpha) - \alpha \underbrace{=}_{\substack{car \\ f(\alpha)=\alpha}} 0$. Ainsi, α est l'unique racine de h sur $[0,1]$ et par conséquent l'unique point fixe de $f \circ f$. J'en conclus que α est la limite de (u_{2n}) et de (u_{2n+1}). Ces deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) de u ayant la même limite, la suite u converge aussi vers α.

4. $\forall x \in [0,1], |f'(x)| = \left|\frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}\right| = \frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}|f(x)| \underbrace{=}_{car\, f(x)\geq 0} \frac{|1-e^{2x}|}{|1+e^{2x}|}f(x) \leq 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Or $f'(x) < 0$. Donc, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

5. a) L'égalité des accroissements finis permet donc d'affirmer que sur $[0,1]$, f est $\frac{1}{2}$ –lischitzienne ; autrement dit,

$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$. Alors $\forall n, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Ensuite, je montre facilement par récurrence que $\forall n,\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|(**)$. En effet ,

$|u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^0}|u_0 - \alpha|$ et $\forall n, (|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \Rightarrow \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha| \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.}} |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|)$.

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| = 0$. Alors l'inégalité $(**)$ permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

$Rque$: $\forall n, |u_0 - \alpha| \leq 1$ (car $(u_0, \alpha) \in [0,1]^2$) donc $\forall n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

7.

```
from math import *
def Approx(E) :
    u = 1
    n = 0
      while 1/2 ** n > E :
          n = n + 1
          u = exp(u) /(1 + exp(2 * u))
    return(u)
```

Exercice 3

ETUDE D'UNE SUITE IMPLCITE

1. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0,n]$ notée u_n.
2. Justifier que $u_n \in]0,2[$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1 .
5. Ecrire un programme python nommé $approx3$ tel que :

- en entrée : $approx3$ admet comme en entrée un réel strictement positif noté E et un entier naturel $n \geq 3$.
- en réponse : $approx3$ renvoie une valeur approchée de u_n à E $près$.

DEVELOPPEMENT LIMITE de Φ

On pose $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$.

6. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre s au voisinage de 0 .On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j + o_0(t^s)$.
7. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3.
8. En effectuant le produit des deux parties polynomiales des $DL_s(0)$ de $\ln(1+t)$ et de $\frac{1}{1+t}$, justifier que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$$

9. Montrer que pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.
10. En déduire que la suite $(c_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$diverge sans limite.

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE (u_n)

11. Montrer que Φ induit une bijection de $]-1, e-1[$ sur un domaine à déterminer . On note ψ la bijection réciproque . Dresser le tableau des variations de ψ et préciser les limites aux extrémités de son intervalle de définition.

12. Justifier que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité .

13. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.

12.1 Exprimer v_n à l'aide de ψ et n.

12.2 En déduire qu'il existe trois réels A , B , C que l'on déterminera , tels que $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ETUDE D'UNE SUITE

1. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Montrer que l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0, n]$ notée u_n et justifier que $u_n \in]0,2[$.

2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1 .

4. Ecrire un programme python nommé $approx3$ tel que :

- en entrée : $approx3$ admet comme en entrée un réel strictement positif noté E et un entier naturel $n \geq 3$.
- en réponse : $approx3$ renvoie une valeur approchée de u_n à E $près$.

1. Posons $\varphi_n(x) = x - nln(x)$. φ_n est de $classe$ $C^\infty sur$ $\mathbb{R}^{+*}$et $\forall x > 0, \varphi_n{}'(x) = 1 - \frac{n}{x}$.

Donc, $\varphi_n{}'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{x} > 0 \Leftrightarrow x > n$. D'où les variations de φ_n suivantes :

x	0	1	u_n	2	n	$+\infty$
$\varphi_n{}'(x)$			$-$		0	$+$
$\varphi_n(x)$	$+\infty$	> 0	0	< 0	< 0	$+\infty$

$\varphi_n(n) = n(1 - ln(n)) < 0$. De plus $\lim\limits_{x \to 0\ (et +\infty)} \varphi_n(x) = +\infty$

Donc comme φ_n est continue sur $\mathbb{R}$, le TVI assure que φ_n s'annule au moins une fois sur $]0, n[et$ une fois sur $]n, +\infty[$. Comme de plus φ_n est strictement monotone sur chacun de ces intervalles, φ s'annule une seule fois sur chacun de ces intervalles. Ainsi, l'équation $x = nln(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ admet une unique solution dans $]0, n]$ notée u_n. Comme $\varphi_n(2) = 2 - n\ln(2) < 0$ car $n \geq 3$, $u_n \in]0,2[$. Et même , $\varphi_n(1) = 1 - n\ln(1) > 0$ donc $u_n \in]1,2[$.

Ainsi, $\forall n \geq 3, u_n \in]1,2[$ et $\varphi_n(u_n) = u_n - nln(u_n) = 0$.

2. Comparons $\varphi_n(u_n) et$ $\varphi_n(u_{n+1})$.

$\varphi_n(u_n) = 0 = \varphi_{n+1}(u_{n+1})$ et $\varphi_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - nln(u_{n+1}) = \underbrace{u_{n+1} - (n+1)ln(u_{n+1})}_{=\varphi_{n+1}(u_{n+1})=0} + ln(u_{n+1}) = ln(u_{n+1}) > 0$ car $u_{n+1} \in]1,2[$.

Donc, $\varphi_n(u_{n+1}) > \varphi_n(u_n)$. Comme φ_n est strictement décroissante sur $]1,2[$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite u est strictement décroissante. Comme elle est bornée , elle converge. Notons L sa limite finie.

3. $\forall n \geq 3, u_n = nln(u_n)$ donc $ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$ et $u_n = e^{\frac{u_n}{n}}$. Par conséquent, $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^0 = 1$.

4. Appliquons le principe de dichotomie sur $[1,2]$ pour obtenir une valeur approchée de u_n ;

```
from math import *
def f(x,n):
    return x - n ln(x)
def Approx3(E,n):
    a = 1
    b = 2
    while b - a > E:
        if f((a+b)/2,n) > 0:
            a = (a+b)/2
        else :
            b = (a+b)/2
    return(a)
Print(Approx3(1/1000,5))
```

DEVELOPPEMENT LIMITE de Φ

On pose $\forall t \in]-1, +\infty[, \Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t}$

5. Justifier que Φ admet un développement limité à tout ordre d au voisinage de 0 . On note $\Phi(t) = \sum_{j=0}^{s} c_j t^j + o_0(t^s)$ le développement limité d'ordre s au voisinage de 0.

6. Calculer c_0, c_1, c_2, c_3.

7. Justifier que $\forall j \in \mathbb{N}^*, c_j = (-1)^{j+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}$

8. Montrer que pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ en utilisant une inégalité classique.

9. En déduire que la suite $(c_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ diverge sans limite.

5. Φ est de classe C^∞sur $]-1, +\infty[$ donc admet un DL à tout ordre en 0 d'après Taylor-Young.

6. $\Phi(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t} = \Phi(t) = \ln(1+t)\frac{1}{1+t} = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)\right)(1 - t + t^2 - t^3 + o_0(t^3)) = t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{11}{6}t^3 + o_0(t^3)$.

Donc, $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = -\frac{3}{2}, c_3 = \frac{11}{6}$.

7. $\Phi(t) = \ln(1+t)\frac{1}{1+t} = \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{j-1}t^j}{j} + o_0(t^s)}_{P(t)}\right]\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j t^j}_{Q(t)} + o_0(t^s)\right] = termes\ de\ degré\ \text{inf à } s\ de\ P(t)Q(t) + o_0(t^s) =$ $\sum_{p=0}^{s} c_p t^p + o_0(t^s)$.

$\left[\sum_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{j-1}t^j}{j}\right]\left[\sum_{k=0}^{s}(-1)^k t^k\right] = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k t^k \frac{(-1)^{j-1}t^j}{j} = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=0}^{s}(-1)^{k+j-1}\frac{1}{j}t^{k+j} \underbrace{=}_{\substack{p=k+j\\k=p-j}} \sum_{j=1}^{s}\sum_{p=j}^{s+j}(-1)^{p-1}\frac{1}{j}t^p =$

$\sum_{p=1}^{2s}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{p-1}\frac{1}{j}t^p = \sum_{p=1}^{2s}(-1)^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\right)t^p$

Ainsi, $c_p = (-1)^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\right)$.

8. Je sais que $\forall x \geq 0, ln(1+x) \leq x$ donc pour tout entier p strictement positif , $\ln(p+1) - \ln(p) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$.

9. $\forall j > 0, \ln(j+1) = \sum_{p=1}^{j}\ln(p+1) - \ln(p) \leq \sum_{p=1}^{j}\frac{1}{p} = S_j$. Donc $\lim_{j\to+\infty} S_j = +\infty$.

Alors, c_{2j}=$(-1)^{2j+1}\sum_{r=0}^{2j}\frac{1}{r} = -S_{2j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} -\infty$ et Alors, c_{2j+1}=$(-1)^{2j+2}\sum_{r=0}^{2j+1}\frac{1}{r} = S_{2j+1} \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$. Comme les deux suites extraites (c_{2j}) et (c_{2j+1}) tendent vers deux limites différentes , j'en conclus que (c_j) diverge sans limite.

DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE (a_n)

10. Montrer que Φ induit une bijection de $]-1, e-1[$ sur un domaine à déterminer . On note ψ la bijection réciproque . Dresser le tableau des variations de ψ et préciser les limites aux extrémités de son intervalle de définition.
11. Justifier que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 et déterminer ce développement limité .
12. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$.
13.1 Exprimer v_n à l'aide de $\psi\ et\ n$.

13.2 En déduire qu'il existe trois réels A , B , C que l'on déterminera , tels que $u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

11. $\forall t \in]-1, e-1[, \Phi'(t) = \frac{1-\ln(1+t)}{(1+t)^2} > 0$. Donc Φ est strictement croissante sur $]-1, e-1[$. Comme de plus Φest continue sur $]-1, e-1[$, Φ est bijective de $]-1, e-1[$ sur $\left]\lim_{x\to-1}\Phi(x), \lim_{x\to e-1}\Phi(x)\right[=]-\infty, \frac{1}{e}[$ (car $\lim_{x\to-1}\Phi(x) \overset{\substack{pas\ de\\FI}}{=} -\infty\ et\ \lim_{x\to e-1}\Phi(x) = \Phi(e-1) = \frac{1}{e}$). De plus, ψ la bijection réciproque est continue et strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{e}[$ et $\lim_{x\to\frac{1}{e}}\psi(x) = e-1$ et $\lim_{x\to-\infty}\psi(x) = -1$.

12. Sur $]-1, e-1[, \Phi'$ ne s'annule pas et Φ est de classe C^∞. Donc, ψ est de classe C^∞sur $]-\infty, \frac{1}{e}[$. Donc Taylor Young assure que ψ admet le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 suivant : $\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{\psi''(0)}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

Or, $\Phi(0) = 0$ donc $\psi(0) = 0$.

Et, $\psi'(x) = \frac{1}{\Phi'(\psi(x))}\ et\ \psi''(x) = -\frac{\psi'(x)\Phi''(\psi(x))}{\left(\Phi'(\psi(x))\right)^2}$ avec $\Phi''(t) = \frac{-3+2\ln(1+t)}{(1+t)^3}$. Donc, $\psi'(0) = \frac{1}{\Phi'(\psi(0))} = \frac{1}{\Phi'(0)} = 1$ et $\psi''(0) = -\frac{\psi'(0)\Phi''(\psi(0))}{\left(\Phi'(\psi(0))\right)^2} = -\frac{(-3)}{1} = 1$. Ainsi, $\psi(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

13. $u_n = nln(u_n)$ donc $1 + v_n = nln(1+v_n)$. De plus,$\forall n, u_n \in]1,2]$. Donc $u_n = 1 + v_n \neq 0$. Alors $\forall n,\ \Phi(v_n) = \frac{ln(1+v_n)}{(1+v_n)} = \frac{1}{n}$. De plus, $\forall n, u_n \in]1,2] \subset]1, e[$ donc $v_n \in]0, e-1[\subset]-1, e-1[$.Par conséquent, $\forall n,\ v_n = \psi\left(\frac{1}{n}\right)$.

14. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0\ et\ \psi(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + o_0(x^2), v_n = \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $A = 0, B = 1\ et\ C = \frac{3}{2}$ conviennent.

Exercice 4 Une fonction vérifiant une inégalité.

A. Ici f désigne une fonction définie $\mathbb{R}$ et telle que :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|)$.
   1) Déterminer un exemple de telle fonction f.
   2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   3) Montrer que f admet au plus un point fixe.

B. Désormais f est une fonction définie et <u>**continue**</u> sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
   4) Déterminer un exemple de telle fonction f.
   5) Montrer que f est injective.
   6) En déduire que f est strictement monotone.
   7) Supposons ici que f est strictement croissante. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq x + f(0)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Trouver de même , $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que se passe-t-il si f est strictement décroissante ?
   8) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R},\ |f^{-1}(t) - f^{-1}(u)| \leq |t - u|$.
   9) On suppose qu'il existe a et b réels tels que $a < b$ et $f([a,b]) \subset [a,b]$.

a) Montrer que f admet au moins un point fixe.
b) Montrer que $\{f(a), f(b)\} = \{a, b\}$.
c) Montrer que si f est croissante alors $\forall x \in [a,b], f(x) = x$ ($i.e. f_{/[a,b]} = id_{[a,b]}$).
d) Reconnaitre $f_{/[a,b]}$ lorsque f est décroissante.

10) Dans cette partie, on suppose f croissante.
a) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ alors $f(x) \sim_{+\infty} x$.
b) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ alors $f(x) \sim_{-\infty} x$.
c) Montrer que si f n'a pas de point fixe alors un des deux cas précédents est vérifié.
d) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un intervalle.

11) On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \geq 1$.
b) En déduire que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |(f^{-1})'(x)| \leq 1$.

<u>PROBLEME 2</u> Une fonction vérifiant une inégalité.

A. Ici f désigne une fonction définie $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|)$.
1) Déterminer un exemple de telle fonction f.
2) Montrer que f est continue en chaque point de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f admet au plus un point fixe.

1) $f: \left(x \mapsto \frac{1}{2}x\right)$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}|x - y| \underbrace{<}_{si\, x \neq y} |x - y|$.

2) Soit a un réel . $\forall x \neq a, |f(x) - f(a)| < |x - a|$. Donc, $\forall x \neq a, f(a) - |x - a| < f(x) < f(a) + |x - a|$. Les deux fonctions qui encadrent $f(x)$ tendent vers $f(a)$ quand $x \to a$. J'en déduis que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$. Ainsi f est continue en a. f est donc continue en chaque point de $\mathbb{R}$.

3) Soit a et b deux points fixes de f. Si $a \neq b$ alors $|f(b) - f(a)| < |b - a|$ i.e. $|b - a| < |b - a|$ ce qui est absolument impossible. J'en déduis que $a = b$. Ainsi, f admet au plus un point fixe. Autrement dit, si f admet un point fixe alors ce point fixe est unique.

C. Désormais f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
4) Déterminer un exemple de telle fonction f.

$f = id_{\mathbb{R}}$ convient puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y| \geq |x - y|$.

5) Montrer que f est injective . Qu'en déduit-on sur f ?

Soit x et y deux réels distincts. Alors $|x - y| > 0$ donc $|f(x) - f(y)| \geq |x - y| > 0$ et par suite $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, deux réels distincts ont toujours des images distinctes par f. J'en déduis que f est injective.

6) Comme f est continue et injective, f est strictement monotone. (Cf chapitre bijections) .

7) Supposons ici que f est strictement croissante. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq x + f(0)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Trouver de même , $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que se passe-t-il si f est strictement décroissante ?

Supposons f croissante.
En prenant $y = 0$, j'obtiens $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(0)| \geq |x|$. Comme f est strictement croissante, si $x \geq 0$ alors $f(x) \geq f(0)$ et $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x| = x$ et par conséquent, $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0) + x$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(0) + x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, si $x \leq 0$ alors $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) - f(x) = |f(x) - f(0)| \geq |x| = -x$ et par conséquent, $\forall x \leq 0, f(x) \leq f(0) + x$. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(0) + x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Supposons f décroissante. si $x \geq 0$ alors $f(x) \leq f(0)$ et $f(0) - f(x) = |f(x) - f(0)| \geq |x| = x$ et par conséquent, $\forall x \geq 0, f(x) \leq f(0) - x$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(0) - x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. De même, on montre que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

8) Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R},\ |f^{-1}(t) - f^{-1}(u)| \leq |t - u|$.

f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc le théorème des bijections continues et strictement monotones assure que

- $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[= \mathbb{R}$ si f croissante et $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)[= \mathbb{R}$ si f décroissante.
- f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de même stricte monotonie que f.

$Soit\ t \in \mathbb{R}, Soit\ u \in \mathbb{R}, Posons\ x = f^{-1}(t)\ et\ y = f^{-1}(u). Alors\ t = f(x)\ et\ u = f(y)$. L' inégalité $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ s' écrit alors $|t - u| \geq |f^{-1}(t) - f^{-1}(u)|$.

9) On suppose qu'il existe a et b réels tels que $a < b$ et $f([a,b]) \subset [a,b]$.
e) Montrer que f admet au moins un point fixe.
f) Montrer que $\{f(a), f(b)\} = \{a, b\}$.
g) Montrer que si f est croissante alors $f_{/[a,b]} = id_{[a,b]}$.
h) Reconnaitre $f_{/[a,b]}$ lorsque f est décroissante.

a) Soit $g: (x \mapsto f(x) - x)$. Alors g est continue sur $[a,b]$ puisque f et id le sont. De plus, $g(a) = f(a) - a \geq 0\ car\ a \leq f(a) \leq b$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0\ car\ a \leq f(b) \leq b$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$ en un réel s. Alors $g(s) = f(s) - s = 0$ donc $f(s) = s$. Ainsi, f admet au moins un point fixe.

b) Comme f est strictement monotone, $f(a)$ et $f(b)$ sont deux éléments distincts de $[a,b]$. En appliquant (**) à $x = a$ et $y = b$, j'obtiens : $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$.Or, $a \leq f(a) \leq b\ et\ a \leq f(b) \leq b$ donc $a - b \leq f(a) - f(b) \leq b - a\ \ i.e. |f(a) - f(b)| \leq$

$|a-b|$. Ainsi, $|f(a)-f(b)| = |a-b|$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont deux éléments distincts de $[a,b]$, nécessairement $\begin{cases} f(a)=a \\ f(b)=b \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} f(a)=b \\ f(b)=a \end{cases}$; *autrement dit*, $\{f(a), f(b)\} = \{a, b\}$.

c) On suppose f strictement croissante. Alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
Soit $x \in [a,b]$.
f étant croissante, $f(x) \geq f(a)$ *donc* $f(x) - a = f(x) - f(a) = |f(x) - f(a)| \geq |x-a| = x - a$.Donc $f(x) \geq x$. De même, f étant croissante, $f(x) \leq f(b)$ *donc* $b - f(x) = f(b) - f(x) = |f(x) - f(b)| \geq |x-b| = b - x$. Donc, $f(x) \leq x$.
Ainsi, $f(x) = x$. J'en conclus que $f_{/[a,b]} = id_{[a,b]}$. Donc tous les points de $[a,b]$ sont fixes par f.

d) On suppose f strictement décroissante. Alors $f(a) = b$ et $f(b) = a$.
Soit $x \in [a,b]$.
f étant décroissante, $f(x) \leq f(a)$ *donc* $b - f(x) = f(a) - f(x) = |f(x) - f(a)| \geq |x-a| = x - a$.Donc $f(x) \leq a + b - x$. De même, $f(x) \geq f(b)$ *donc* $f(x) - a = f(x) - f(b) = |f(x) - f(b)| \geq |x-b| = b - x$. Donc, $f(x) \geq a + b - x$.
Ainsi, $f(x) = a + b - x$. J'en conclus que $f_{/[a,b]} = a + b - id_{[a,b]}$. *Alors*, $\frac{(a+b)}{2}$ est le point fixe par f dans $[a,b]$.

10) Dans cette partie, on suppose f croissante.
  e) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ alors $f(x) \sim_{+\infty} x$.
  f) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ alors $f(x) \sim_{-\infty} x$.
  g) Montrer que si f n'a pas de point fixe alors un des deux cas précédents est vérifié.
  h) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un intervalle.

6a) si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$ alors, d'après la question 3), $\forall x > 0, x > f(x) \geq f(0) + x$ donc $1 > \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(0)}{x} + 1$. Les fonctions qui encadrent $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers 1 quand $x \to +\infty$. J'en déduis que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ce qui signifie que $f(x) \sim_{+\infty} x$.
b) si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ alors, d'après la question 3), $\forall x < 0, x < f(x) \leq f(0) + x$ donc $1 > \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(0)}{x} + 1$. Les fonctions qui encadrent $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers 1 quand $x \to -\infty$. J'en déduis que $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ce qui signifie que $f(x) \sim_{-\infty} x$.
c) Supposons que f n'a pas de point fixe. Alors, $g: (x \mapsto f(x) - x)$ ne s'annule jamais sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que g garde toujours le même signe sur $\mathbb{R}$. Ou bien , $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$. Ou bien , $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$. On se trouve bien dans l'en des deux cas précédents.
d) Notons P l'ensemble des points fixes de f.
Ou bien f n'a pas de point fixe. Alors $P = \emptyset$ est un intervalle.
Ou bien f a un unique point fixe a. Alors $P = \{a\}$ est un intervalle.
Ou bien f a au moins deux points fixes. Soit a et b deux éléments distincts de P i.e. deux points fixes distincts de f tels que $a < b$.
Alors $\forall x \in [a,b], f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ (puisque f est croissante) et par suite, $a \leq x \leq b$ (puisque a *et* b points fixes de f).
Donc, $f([a,b]) \subset [a,b]$. Alors comme f est croissante, d'après la question 5c), $f_{/[a,b]} = id_{[a,b]}$ ce qui signifie que tous les points de $[a,b]$ sont fixes par f. Donc $[a,b] \subset P$. Ainsi, tout élément coincé entre deux éléments de P est encore élément de P. Cela signifie que P est un intervalle.

11) On suppose dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ .On admet le résultat suivant : si u et v sont deux fonctions telles que $\lim_{x \to s} u(x) = L$ *et* $\lim_{x \to s} v(x) = M$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq v(x)$ alors $L \leq M$.

B. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \geq 1$.
C. En déduire que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |(f^{-1})'(x)| \leq 1$.

a) Soit x un réel .
$\forall y \neq x, \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \geq 1$. Donc, $|f'(x)| = \lim_{y \to x} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \geq 1$.

b) f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, continue et strictement monotone et d'après a), $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \neq 0$ donc $f'(x) \neq 0$. Donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, |(f^{-1})'(x)| = \left|\frac{1}{f'\left(\left(f^{-1}(x)\right)\right)}\right| = \frac{1}{\left|f'\left(\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right|} \underbrace{\leq}_{\substack{car \\ \forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \geq 1 \; donc \\ \frac{1}{|f'(x)|} \leq 1}} 1$.