

Corrigé DL 7

Une équation fonctionnelle

On rappelle que $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur \mathbb{R}

On note $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \underbrace{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)}_{(**)} \right\}$.

On note F l'ensemble des éléments $f \in E$ tels que f ne soit pas la fonction nulle et f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

PARTIE 1 Exemples et premières propriétés des éléments de E .

1. Quelles sont les fonctions constantes éléments de E ?
2. Déterminer une fonction élément de F .
3. Démontrer que ch est élément de $E \setminus F$.
4. Montrer que si f est un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $(x \mapsto f(\alpha x))$ est élément de E .
5. Soit f un élément de E .
 - a. Montrer que $f(0) = 0$ ou 1 .
 - b. Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est identiquement nulle.
 - c. Montrer que si $f(0) = 1$ alors f est paire.

1. Soit λ un réel et $f: (x \mapsto \lambda)$.

Alors f est continue sur \mathbb{R} et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = \lambda + \lambda = 2\lambda$ et $2f(x)f(y) = 2\lambda^2$. Alors, f est solution de notre problème si et seulement si $2\lambda = 2\lambda^2$ si et seulement si $\lambda - \lambda^2 = 0$ si et seulement si $\lambda(1 - \lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Ainsi, les fonctions constantes éléments de E sont les fonctions constantes égales à 0 ou à 1.

2. La fonction \cos est élément de F car \cos est continue sur \mathbb{R} , s'annule en $\frac{\pi}{2}$ mais ne s'annule pas partout et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = 2\cos(x)\cos(y).$$

3. La fonction ch est continue sur \mathbb{R} , ne s'annule jamais donc $ch \notin F$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$ch(x+y) + ch(x-y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} + \frac{e^{x-y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{1}{2}e^x(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}e^{-x}(e^{-y} + e^y) = \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)(e^{-y} + e^y) = ch(x)(2ch(y)).$$

Donc, $ch \in E$.

4. Soit f un élément de E et $\alpha \in \mathbb{R}$. f est donc continue sur \mathbb{R} et $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ (**)

Comme f est continue sur \mathbb{R} , alors $g_\alpha: (x \mapsto f(\alpha x))$ est continue sur \mathbb{R} . De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

$$g_\alpha(x+y) + g_\alpha(x-y) = f(\alpha(x+y)) + f(\alpha(x-y)) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) \stackrel{\text{on applique(**) avec } X=\alpha x \text{ et } Y=\alpha y}{=} 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2g_\alpha(x)g_\alpha(y).$$

Donc $g_\alpha \in E$.

5. f est donc continue sur \mathbb{R} et $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ (**)

a) Alors, en prenant $X = Y = 0$ et $f(0+0) + f(0-0) = 2f(0)f(0)$. Donc $f(0)(1 - f(0)) = 0$ et finalement $f(0) \in \{0, 1\}$.

b) Supposons ici que $f(0) = 0$. Alors $\forall X \in \mathbb{R}, f(X) + f(X) = 2f(X)f(0) = 0$ i.e. $2f(X) = 0$. Donc $\forall X, f(X) = 0$. **f est donc la fonction nulle.**

c) Supposons que $f(0) = 1$. Alors $\forall Y \in \mathbb{R}, f(0+Y) + f(0-Y) = 2f(0)f(Y) = 2f(Y)$. Donc $f(-Y) = f(Y)$. Ainsi **f est paire.**

PARTIE 2 Description complète de E et F .

Soit f un élément de E tel que : $f(0) = 1$.

6. Justifier qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $\forall x \in [0, r], f(x) > \frac{1}{2}$. En déduire que $\int_0^r f(x)dx > 0$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$.
8. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv$.
9. En déduire que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
10. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
11. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.
12. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$.
13. En déduire tous les éléments de E qui vérifient $f(0) = 1$.
14. Quels sont les éléments de E et ceux de F ?

On montre ici que toute fonction continue, telle que $f(0) = 1$ et vérifiant (**), est de classe C^∞ .

f est continue sur \mathbb{R} , $f(0) = 1$ et $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ (**).

6. f est continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe un réel $r > 0$ tel que $\forall x \in [-r, r], |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$ i.e. $-\frac{1}{2} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in [0, r], \frac{1}{2} \leq f(x)$.

Alors, $\int_0^r \frac{1}{2} dx \leq \int_0^r f(x)dx$ donc, $0 < \frac{r}{2} \leq \int_0^r f(x)dx$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(y \mapsto f(x+y))$ est continue sur \mathbb{R} donc sur $[0, r]$. Par suite $\int_0^r f(x+y)dy$ existe.

$$\int_0^r f(x+y)dy \stackrel{\substack{CV \\ u=x+y \\ du=dy \\ y=0 \Leftrightarrow u=x \\ y=r \Leftrightarrow u=x+r}}{=} \int_x^{x+r} f(u)du.$$

$$\begin{matrix} CV \\ u=x-y \\ du=-dy \end{matrix}$$

De même, $(y \mapsto f(x-y))$ est continue sur \mathbb{R} et par suite, $\int_0^r f(x-y)dy \stackrel{CV}{=} \int_x^{x-r} f(u)(-du) = \int_{x-r}^x f(u)du$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$ et $\int_0^r f(x-y)dy = \int_{x-r}^x f(u)du$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(y \mapsto 2f(y)f(x))$ est aussi continue sur \mathbb{R} donc sur $[0, r]$.

De plus, $\forall y \in [0, r], f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. Donc $\int_0^r f(x+y)dy + \int_0^r f(x-y)dy = \int_0^r 2f(x)f(y)dy$. Alors d'après 7., $\int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(u)du = 2f(x) \int_0^r f(y)dy$ et par Chasles, $\int_x^{x+r} f(u)du = 2f(x) \int_0^r f(y)dy$.

9. f étant continue sur \mathbb{R} , f admet une primitive F sur \mathbb{R} qui est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Comme $\rho = \int_0^r f(y)dy \neq 0$, je peux affirmer, en utilisant 6., que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\rho} \int_{x-r}^{x+r} f(u)du = \frac{1}{\rho} [F(x+r) - F(x-r)]$ (**).

F étant de classe C^1 sur \mathbb{R} , $(x \mapsto F(x+r))$ et $(x \mapsto F(x-r))$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . J'en déduis que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} .

10. Alors F est de classe C^2 sur \mathbb{R} . Par conséquent, en utilisant (**), je conclus que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur \mathbb{R} .

Init : f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Propag : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est de classe C^n sur \mathbb{R} . Alors F est de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} . Par conséquent, en utilisant (**), je conclus que f est de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} .

CCL : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur \mathbb{R} ce qui signifie que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

11. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\rho} [F(x+r) - F(x-r)]$ donc $f'(x) = \frac{1}{\rho} [F'(x+r) - F'(x-r)] = f(x) = \frac{1}{\rho} [f(x+r) - f(x-r)]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \rho f'(x) = f(x+r) - f(x-r)$.

12. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{\rho} [f'(x+r) - f'(x-r)] = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} [f(x+r+r) - f(x+r-r)] - \frac{1}{\rho} [f(x-r+r) - f(x-r-r)] \right]$

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1}{\rho^2} [2f(x) + f(x-2r) - f(x+2r)] = \frac{1}{\rho^2} [2f(x) + 2f(x)f(2r)]$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$ où $\lambda = \frac{2(1+f(2r))}{\rho^2}$.

13. Cherchons tous les éléments de E vérifiant $f(0) = 1$.

D'après ce qui précède, si f est élément de E telle que $f(0) = 1$, alors f est donc solution d'une équation différentielle d'ordre 2 homogène et à coefficients constants dont l'équation caractéristique est : (e. c) : $r^2 - \lambda = 0$ et dont le discriminant est $\Delta = 4\lambda$.

1^{er} cas $\lambda < 0$. Posons $\omega = \sqrt{|\lambda|}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$. Alors $a = f(0) = 1$ et $\omega b = f'(0) = \frac{1}{\rho} [f(r) - f(-r)] \stackrel{\text{car } f \text{ est paire}}{=} 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(\omega x)$.

2^{ème} cas $\lambda = 0$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + bx$. Alors $a = f(0) = 1$ et $\omega b = f'(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$.

3^{ème} cas $\lambda > 0$. Posons $\omega = \sqrt{\lambda}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cosh(\omega x) + b \sinh(\omega x)$. Alors $a = f(0) = 1$ et $\omega b = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cosh(\omega x)$.

CCL : les éléments de E qui valent 1 en 0 sont donc de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ ou $(x \mapsto 1)$

Réciproquement, chacune des fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ ou $(x \mapsto 1)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$ est élément de E car \cos et \cosh sont éléments de E alors d'après 4., $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont éléments de E . De plus, chacune de ces fonctions vaut 1 en 0.

Ainsi, ces fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ ou $(x \mapsto 1)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions recherchées.

14. Les éléments de E sont donc toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ ou $(x \mapsto 1)$ ou $(x \mapsto 0)$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$.

autrement dit, E est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x)), (x \mapsto \cosh(\omega x))$ ou $(x \mapsto 0)$ tq $\omega \in \mathbb{R}$ (car pour $\omega = 0, \forall x, \cosh(\omega x) = \cosh(0) = 1$).

Parmi ces éléments de E , les éléments qui s'annulent sans être toutes nulles sont les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, F est constitué de toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ tq $\omega \in \mathbb{R}^*$.

PARTIE 3 On se propose de décrire F par une autre méthode.

Soit f un élément de F . On note $U = \{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}$.

15. **PRELIMINAIRE** : Soit $a > 0$, on note $D_a = \{a \frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}\}$.

Nous allons montrer, dans cette question, que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de D_a .

Soit x un réel.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq \frac{1}{an} 2^{q_n}$.

b. Montrer qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que : $0 \leq x - a \frac{p_n}{2^{q_n}} \leq \frac{1}{n}$.

c. En déduire que x est la limite d'une suite d'éléments de D_a .

15.a. $1 \leq \frac{1}{an} 2^{q_n} \Leftrightarrow an \leq 2^{q_n} \Leftrightarrow \ln(a) + \ln(n) \leq q_n \ln(2) \Leftrightarrow \frac{\ln(a) + \ln(n)}{\ln(2)} \leq q_n$.

Posons $q_n = \left\lceil \frac{\ln(a) + \ln(n)}{\ln(2)} \right\rceil + 1$. Ainsi, il existe $q_n \in \mathbb{N}$ tel que : $1 \leq \frac{1}{an} 2^{q_n}$.

b. $0 \leq x - a \frac{p_n}{2^{q_n}} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow p_n \leq 2^{q_n} \frac{x}{a} \leq p_n + \frac{2^{q_n}}{an}$. Posons $p_n = \left\lfloor 2^{q_n} \frac{x}{a} \right\rfloor$. Alors, $p_n \leq 2^{q_n} \frac{x}{a} < p_n + 1 \leq p_n + \frac{1}{an} 2^{q_n}$. Ainsi, p_n convient.

c. Posons $\forall n > 0, d_n = a \frac{p_n}{2^{q_n}} \in D_a$. Alors $\forall n > 0, 0 \leq x - d_n \leq \frac{1}{n}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, je peux conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = x$.

16. **BORNE SUP DE U**

a. Montrer que U admet une borne inférieure finie notée a .

b. Montrer par l'absurde que $f(a) = 0$. En déduire que $a > 0$.

c. Montrer que $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

16 f est continue sur \mathbb{R} non toute nulle donc $f(0) = 1$ et f paire et f s'annule au moins une fois

et $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, f(X+Y) + f(X-Y) = 2f(X)f(Y)$ (**).

a. $U = \{x \in \mathbb{R}^+ / f(x) = 0\}$.

$U \subset \mathbb{R}^{+*} \subset \mathbb{R}$. De plus, comme f est élément de F , f s'annule au moins une fois donc U est non vide. Enfin, U est minoré par 0. Ainsi, U admet une borne inférieure finie notée a .

b. f est continue en a donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Comme a est la borne inférieure de U , il existe une suite (u_n) d'éléments de U de limite a . Alors le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$. Or, $\forall n, u_n \in U$ donc $f(u_n) = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0$. J'en déduis par unicité de la limite que $f(a) = 0$. De plus, $\forall n, u_n > 0$ donc $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$. De plus, $f(0) = 1 \neq 0 = f(a)$.

Ainsi, $a \neq 0$ et finalement, $f(a) > 0$.

c. $f(0) = 1$ et $f(a) = 0$. De plus, $a = \inf(U)$ donc tout réel inférieur à a n'appartient pas à U i.e. f ne s'annule pas sur $[0, a[$. Comme f est continue, f ne change pas de signe sur $[0, a[$. Comme $f(0) = 1$, $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

17. QUI EST f ?

On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$ et $g: (x \mapsto \cos(\omega x))$.

- Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right]^2$.
- Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
- Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, f\left(a \frac{p}{2^q}\right) = g\left(a \frac{p}{2^q}\right)$.
- En déduire que $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.
- En déduire que $f = g$.
- Retrouver alors tous les éléments de F .

a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Prenons $X = \frac{a}{2^{q+1}} = Y$ dans (1). Alors $f\left(\frac{a}{2^{q+1}} + \frac{a}{2^{q+1}}\right) + f\left(\frac{a}{2^{q+1}} - \frac{a}{2^{q+1}}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$ i.e. $f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right)^2$.

b. Comme g vérifie aussi (1), $\forall q \in \mathbb{N}, g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right)^2$. Montrons par récurrence sur q que $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.
Init : $f(a) = 0 = g(a)$.

Propag : Soit $q \in \mathbb{N}$. Je suppose que $f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$. Alors $\left(f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right)^2 = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \right] \stackrel{\text{car } f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)}{=} \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 \right] = \left(g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right)^2$.

Comme $\frac{a}{2^{q+1}} \in [0, a[, f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$ et $\frac{\pi}{2a} \frac{a}{2^{q+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) > 0$. J'en déduis que $f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) = g\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right)$.

CCL : J'en conclus, par le théorème de récurrence simple, que $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

c. Soit $q \in \mathbb{N}$. Démontrons par récurrence double sur p que : $\forall p \in \mathbb{N}, f\left(a \frac{p}{2^q}\right) = g\left(a \frac{p}{2^q}\right)$.

$f\left(a \frac{0}{2^q}\right) = f(0) = g(0) = g\left(a \frac{0}{2^q}\right)$ et $f\left(\frac{a}{2}\right) = g\left(\frac{a}{2}\right)$ d'après b. Donc H_0 et H_1 sont vraies

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que H_p et H_{p-1} sont vraies. Alors

$$f\left(a \frac{p+1}{2^q}\right) = f\left(\frac{ap}{2^q} + \frac{a}{2^q}\right) \stackrel{\text{par (1)}}{=} 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{ap}{2^q} - \frac{a}{2^q}\right)$$

$$= 2f\left(\frac{ap}{2^q}\right)f\left(\frac{a}{2^q}\right) - f\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \stackrel{\text{car } H_{p-1}, H_p \text{ et } H_1 \text{ sont vraies}}{=} 2g\left(\frac{ap}{2^q}\right)g\left(\frac{a}{2^q}\right) - g\left(\frac{a(p-1)}{2^q}\right) \stackrel{\text{par (1) avec } X = \frac{ap}{2^q} \text{ et } Y = \frac{p}{2^q}}{=} g\left(a \frac{p+1}{2^q}\right).$$

J'en conclus, par le théorème de récurrence double, que $\forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right)$.

En considérant l'ensemble D_a défini au 15. En prenant $a = \inf U$, je peux affirmer que $\forall d \in D_a, f(d) = g(d)$.

d. Soit x un réel. Il existe une suite (d_n) d'éléments de D_a telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = x$. Alors $\forall n, f(d_n) = g(d_n)$. Et comme f et g sont continues en x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(d_n) = f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(d_n) = g(x)$. Alors, en passant à la limite dans (1), je peux conclure que $f(x) = g(x)$. Ainsi, $f = g$.

e. Les éléments de F sont donc de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$. Réciproquement, nous savons que toutes les fonctions de la forme $(x \mapsto \cos(\omega x))$ où $\omega > 0$ sont éléments de F . Ainsi, $F = \{(x \mapsto \cos(\omega x)) / \omega \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

FIN