Corrigé des devoirs de VACANCES DE FEVRIER

DERIVATION :

Rolle : Soit $a, b, et\ c$ trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Posons $f(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 - (a + b + c)t$.
f est continue sur [0,1] et dérivable sur]01[et vérifie $f(0) = 0 = f(1)$.
Alors les théorème de Rolle assure qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $f'(x) = 0$ $i.e.$ $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a + b + c) = 0$.
Rque : on peut aussi appliquer l'E.A.F à $g(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 entre\ 0\ et\ 1$.

Accroissements finis : Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Posons $g(t) = f(t) - f(-t)$. Soit $x > 0$.
g est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, x[$. Alors le théorème d'égalité des accroissements finis assure qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que : $g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0)$ $(**)$
Or, $g(0) = 0$ et $\forall t, g'(t) = f'(t) - \left(-f'(-t)\right) = f'(t) + f'(-t)$. Ainsi, $(**)$ s'écrit : $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Taylor-Lagrange : Montrer que : $\forall h \in [-1; 1], \forall x > 0, |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \frac{h^2x^2}{2} e^x$.

Soit $x > 0$.
exp est de classe C^2 sur $[-x, x]$ et $\forall t \in [-x, x], \left|exp^{(2)}(t)\right| = e^t \leq e^x$. Donc comme $0 \in [-x, x]$, l'inégalité de Taylor Lagrange assure que : $\forall t \in [-x, x]$, $|e^t - (1 + t)| \leq e^x \frac{|t-0|^2}{2} = \frac{t^2}{2} e^x$.
En particulier, $\forall h \in [-1; 1], -hx \in [-x, x]$, donc $|e^{-hx} - (1 - hx)| \leq \frac{(-hx)^2}{2} e^x = \frac{(hx)^2}{2} e^x$.

Critère de classe C^∞: Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x \leq 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o_0(x^n)$.

Posons $\forall x > 0, g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ $et\ \forall x > 0, h(x) = 0$. Alors, $f(x) = \begin{cases} g(x) si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ h(x) si\ x < 0 \end{cases}$.

g est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et h est C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \begin{cases} g^{(n)}(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x < 0 \end{cases}$ car $h^{(n)}(x) = 0$.

Cherchons la forme de $g^{(n)}(x)$:
$\forall x > 0, g^{(0)}(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $g^{(1)}(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ et $g^{(2)}(x) = \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ ....
Posons $H(n)$: « il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. "
<u>Initialisation</u> : Posons $P_0(t) = 1\ et\ P_1(t) = t^2$.
Alors $P_0\ et\ P_1$ sont polynomiales et $\forall x > 0, g^{(0)}(x) = P_0\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ et $g^{(1)}(x) = P_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. Donc $H(0)\ et\ H(1)$ sont vraies.
<u>Propagation</u> : Soit n un entier naturel. Supposons que $H(n)$ est vraie. Donc, il existe une fonction polynomiale P_n telle que :
$\forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. Alors $g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n{}'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}[-P_n{}'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right)] e^{-\frac{1}{x}}$.
Posons $P_{n+1}(t) = t^2[-P_n{}'(t) + P_n(t)]$.
Comme $P_n, P_n'\ et\ (t \mapsto t^2)$ sont polynomiales, P_{n+1} est polynomiale. De plus, $\forall x > 0, g^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$.
Donc $H(n + 1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.
<u>Conclusion</u> : Le théorème de récurrence assure que pour tout entier naturel n, $H(n)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x)$. Pour cela, déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h^{(n)}(x)$.
D'une part, $\lim\limits_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$. D'autre part, $\forall x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\substack{en\ posant \\ P_n(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k}} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}}$.
De plus, $\left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}} = e^{kln\left(\frac{1}{x}\right)} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x} - kln(x)} = e^{-\frac{1}{x}(1 + kxln(x))}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} xln(x) \overset{CC}{=} 0\ et\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^k e^{-\frac{1}{x}} = 0$
Par suite, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$.
J'en conclus que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x \neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$.

Conclusion : le critère de classe C^∞ assure que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} g^{(n)}(x)\ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \\ 0\ si\ x < 0 \end{cases}$.

Conséquence : On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$. Donc le polynôme de Taylor en 0 de f de rang n est le polynôme nul. Et la formule de Taylor Young assure que $f(x) = o_0(x^n)$.