Résumé Polynômes

Définition-Opérations-Degré-Polynômes dérivés.

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in K$, $P \in K[X]$ et $j \in \mathbb{N}$.

Un polynôme P à coefficients dans K est une suite presque nulle d'éléments de K. $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$. Les scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients de P.

$X \overset{def}{\triangleq} \left(0, \overset{rang\ 1}{\widehat{1}}, 0, 0 \dots, 0, 0, \dots\right)$ et $X^j = \left(0, .. 0, \overset{rang\ j}{\widehat{1}}, 0 \dots, 0, \dots\right)$.

Tout polynôme P s'écrit sous sa forme développée suivante : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq deg(P)$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ et cette écriture est unique . (déf)

Alors $P^{(j)} \overset{expression}{\triangleq} \begin{cases} \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} \ si\ n \geq j \\ 0\ si\ n < j \end{cases}$ et $\tilde{P}: \begin{pmatrix} K \to K \\ t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \end{pmatrix}$. **(déf)**

Tout polynôme P a son développement de Taylor en α (tq $\alpha \in K$) qui est $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$ où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq deg(P)$ et cette écriture est unique. **(Théorème de la formule de Taylor pour les polynômes)**

$\sum_{k=0}^{p} a_k X^k = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ sietssi $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$ (avec par définition, $\forall k > p, a_k = 0$ et $\forall k > q, b_k = 0$)
$\sum_{k=0}^{p} a_k (X-\lambda)^k = \sum_{k=0}^{q} b_k (X-\lambda)^k$ sietssi $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$ (avec par définition, $\forall k > p, a_k = 0$ et $\forall k > q, b_k = 0$)
Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
Le polynôme nul est le seul polynôme dont tous les polynômes dérivés admettent un scalaire α fixé comme racine.

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$. Alors,

$$\lambda . P \overset{def}{\triangleq} \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$$

$$P + Q \overset{def}{\triangleq} \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$$

$$P \times Q \overset{def}{\triangleq} \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \ où\ c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

$$P^j = \begin{cases} 1\ si\ j = 0 \\ P \times .. \times P = P^{j-1} P\ si\ j \geq 1 \end{cases}$$

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$$

Ces trois (.),(+) et ($\times$) opérations dans vérifient presque les mêmes propriétés que les opérations analogues dans K ; il est juste interdit de diviser par un polynôme. En particulier , la multiplication polynomiale est **intègre** i.e. $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0\ ou\ Q = 0$.
Et , $\forall (k,m) \in \mathbb{N}^*, X^k X^m = X^{k+m}$ et $X^k \circ X^m = (X^k)^m = X^{km}$......

$\deg(P) \overset{def}{\triangleq} \begin{cases} -\infty\ si\ P = 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\}\ si\ P \neq 0 \end{cases}$

$\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty\ si\ \lambda = 0. \\ deg(P)\ si\ \lambda \neq 0 \end{cases} \leq \deg(P)$

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ et si $deg(P) > deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \deg(P)$

$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$ si Q $non\ nul$

$\deg(P^j) = \begin{cases} -\infty\ si\ P = 0\ et\ j \neq 0 \\ j deg(P)\ si\ P \neq 0 \end{cases}$

$\deg(P^{(j)}) = \begin{cases} \deg(P) - j\ si\ \deg(P) \geq j \\ -\infty\ si\ \deg(P) < j \end{cases}$

$\mathrm{codom}(\lambda P) = \lambda codom(P)$ si $P \neq 0$ et $\lambda \neq 0$

$\mathrm{codom}(P \circ Q) = codom(P) \times (codom(Q))^{\deg(P)}$ si $P \circ Q \neq 0$

$\mathrm{codom}(PQ) = codom(P) \times codom(Q)$ si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Si $P \neq 0$ alors $\mathrm{codom}(P^j) = (codom(P))^j$

si $\deg(P) \geq j$ alors $\mathrm{codom}(P^{(j)}) = \frac{\deg(P)!}{(\deg(P)-j)!} codom(P)$.

Une combinaison linéaire des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$ est tout polynôme de la forme : $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ éléments de K. **(déf)**
$\deg(P_1 + P_2 + \cdots + P_m) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_m))$
$\deg(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k) \leq \max(\deg(\lambda_1 P_1), \dots, \deg(\lambda_{km} P_m)) \leq \max(\deg(P_1), \dots, \deg(P_m))$
$et\ si$ $\forall k \in [\![2, m]\!], \deg(P_k) < \deg(P_1)$ alors $\deg(P_1 + P_2 + \cdots + P_m) = \deg(P_1)$.

$$\deg(P_1 P_2 \dots P_m) = \sum_{k=1}^{m} \deg(P_k)$$

$K[X]$ est l' ensemble de tous les polynômes à coefficients dans K (à une indéterminée X).
$K_n[X]$= est l' ensemble de tous les polynômes à coefficients dans K (à une indéterminée X) et de degré inférieur ou égal à n.
$K[X] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k / n \in \mathbb{N}\ et\ a_0, ., a_n \in K\}$ et pour chaque entier naturel n , $K_n[X] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k / a_0, ., a_n \in K\}$.

Divisibilité

Soit A et B deux polynômes de $K[X]$ et B non nul.

La division euclidienne de A par B assure qu'$\exists!\,(Q,R)\in K[X]^2/A=BQ+R$ et $\deg(R)<\deg(B)$ **(Théorème de la division euclidienne).**

B divise $A \Leftrightarrow \exists Q\in K[X]/A=BQ$

$\Leftrightarrow$ *le reste de la division euclidienne de A par B est nul*

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{si\ B\ est\ scindé}$ *toutes les racines de B sont racines de A avec une multiplicité dans A supérieure ou égale à celle dans B.*

.

Racines-Multiplicité

Soit $P\in K[X]$ *et* $\alpha\in K$ *et* $m\in\mathbb{N}$.

α est racine de P

$\Leftrightarrow\ \tilde{P}(\alpha)=0$ **(déf)**

$\Leftrightarrow\ (X-\alpha)$ divise $P\Leftrightarrow\exists Q\in K[X]/P(X)=(X-\alpha)Q(X).$

α est racine de P dans K d'ordre de multiplicité m

$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists Q\in K[X]/P=(X-\alpha)^mQ(X).\\ \quad et\ \ \tilde{Q}(\alpha)\neq 0\end{cases}$ **(déf)**

$\Leftrightarrow\begin{cases}\tilde{P}(\alpha)=\widetilde{P'}(\alpha)=\cdots=\widetilde{P^{(m-1)}}(\alpha)=0\\ \quad et\ \widetilde{P^{(m)}}(\alpha)\neq 0\end{cases}.$

α est racine de P dans K d'ordre de multiplicité au moins m

$\Leftrightarrow\ \exists Q\in K[X]/P=(X-\alpha)^mQ(X)$ **(déf)**

$\Leftrightarrow\tilde{P}(\alpha)=\widetilde{P'}(\alpha)=\cdots=\widetilde{P^{(m-1)}}(\alpha)=0$

P admet les racines distinctes $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ de multiplicité $m_1,m_2,\dots,m_s$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\exists Q\in K[X]/P\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}\,Q(X).\\ \quad et\ \forall k\in[\![1,s]\!],\tilde{Q}(\alpha_k)\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall k\in[\![1,s]\!],\tilde{P}(\alpha_k)=0=\widetilde{P'}(\alpha_k)=\cdots=\widetilde{P^{(m_k-1)}}(\alpha_k)=0\\ \quad et\ \ \widetilde{P^{(m_k)}}(\alpha_k)\neq 0\end{cases}$

Si le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a une racine complexe ω non réelle de multiplicité m alors $\bar{\omega}$ est aussi racine de P de multiplicité m.

P est scindé sur K

$\Leftrightarrow$ *P est non nul et est un produit de polynômes de degré* 1 **(déf)**

$\Leftrightarrow$ *il existe* $\lambda\in K^*$ *et des scalaires distincts* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ *et des entiers naturels non nuls* $m_1,m_2,\dots,m_s$ *tels que:*

$$P=\lambda\prod_{k=1}^{s}(X-\alpha_k)^{m_k}\quad (\textbf{la}\ forme\ scindée\ de\ P\ dans\ K[X])$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s \text{ de multiplicité au moins } m_1,m_2,\dots,m_s\\ \quad et\quad \deg(P)=\sum_{k=0}^{s}m_k\\ \quad et\ \lambda=codom(P)\end{cases}.$$

Le nombre de racines dans K d'un polynôme non nul de $K[X]$ est inférieur à son degré.

Le polynôme nul est le seul polynôme qui a plus de racines que son degré.

Si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, $n=\deg(P)\geq 1$, est scindé alors la somme ses racines est égale à ....et le produit de ses racines est égal à ....

Egalité de deux polynômes

$P=0\Leftrightarrow$tous les coefficients de P sont nuls

$\Leftrightarrow P$ a une infinité de racines

$\Leftrightarrow P$ a plus de racines que son degré$\Leftrightarrow deg(P)<0$

$\Leftrightarrow\exists\alpha\in K/\forall k\in\mathbb{N},P^{(k)}(\alpha)=0.$

$P=Q\Leftrightarrow P\ et\ Q\ ont\ les\ mêmes\ coefficients$ **(unicité des coefficients d'un polynôme)**

$\Leftrightarrow\ P-Q\ a\ une\ infinité\ de\ racines\ ou\ plus\ de\ racines\ que\ son\ degré$ **(nombre de racines du polynôme nul)**

$\Leftrightarrow\ \exists\alpha\in K/\forall k\in\mathbb{N},P^{(k)}(\alpha)=Q^{(k)}(\alpha)$ **(formule de Taylor)**

$\Leftrightarrow P$ et Q ont les mêmes coefficients dominants et les mêmes racines complexes avec la même multiplicité. **(Forme scindée sur $\mathbb{C}$)**

Forme scindée-Factorisation en produit de facteurs irréductibles.

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant possède au moins une racine complexe. **(Théorème de d'Alembert-Gauss)**

Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ non constant et de degré d a exactement d racines complexes comptées avec leur multiplicité et est scindée dans $\mathbb{C}[X]$ (ou sur $\mathbb{C}$). Cette écriture sous forme scindée est unique.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Pour obtenir cette forme scindée sur $\mathbb{C}$,

1. Je cherche les racines de P (évidente ou je résous $\tilde{P}(z) = 0$).
2. Je cherche la multiplicité de chacune des racines de P (on regarde si ces racines sont aussi racines de P', P'' ….)
3. Je compte les racines trouvées avec leur multiplicité et je compare ce compte avec $deg(P)$.
4. Si j'ai toutes les racines, je cherche $codom(P)$ et je donne la forme scindé.

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a un nombre pair de racines complexes non réelles et si P a une racine complexe ω non réelle de multiplicité m alors $\overline{\omega}$ est aussi racine de P de multiplicité m et $(X-\omega)^m(X-\overline{\omega})^m = (X^2 - 2Re(\omega)X + |\omega|^2)^m$divise P.
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ degré impair a au moins une racine réelle.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.
Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ non constant s'écrit comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et
Pour obtenir cette écriture,

1. je factorise P dans $\mathbb{C}[X]$. Puis dans cette factorisation ,
2. j'isole les facteurs à racines réelles
3. je regroupe deux par deux les facteurs à racines complexes conjuguées pour faire apparaitre $(X^2 - 2Re(\omega)X + |\omega|^2)^m$ polynôme de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Rappel : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les racines $N^{ièmes}$ de l'unité sont : ………..
Si $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ $(r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R})$ alors les racines $N^{ièmes}$ de a sont ……….

Décomposition en éléments simples.

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fonction rationnelle réelle, alors les étapes de sa décomposition en éléments simples sont :

1. J'effectue la division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ et je réécris $F = \frac{BQ+R}{Q} = B + \frac{R}{Q}$.
2. J'écris de manière théorique la décomposition en éléments simples de $G = \frac{R}{Q}$.
3. Je cherche les coefficients de cette décomposition en utilisant $\lim\limits_{x\to\alpha}(x-\alpha)^m G(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x)$, en utilisant des valeurs autorisées $G(0), G(1)$ …, en utilisant la parité éventuelle de G.

Application : calcul intégral, simplifications de sommes, calcul de dérivées nièmes.