Fonctions dérivables

Définition d'une fonction dérivable en a, dérivable à gauche et à droite en a, dérivable sur un domaine.

f *est dérivable en un réel* a *lorsque* $a \in Df$ *et* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie. Dans ce cas,* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) =$ *nombre dérivé de* f *en* a *et la droite d'équation* $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ *est la tangente à* Cf *en* a.

f *est continue à droite en* a *lorsque* $a \in Df$ *et* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie. Alors,* $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f_d{}'(a) =$ *nombre dérivé à droite de* f *en* a et la droite d'équation $y = f(a) + f_d{}'(a)(x-a)$ est la demi-tangente à droite de Cf en a.

f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I.

Caractérisations de la dérivabilité

f *dérivable en* a sietssi f *est dérivable à droite et à gauche en* a *et* $f_d{}'(a) = f_g{}'(a)$.

f *dérivable en* a *et* $L = f'(a)$ sietssi f *admet le* $DL_1(a)$.: $f(x) = f(a) + L(x-a) + o_a(x-a)$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en a et λ est une constante alors $\lambda f, f+g$ et fg sont dérivables en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), (f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Si f et g sont dérivables sur D et λ est une constante alors $\lambda f, f+g$ et fg sont dérivables sur D et

$\forall a \in D, (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur D et $\forall a \in D, g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur D et

$\forall a \in D,\ \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Si f est dérivable sur D et g est dérivable sur E et $\forall a \in D, f(a) \in E$ alors $g \circ f$ est dérivable sur D et $\forall a \in D$,

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Théorème fondamentaux

Si I est un intervalle et a est un réel intérieur à I et $f: I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et admet un extremum (local ou global) en a alors $f'(a) = 0$.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Théorème de Rolle.

Si a et b sont des réels tq $a < b$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(EAF) Théorème d'égalité des accroissements finis

Si f est continue sur l'intervalle I et dérivable sur I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Théorème d'inégalités des accroissements finis

Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I et il existe un réel M tel que : $\forall t \in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq \underbrace{M}_{\substack{Indépendant\ de\ t \\ mais\ dépendaqnt\ de\ I\ et\ n}}$ alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. Inégalité de Taylor-Lagrange

pour tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Applications à l'étude de fonctions

Si f est continue sur **l'intervalle** I et dérivable sur l'intérieur de I alors

f est croissante sur l'intervalle I sietssi f' est positive sur l'intérieur de I. Théorème « monotonie et signe de la dérivée ».

f est décroissante sur l'intervalle I sietssi f' est négative sur l'intérieur de I.

f est constante sur l'intervalle I sietssi f' est nulle sur l'intérieur de .

Si a est un élément de l' **intervalle** I et est continue en a et dérivable au moins sur $I \backslash \{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$

Si a est un élément de l' intervalle I et f est continue en a et dérivable au moins sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim_{x\to a} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$ et f' est continue en a. . critère de dérivabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. I *est* **un intervalle,** $a \in I, L_0$ *un réel et* $f: \left(x \mapsto \begin{cases} g(x) & si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_0 & si\ x = a \end{cases}\right)$. critère de classe C^n.

Si *de classe* C^n *sur* $I\backslash\{a\}$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = L_0$ *et* $\forall k \in [\![1,n]\!], \lim_{x\to a} g^{(k)}(x) = L_k \in \mathbb{R}$

alors f *est de classe* C^n sur I *et* $\forall k \in [\![1,n]\!], f^{(k)}: \left(x \mapsto \begin{cases} g^{(k)}(x) & si\ x \in I\backslash\{a\} \\ L_k & si\ x = a \end{cases}\right)$

Définition et propriété d'une fonction convexe/concave

f est convexe sur l'intervalle I lorsque $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

f est concave sur l'intervalle I lorsque $\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Si f est convexe (ou concave) sur l'intervalle I alors f est continue en tout point intérieur à I et est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I.

Si f est convexe sur l'intervalle I alors $\forall (a,b,c) \in I^3, \left(a < b < c \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\right)$

Caractérisation d'une fonction convexe.

f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** $\forall a \in I, \tau_a: \left(x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est croissante sur $I\backslash\{a\}$.

Ici f est dérivable sur l'intervalle I. f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** f'est croissante sur I **sietssi** $\forall (a,x) \in I^2, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Ici f est deux fois dérivable sur l'intervalle I. f est convexe sur l'intervalle I **sietssi** $f'' \geq 0$ sur I.

Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue (par morceaux).

Définition de l'intégrale de différentes fonctions

Une subdivision de $[a,b]$ est une famille de réels $(a_k)_{k=0..n}$ $tels\ que\ a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$.
Une fonction en escalier sur $[a,b]$ est une application e de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k\in [\![0,n-1]\!]$, $e_{/]a_k,a_{k+1}[}$est constante. Si $\forall k\in[\![0,n-1]\!], \forall x\in]a_k,a_{k+1}[, e_{/]a_k,a_{k+1}[}(x)=\lambda_k$ alors par définition$\int_{[a,b]}e(x)dx=\int_a^b e(x)dx\ =\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\,(a_{k+1}-a_k)$. Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à e.

Si f est continue et réelle sur le segment $[a,b]$ alors
il existe une suite (e_n) de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que $sup_{[a,b]}|f-e_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ $(**)$ et $\left(\int_a^b e_n(x)dx\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers un réel L

et si (e_n) est une autre suite de fonctions en escalier vérifiant $(**)$ alors $\left(\int_a^b e_n(x)dx\ \right)_{n\in\mathbb{N}}$converge aussi vers ce même réel L. Par définition, $\int_a^b f(x)dx\ =L$.

Si f est continue et complexe sur le segment $[a,b]$ alors$\int_a^b f(x)dx\ =\int_a^b Re\big(f(x)\big)dx\ +i\int_a^b Im\big(f(x)\big)dx$, autrement dit,

$$Re\left(\int_a^b f(x)dx\right)\ =\int_a^b Re\big(f(x)\big)dx\ \ et\ Im\left(\int_a^b f(x)dx\right)\ =\int_a^b Im\big(f(x)\big)dx$$

Une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ est une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision$(a_k)_{k=0..n}$de $[a,b]$ et $\forall k\in[\![0,n-1]\!], f_k=f_{/]a_k,a_{k+1}[}$est continue sur $]a_k,a_{k+1}[$ et est prolongeable par continuité en a_k et en a_{k+1}. Alors par définition, $\int_a^b f(x)dx\ =\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\widetilde{f_k}(x)dx$. Cette définition est indépendante de la subdivision adaptée à f.

Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors par définition, $\int_b^a f(x)dx\ =-\int_a^b f(x)dx\ \ et\ \int_a^a f(x)dx\ =0$.

Si f est continue par morceaux sur un intervalle I alors $\forall(a,b)\in I^2, \int_b^a f(x)dx\ \ existe$.

Propriétés générales

<u>Relation de Chasles</u> : Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(a,b,c)\in I^2, \int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$.

<u>Linéarité</u> : Si f et g sont continues (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(\alpha,\beta)\in K^2, \forall(a,b)\in I^2, \int_a^b \alpha f(t)+\beta g(t)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$.

<u>Positivité</u> : Si f est réelle, continue (par mcx) et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt\geq 0$.

<u>Croissance</u> Si f et g sont réelles, continues (par mcx) et $\forall t\in[a,b], f(t)\leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt\leq\int_a^b g(t)dt$.

<u>Inégalité triangulaire</u> : Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I alors $\forall(a,b)\in I^2, \left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\left|\int_a^b|f(t)|dt\right|$.

Théorème fondamental de l'intégration et sa conséquence. Théorème fondamental de calcul intégral

TFI Si f est **continue** sur un intervalle I et $a\in I$ alors $(x\mapsto\int_a^x f(t)dt)$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Par conséquent, toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

TFCI : Si f est **continue** sur l'intervalle I alors pour toute primitive F de f sur I , $\forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\boldsymbol{I}^2, \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)\ \overset{notation}{\triangleq}\ [F(t)]_a^b$.

Relation entre f et f'-*IPP*- *CV*

Si f est **de classe C^1** sur l'intervalle I et $a\in I$ alors $\forall x\in I, f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$.

Si f et g sont **de classe C^1** sur l'intervalle I alors $\forall(a,b)\in I^2$ $\int_a^b f'(t)g(t)dt=[f(t)g(t)]_a^b-\int_a^b f(t)g'(t)dt$.

Si φ est de classe C^1 sur l'intervalle I et f est continue sur $\varphi(I)$ alors $\forall(a,b)\in I^2, \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(x)dx=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Lemme d'annulation et sa contraposée

Si f est **réelle, continue et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)dt=0$ alors $\forall x\in[a,b], f(x)=0$.

Si f est **continue** , **réelle et positive** sur l'intervalle $[a,b]$ et $\exists x\in[a,b], f(x)\neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt>0$.

Moyenne d'une fonction continue sur un segment. Inégalité et égalité de la moyenne

Lorsque f est continue (par mcx) sur $[a,b]$, la moyenne de f entre a et b est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\left(=\frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)dt\right)$.

Si f est <u>continue et réelle</u> sur $[a,b]$, alors $min_{[a,b]}f\ \leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leq\ max_{[a,b]}f$. Inégalité de la moyenne

Si f est continue (par mcx) sur l'intervalle I et bornée sur I alors $\forall(a,b)\in I^2, \left|\int_b^a f(t)dt\right|\leq[sup_I|f|]\times|b-a|$.

Si f est <u>continue et réelle</u> sur $[a,b]$ alors $\exists c\in[a,b], f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. Egalité de la moyenne

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si f et g sont **continues et réelles** sur $[a,b]$, alors $\left(\int_b^a f(t)g(t)dt\right)^2\leq\left(\int_b^a f(t)^2dt\right)\left(\int_b^a g(t)^2dt\right)$.

Sommes de Riemann

Si f est **continue** sur $[a,b]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$.

Cas particulier : Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$.