Corrigé du DL 9
Fonctions convexes, sommes de Riemann et intégrales

A. Une nouvelle inégalité de convexité.

1. Soit φ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .
   1.1 Rappeler sans démonstration la propriété de continuité vérifiées par φ.
   1.2 Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n}$".
   (indication : on remarquera que $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}$
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(J) \subset I$. Soit $(a,b) \in J^2$ tel que $a < b$.
   2.1 Déterminer la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ et justifier que cette limite appartient à I.
   2.2 Déterminer la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$.
   2.3 Déduire de tout ce qui précède que $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)dt$ (indication : on choisira judicieusement x_k).
   2.4 Enoncer un résultat analogue au 2.2 dans le cas où φ est une fonction concave sur I.

B. Application

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx.$
   3.1 Justifier que : $\forall x > 0, \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.
   3.2 En déduire que (I_n) est majorée.
   3.3 Montrer en utilisant 2., que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(I_n) \geq \frac{1}{n-1}\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$
   3.4 En déduire que (I_n) est convergente de limite e.

1.1 φ étant une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, φ est continue en tout point intérieur à I donc en tout point de I puisque I est ouvert ($\mathring{I} = I$). De plus φ est dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

1.2 Soit $H(n)$ la propriété : pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n}$.

Initialisation : $H(1)$ est vraie car pour tout $x_1 \in I, \varphi\left(\frac{x_1}{1}\right) = \varphi(x_1) = \frac{\varphi(x_1)}{1} \leq \frac{\varphi(x_1)}{1}$.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in I^{n+1}$. Montrons que $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_{n+1})}{n+1}$.

Je remarque que $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}$. Donc, $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1}\right) = \varphi\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right]$.

Comme φ est convexe et $\lambda = \frac{1}{n+1} \in [0,1]$ et $X = x_{n+1} \in I$ et $Y = \left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n) \in I$ (car $\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ est la moyenne des $x_1, x_2, \dots, x_n$, éléments de I, donc se trouve entre le $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $et\ le$ $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc dans I), $\varphi(\lambda X + (1-\lambda Y) \leq \lambda\varphi(X) + (1-\lambda)\varphi(Y)$ autrement dit,

$\varphi\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{x_{n+1}}{n+1}\right] \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] + \frac{1}{n+1}\varphi(x_{n+1})$.

De plus, $H(n)$ assure que $\varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n}$. Donc, comme $1-\frac{1}{n+1} \geq 0$,

$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\varphi\left[\left(\frac{1}{n}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right] \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n} = \frac{n}{n+1}\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n} = \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n+1}$. Et ainsi, $\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1}\right) \leq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_n)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\varphi(x_{n+1}) = \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+..+\varphi(x_{n+1})}{n+1}$. OK !!!

J'en **conclus** que $\forall n \geq 1, H(n)\ est\ vraie.$

2.1 f est continue sur l'intervalle J donc sur $[a,b]$. Alors le théorème des sommes de Riemann assure que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$.Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$

f étant continue sur J , $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [min_J f, max_J f]$ d'après le théorème de la moyenne. Or, il existe $c \in J$ tel que $f(c) = min_J f$.Comme $f(J) \subset I, min_J f = f(c) \in I\llbracket$. De même , $max_J f \in I$. Comme I est un intervalle, je peux alors affirmer que $[min_J f, max_J f] \subset I$. J'en déduis que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in I$.

2.2 f est continue sur l'intervalle J et φ est continue sur l'intervalle I et $f(J) \subset I$ donc $\varphi \circ f$ est continue sur J donc sur $[a, b]$. Alors le théorème des sommes de Riemann assure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \int_a^b \varphi(f(t))dt$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(t))dt$.

2.3 Posons $\forall k \in [\![1, n]\!], a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ et $x_k = f(a_k)$. Alors, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des éléments de J. Donc, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des éléments de J. Alors d'après 1. , $\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{\varphi(x_1)+..+\varphi(x_n)}{n}$ i.e. $\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \overset{(**)}{\lesseqgtr} \frac{\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)}{n}$.

Comme φ est continue sur I , φ est continue en $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)$. Alors, par passage à la limite dans l'inégalité $(**)$, je peux conclure que $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)dt$.

2.4 Si φ est concave sur I et f est continue sur J et $f(J) \subset I alors$ $\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f(t)dt$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$.

3.1 Je sais que $\forall t \ge 0$, $\ln(1+t) \le t$. Donc $\forall x > 0, t = \frac{1}{x} > 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$.

3.2 Donc $\forall x \in [\![1, n]\!], \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$. Alors comme exp est croissante, $\left(1+\frac{1}{\mathrm{x}}\right) \le e^{\frac{1}{x}}$ et comme la fonction $\left(t \mapsto t^x = e^{x\ln(t)}\right)$ est aussi croissante, $\left(1+\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^x \le \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x = e$. Il en découle, par croissance de l'opérateur intégral, que $\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx \le \int_1^n e dx = e(n-1)$. Ainsi, $I_n \le e$. La suite I est donc majorée par e.

3.3. ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f: (x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1$ et n sont dans $\mathbb{R}^{+*}$. Donc la question 2.4 assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx\right) \ge \frac{1}{n-1}\int_1^n \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) dx$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(I_n) \ge \frac{1}{n-1}\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

3.4 Posons $V_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \ge e^{V_n}$.

$\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^n x[\ln(1+x) - \ln(x)]dx = \left[\frac{x^2}{2}[\ln(1+x) - \ln(x)]\right]_1^n - \int_1^n \frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}\right] dx$

$= \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_1^n \left[\frac{-x}{1+x}\right] dx = \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_1^n \left[-1 + \frac{1}{1+x}\right] dx$

$= \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}[-x + \ln(1+x)]_1^n = \frac{n^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}[-n + \ln(1+n) + 1 - \ln(2)]$

$\frac{1}{n-1}\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \frac{n^2}{2(n-1)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\ln(2)}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-1)}[-n + \ln(1+n) + 1 - \ln(2)] = \frac{n^2}{2(n-1)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} - \frac{\ln(1+n)}{2(n-1)}$

$Or, \frac{n^2}{2(n-1)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2(n-1)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. De plus, $\frac{\ln(1+n)}{2(n-1)} \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{2(n+1)}$ $Or,$ $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissance comparée. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{2(n+1)} = 0$ et par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{2(n-1)} = 0$.J'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} e^{V_n} = e$. La suite (I_n), étant encadrée par deux suites de limite e, converge vers e.