CORRIGE DL 8

Ex 1 Une autre généralisation des accroissements finis

1. Soit a un réel et b un réel ou un infini tel que $a < b$.
Soit u et v deux fonctions définies sur un même segment $[a, b[$, à valeurs réelles et telles que :

- u et v sont continues sur $[a, b[$
- u et v sont dérivables sur $]a, b[$
- $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$.

Montrer en étudiant les fonctions $u + v$ et $u - v$ que : $\forall x \in [a, b[, |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

7. Posons $g = u + v$ et $h = u - v$. Alors g et h sont continues sur $[a, b[$ et dérivables sur $]a, b[$ puisque u et v le sont.
Et $\forall x \in]a, b[, g'(x) = u'(x) + v'(x)$ et $h'(x) = u'(x) - v'(x)$.
Or, $\forall x \in]a, b[, |u'(x)| \leq v'(x)$ $i.e.$ $-v'(x) \leq u'(x) \leq v'(x)$ donc $g'(x) \geq 0$ et $h'(x) \leq 0$. Alors, g est croissante et h est décroissante sur $[a, b[$. Donc $\forall x \in [a, b[,\ g(x) \geq g(a)$ et $h(x) \leq h(a)$ i.e. $u(x) + v(x) \geq u(a) + v(a)$ et $u(x) - v(x) \leq u(a) - v(a)$.
Ainsi, $\forall x \in [a, b[,\ -(v(x) - v(a)) \leq u(x) - u(a) \leq v(x) - v(a)$.
Cela signifie que $\forall x \in [a, b[,\ |u(x) - u(a)| \leq v(x) - v(a)$.

2. **APPLICATION** : Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.
   - **a.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.
   - **b.** En déduire , en utilisant la généralisation des accroissements finis, que $\forall x \geq A, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.
   - **c.** Justifier que : $\exists B \geq A / \forall x \geq B, |f(x)| \leq \varepsilon$.
   - **d.** Qu'en déduit-on sur f ?

8. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; +\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + f'(x) = 0$. On pose $h(x) = f(x)e^x$.
a. Soit $\varepsilon > 0$. h est dérivable sur $[a\,; +\infty[$ et $\forall x \geq a, h'(x) = \big(f'(x) + f(x)\big)e^x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x)\, e^{-x} = 0$.
Alors $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)e^{-x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ i.e. $|h'(x)|e^{-x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\exists A \geq a / \forall x \geq A, |h'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x$.

b. Alors en utilisant 7. avec $u(x) = h(x)$ et $v(x) = \frac{\varepsilon}{2} e^x$ sur $[A, +\infty[$, j' obtiens : $\forall x \geq A, |h(x) - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$.
Donc, $\forall x \geq A, |f(x)e^x - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$ donc $|f(x)e^x| - |h(A)| \leq |f(x)e^x - h(A)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A$.
Ainsi, $\forall x \geq A,\ e^x|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} e^x - \frac{\varepsilon}{2} e^A + |h(A)|$
et alors, puisque $e^x > 0$, $\forall x \geq A,$ $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x} + |h(A)|e^{-x} \underbrace{\leq}_{car\ \frac{\varepsilon}{2} e^{A-x} > 0} \frac{\varepsilon}{2} + |h(A)|e^{-x}$.

c. $|h(A)|$ $étant$ une $constante$, $\lim\limits_{x \to +\infty} |h(A)|e^{-x} = 0$. Donc, $\exists C \geq 0 / \forall x \geq C, \big||h(A)|e^{-x}\big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $B = \max(A, C)$. Alors , $B \geq A$ et $\forall x \geq B, |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

d. Nous pouvons alors conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soient $f : ([a, b] \to \mathbb{R})$ telle que f , $f'et$ f''sont définies et continues sur $[a, b]$ et f'' est dérivable sur $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$.
<u>Indication</u> : on introduira $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\ \big(f'(x) + f'(a)\big) - A(x - a)^3$ où A est une constante que l'on choisira judicieusement.

Soit $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{2}\ \big(f'(x) + f'(a)\big) - A(x - a)^3$ où A est une constante que l'on va choisir de sorte que g vérifie les hypothèses de théorème de Rolle. g est de classe C^1sur $[a, b]$ et deux -fois dérivable sur $]a, b[$.
Et, $\forall x \in [a, b], g'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(a)) - \frac{(x-a)}{2}\ f''(x) - 3A(x - a)^2$ et $\forall x \in]a, b[, g''(x) = \frac{(x-a)}{2}(f'''(x) - 12A)$.
Donc, $g(a) = g'(a) = 0$.

Choisissons A tel que $g(b) = 0$. Donc, prenons $A = \frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right)}{(b-a)^3}$. Alors, appliquons le théorème de Rolle à g : il existe donc un réel $d \in]a, b[$ tel que : $g'(d) = 0$. Comme f' est continue sur $[a, d]$ et dérivable sur $]a, d[$ et $g'(d) = g'(a) = 0$, il existe un réel $c \in]a, d[$ tel que : $g''(c) = 0$ et donc $\frac{(c-a)}{2}(f'''(c) - 12A) = 0$ et finalement , $A = \frac{f'''(c)}{12}$. Ainsi, $\frac{f(b)-f(a)-\frac{(b-a)}{2}\left(f'(b)+f'(a)\right)}{(b-a)^3} = \frac{f'''(c)}{12}$ et j'en conclus que : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a) + f'(b)\big) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$