DL 11

Calcul de la limite de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ quand $n \to +\infty$.

A. Première méthode par les polynômes

Soit n un entier strictement positif et $P_n = \frac{1}{2i}[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}]$.

1. Montrer que P_n appartient à $\mathbb{R}[X]$. Préciser le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ (dans $\mathbb{R}[X]$) et déterminer sa forme scindée.
3. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
4. Factoriser Q_n sous forme scindée dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Calculer les sommes : $S_n = \sum_{k=1}^{n} cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.
6. Prouver l'inégalité suivante : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{sin^2 x}$.
7. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

B. Deuxième méthode par l'intégration

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Justifier que la suite (S_n) converge.
2. Prouver que si f est une fonction réelle de classe C^1sur $[a,b]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$
3. Montrer que $\varphi : \left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} & si\ t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on donnera une expression φ' .
4. Posons $h(t) = at^2 + bt + c$. Trouver les réels $a,\ b\ et\ c$ tels que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} h(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0,\pi], h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.
6. En déduire que $S_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u}{\pi} - 1\right)\varphi(u)\sin\big((2n+1)u\big)\,du - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$.
7. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.