INTEGRATION :

Sommes de Riemann : Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ et $s_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$

1. $\forall n > 0, w_n > 0$ donc $u_n = ln(w_n)$ existe et $w_n = e^{u_n}$.

$\forall n > 0, u_n = \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(t) = \ln(1+t)$.

Comme f est continue sur $[0,1]$ et $u_n$est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 ln(1+t)dt \underbrace{=}_{CV\ u=1+t} \int_1^2 ln(u)du = [uln(u)-u]_1^2 = 2ln(2)-1.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^{2ln(2)-1} = e^{2ln(2)}e^{-1} = e^{ln(4)}e^{-1} = \frac{4}{e}$.

2. Soit $n > 0$.

$s_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2} \underbrace{=}_{\substack{k=p+n\\p=k-n}} \sum_{p=0}^{n}\frac{p+n}{(p+n)^2+n^2} = \sum_{p=0}^{n}\frac{n\left(\frac{p}{n}+1\right)}{n^2\left[\left(\frac{p+n}{n}\right)^2+1\right]} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{\left(\frac{p}{n}+1\right)}{\left[\left(\frac{p}{n}+1\right)^2+1\right]} = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$ où $f(t) = \frac{(t+1)}{[(t+1)^2+1]}$. Ainsi,

$s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1)$. Comme $\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right)$ est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ et f est continue sur $[0,1]$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{p}{n}\right)$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}f(1) = 0$).

Or, $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1\frac{(t+1)}{[(t+1)^2+1]}dt = \int_1^2\frac{u}{[u^2+1]}du = \frac{1}{2}\int_1^2\frac{2u}{[u^2+1]}du = \frac{1}{2}[\ln(u^2+1)]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Lemme d'annulation : Soit f et g deux fonctions réelles et continues sur $[0,1]$ telles que : $\int_0^1 f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t)dt = 0$. Montrer que $\forall t \in [0,1], f(t) = g(t) = 0$.

- $(t \mapsto f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t))$ est continue sur $[0,1]$
- $\forall t \in [0,1], f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t) = \left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2 + \frac{3}{4}g^2(t) \geq 0$
- $\int_0^1 f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t)dt = 0$.

Alors le lemme d'annulation assure que $\forall t \in [0,1], f^2(t)+f(t)g(t)+g^2(t) = 0$.

Autrement dit, $\forall t \in [0,1], \underbrace{\left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}g^2(t)}_{\geq 0} = 0$ $\leftarrow$ **somme nulle de réels positifs**.

J'en déduis que $\forall t \in [0,1], \frac{3}{4}g^2(t) = 0$ et $\left(f(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)^2 = 0$. Alors, $\forall t \in [0,1], g(t) = 0$ puis $f(t) = 0$.

Théorème fondamental de l'intégration et théorème fondamental de calcul intégral : Soit $f: (x \mapsto \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt)$.

1) Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ et sur $]0,1[$.
2) Déterminer les variations de $f$sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1) Soit $g(t) = \frac{1}{ln(t)}$.

$g(t) existe \iff \begin{cases}\ln(t)\ existe\\ \ln(t) \neq 0\end{cases} \iff t \in]0,1[\cup]1,+\infty[. Donc, Dg =]0,1[\cup]1,+\infty[$. De plus, g est continue sur $Dg =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Sur l'intervalle $]0,1[$, le TFI assure que g admet une primitive G_1. Alors le TFCI assure que pour tous réels a et b dans $]0,1[$,

$\int_a^b g(t)dt = G_1(b)-G_1(a)$. En particulier, si $x \in]0,1[$ alors $x^2 \in]0,1[$ donc $f(x) = \int_x^{x^2} g(t)dt = G_1(x^2)-G_1(x)$ existe !!

Sur l'intervalle $]1,+\infty[, le\ TFI$ assure que g admet une primitive G_2. Alors le $TFCI$ assure que pour tous réels a et b dans $]1,+\infty[$, $\int_a^b g(t)dt = G_2(b)-G_2(a)$. En particulier, si $x \in]1,+\infty[$ alors $x^2 \in]1,+\infty[$ donc $f(x) = \int_x^{x^2} g(t)dt = G_2(x^2)-G_2(x)$ existe !!

2) $\forall x \in]0,1[, f(x) = G_1(x^2)-G_1(x)$. Comme $(x \mapsto x^2)$ et G_1 sont de classe C^1 sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[, x^2 \in]0,1[$, $(x \mapsto G_1(x^2))$ est de classe C^1 sur $]0,1[$ et finalement f est de classe C^1 sur $]0,1[$.

De plus, $\forall x \in]0,1[, f'(x) = 2xG_1'(x^2)-G_1'(x) = 2xg(x^2)-g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$ $(car\ x < 1$ donc $\ln(x) < 0)$. Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$.

De même, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$ et f est strictement croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

Croissance de l'opérateur intégral. Théorème des gendarmes (encore appelé le théorèln(t)-ln(1)me de LIMITE PAR ENCADREMENT) et égalité des accroissements finis

(suite de l'exercice précédent)

3) Déterminer les limites de f en 0 puis $+\infty$.
4) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer, grâce à l'égalité des accroissements finis, que $\forall t \in [x,x^2]. \frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.
5) En déduire la limite de f en 1^+.
6) Déterminer la limite de f en 1^-.

3) <u>limite de f en $+\infty$:</u>

Soit $x > 1$. Alors $x < x^2$. $\forall t \in [x,x^2], 0 < \ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(x^2) = 2\ln(x)$ $donc$ $\frac{1}{2\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliqué aux fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{2\ln(x)}\right), \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$ continues sur le segment $[x,x^2]$,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)}dt.$$

Donc, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x^2-x}{2\ln(x)} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$ $(*)$.

Or, $\frac{x^2-x}{2\ln(x)} \sim_{+\infty} \frac{x^2}{2\ln(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} \overset{cc}{=} +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = +\infty$. Alors, l'encadrement $(*)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\forall x \in]1,+\infty[, \frac{x-\frac{1}{x}}{2\ln(x)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-\frac{1}{x}}{\ln(x)}$ $(*)$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Donc Cf a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)

<u>limite de f en 0 :</u>

Soit $x \in]0,1[$. Alors $x^2 < x$. $\forall t \in [x^2,x], \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ $donc$ $\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{2\ln(x)} < 0$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliqué aux fonctions $\left(t \mapsto \frac{1}{2\ln(x)}\right), \left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$ continues sur le segment $[x^2,x]$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{2\ln(x)}dt.$$

Donc, $\forall x \in]0,1[, \frac{x-x^2}{\ln(x)} \leq -f(x) \leq \frac{x-x^2}{2\ln(x)}$ et finalement, $\frac{x^2-x}{\ln(x)} \geq f(x) \geq \frac{x^2-x}{2\ln(x)}$ $(**)$.

Or, $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x}{2\ln(x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x}{\ln(x)} = 0$. Donc, l'encadrement $(**)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

4) Soit $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x,x^2]$. ln est continue et dérivable sur $[1,t]$. Donc l'EAF assure qu'il existe $c \in]1,t[$ tel que : $\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$. Comme $c \in]1,t[, \frac{1}{c} \in]\frac{1}{t},1[$. $\frac{1}{t} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$. Comme $t \in [x,x^2], \frac{1}{t} \geq \frac{1}{x^2}$. Ainsi, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.

5) **<u>limite de f en 1^+</u>**:

D'après ce qui précède, pour tous $x \in]1,+\infty[$ et $t \in [x,x^2]$, $1 \leq \frac{t-1}{\ln(t)} \leq x^2$ et $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t-1}$ (car $t-1 > 0$).

Donc par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $(t \mapsto \frac{1}{t-1})$, $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$et $(t \mapsto \frac{x^2}{t-1})$ continues sur $[x,x^2]$,

$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t-1}dt = x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}dt$ et finalement, $[\ln|t-1|]_x^{x^2} \leq f(x) \leq x^2[\ln|t-1|]_x^{x^2}$.

Donc $\forall x \in]1,+\infty[$, $\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) \leq f(x) \leq x^2\ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)$ i.e. $\ln(x+1) \leq f(x) \leq x^2\ln(x+1)$ $(***)$.

Or, $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2\ln(1+x) = \ln(2)$. Donc, l'encadrement $(***)$ permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \ln(2)$.

6) Soit $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$. ln est continue et dérivable sur $[t,1]$. Donc l'EAF assure qu'il existe $c \in]t,1[$ tel que : $\frac{\ln(t)-\ln(1)}{t-1} = ln'(c) = \frac{1}{c}$. Comme $c \in]t,1[, \frac{1}{c} \in]1,\frac{1}{t}[$. $1 \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq \frac{1}{t}$. Comme $t \in [x^2,x], \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x^2}$. Ainsi, $1 \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq \frac{1}{x^2}$.

7) Alors, pour tous $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$, $x^2 \leq \frac{t-1}{\ln(t)} \leq 1$ et $\frac{x^2}{t-1} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t-1}$.

Donc par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $(t \mapsto \frac{1}{1-t})$, $\left(t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}\right)$ et $(t \mapsto \frac{x^2}{1-t})$ continues sur $[x^2,x]$,

$\int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t-1}dt \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt \geq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t-1}dt$ et finalement, $[\ln|t-1|]_{x^2}^{x} \leq -f(x) \leq x^2[\ln|t-1|]_{x^2}^{x}$.

Donc $\forall x \in]0,1[$, $x^2\ln\left(\frac{1-x}{1-x^2}\right) \geq -f(x) \geq \ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)$ i.e. $-\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) \leq f(x) \leq x^2\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to1^-} x^2\ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Donc, je peux affirmer que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \ln(2)$ et ainsi conclure que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ln(2)$.

Ainsi,f est prolongeable par continuité en 1 par $\ln(2)$ et en 0 par 0.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit u et v deux fonctions continues sur [0,1],réelles, positives et telles que : $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$.

Montrer que $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1$.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{u}\ et\ \sqrt{v}$ qui sont définies set continues sur [0,1] puisque u et v sont continues et positives sur [0,1] : $\left[\int_0^1 \sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}dx\right]^2 \leq \left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right]$.

Or, $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\forall x \in [0,1], \sqrt{u(x)v(x)} \geq 1$ donc puisque $u(x) \geq 0\ et\ v(x) \geq 0$, $\sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)} \geq 1$. Alors par croissance de l'opérateur intégral appliquée aux fonctions $\sqrt{u}\sqrt{v}\ et\ 1$ continues sur [0,1], $\int_0^1 \sqrt{u(x)}\sqrt{v(x)}dx \geq \int_0^1 1dx = 1$. Alors, j'en déduis que : $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1$.