VACANCES DE FEVRIER :

- **travaillez votre cours sur la dérivation, intégration et polynômes.**
- **refaites les exercices traites dans le cours et les td**
- **exercez-vous encore sur les exercices suivants :**

DERIVATION :

Rolle : Soit a , b, et c trois réels. Montrer qu'il existe un réel $x \in]0,1[$ tel que : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Accroissements finis : Soit $f \in D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que : $\forall x > 0, \exists c > 0 / f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Taylor-Lagrange : Montrer que : $\forall h \in [-1; 1], \forall x > 0, |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \frac{h^2x^2}{2}e^x$.

Critère de classe C^∞: Soit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \, si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x \leq 0 \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = o_0(x^n)$.

INTEGRATION :

Sommes de Riemann : Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de $w_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)}$ et $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

Lemme d'annulation : Soit f et g deux fonctions réelles et continues sur [0,1] telles que : $\int_0^1 f^2(t) + f(t)g(t) + g^2(t)dt = 0$. Montrer que $\forall t \in [0,1], f(t) = g(t) = 0$.

Théorème fondamental de l'intégration et théorème fondamental de calcul intégral : Soit f: $(x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt)$.

1) Justifier que f est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ et sur $]0,1[$.
2) Déterminer les variations de f sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

Croissance de l'opérateur intégral. Théorème des gendarmes et égalité des accroissements finis
(suite de l'exercice précédent)

3) Déterminer les limites de f en 0 puis $+\infty$.
4) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer, grâce à l'égalité des accroissements finis, que $\forall t \in [x, x^2]. \frac{1}{x^2} \leq \frac{\ln(t)}{t-1} \leq 1$.
5) En déduire la limite de f en 1^+.
6) Déterminer la limite de f en 1^-.

Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit u et v deux fonctions continues sur [0,1],réelles, positives et telles que : $\forall x \in [0,1], u(x)v(x) \geq 1$. Montrer que $\left[\int_0^1 u(x)dx\right] \times \left[\int_0^1 v(x)dx\right] \geq 1$.

POLYNÔMES

Degré de PQ, de $P^{(k)}$, de λP , de $P + Q$. Existence et unicité de l'écriture de P comme combinaison linéaire de $1, X, X^2$, ….
On cherche à résoudre $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Trouver une solution évidente.
2) Déterminer le degré d'une solution non nulle.
3) En déduire les solutions.

Formule de Taylor pour les polynômes
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(3) = P'(3) + P''(3)$.

Théorème de la division euclidienne et racine
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X + \sqrt{3})^n$ par $B = X^2 + 1$.

Deux critères de divisibilité

1. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que $X^2 + aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que : $(X-1)^2$divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ et on déterminera le cas échéant le quotient.

Définition et caractérisation d'une racine multiple.

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ soit divisible par $(X - 2)^3$ (indication : considérer P').

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$divise $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. Factoriser P par $(X-1)^2$.

Egalité de deux polynômes- Forme scindée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que :$\forall t \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $\tilde{P}_n\left(t + \frac{1}{t}\right) = t^n + \frac{1}{t^n}$.

1. Montrer que si $P_n$existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X) = 2$ et $P_1(X) = X$ puis en développant $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n existe et pour tout $n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = X.P_{n+1}(X) - P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme dominant (avec preuve) .
5. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de cos $\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et cos $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

Dérivées successives et multiplicité d'un racine. Forme scindée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$.

1. Donner une expression de L_n. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Justifier que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $X^2 - 1$ divise $P^{(l)}$.
3. Montrer que : pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Factoriser $X^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Décomposition en éléments simples

1. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{4x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$
2. Calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2}$ et déterminer les dérivées successives de f: $\left(x \mapsto \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2}\right)$.