POLYNÔMES

Degré de PQ, de $P^{(k)}$, de λP , de $P+Q$. Existence et unicité de l'écriture de P comme combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots$.

On cherche à résoudre $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Trouver une solution évidente.
2) Déterminer le degré d'une solution non nulle.
3) En déduire les solutions.

1) Le polynôme nul est solution.

2) Si P soit un polynôme constant non nul alors $P' = 0 \; et \; 4P \neq 0$ donc P n'est pas solution.

Supposons que P soit une solution non constante.

Alors $d = deg(P) \in \mathbb{N}^* \; et \; P' \neq 0 \; et \; \deg(P') = d-1$. Par conséquent, $\deg((P')^2) = \deg(4P)$ i.e. $2 \times (d-1) = d$.

Donc $d = 2$.

Ainsi, les polynômes non nuls solutions sont nécessairement de degré 2.

3) Cherchons parmi les polynômes de degré 2 ceux qui sont effectivement solutions.

Posons $P(X) = aX^2 + bX + c \; tq \; a, b, c \; réels \; et \; a \neq 0$. Alors $P' = 2aX + b$.

Par suite,

P solution $\Leftrightarrow (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c) \Leftrightarrow 4a^2X^2 + 4abx + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \overset{\substack{car \\ a\neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 4c \end{cases} \Leftrightarrow P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2.$$

Ainsi, $Sol = \{0, \left(X+\frac{b}{2}\right)^2 / b \in \mathbb{R}\}$.

Formule de Taylor pour les polynômes

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(3) = P'(3) + P''(3)$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N} \; tel \; que \; n \geq \deg(P)$.

Alors la formule de Taylor assure qu'il existe des uniques réels $b_0, \dots, b_n \; tels \; que$:

$P = \sum_{k=0}^{n} b_k (X-3)^k$ et $b_k = \frac{P^{(k)}(3)}{k!}$; $autrement \; dit$; $P = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{P^{(k)}(3)}{k!}}_{=b_k} (X-3)^k$.

Par conséquent,

P est solution $\Leftrightarrow P(3) = P'(3) + P''(3) \Leftrightarrow P = P'(3) + P''(3) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(3)}{k!}(X-3)^k$

$\Leftrightarrow P = P'(3)(1 + X - 3) + P''(3)\left(1 + \frac{1}{2}(X-3)^2\right) + \sum_{k=3}^{n} \frac{P^{(k)}(3)}{k!}(X-3)^k$

$\Leftrightarrow P = \alpha(X-2) + \beta(X^2 - 6X + 11) + \sum_{k=3}^{n} b_k (X-3)^k$.

Donc, P est solution sietssi il existe des réels $\alpha, \beta, b_3, b_4 \dots, b_n$tels que $P = \alpha(X-2) + \beta(X^2 - 6X + 11) + \sum_{k=3}^{n} b_k (X-3)^k$.

Ainsi, les solutions de notre problème sont toutes les combinaisons linéaires des polynômes $(X-2), (X^2 - 6X + 11)$ et des $(X-3)^k$ tels que $k \in \mathbb{N} \backslash \{0,1,2\}$.

Théorème de la division euclidienne et racine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P = (X + \sqrt{3})^n$ par $B = X^2 + 1$.

Le théorème de la division euclidienne assure qu'il existe deux uniques polynômes à coefficients réels (car P et B le sont) Q et R tels que : $P = BQ + R \; et \; deg(R) < deg(B)$. Donc $deg(R) \leq 1 \; i.e. R(X) = aX + b$.

Donc, $(X + \sqrt{3})^n = (X^2+1)Q(X) + aX + b$. Donc, $\forall z \in \mathbb{C}, (z + \sqrt{3})^n = (z^2+1)\tilde{Q}(z) + az + b$

On évalue en i et $-i$ qui sont les racines de $X^2 + 1$. Alors, $\begin{cases} (i + \sqrt{3})^n = ai + b \\ (-i + \sqrt{3})^n = -ai + b \end{cases}$.

On peut résoudre ce système ou bien utiliser le fait que a et b sont réels et dans ce cas une seule des 2 relations suffit comme le prouve ce qui suit. Nous avons : $ai + b = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^n = 2^n \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = 2^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]$.

Comme a et b sont réels, on peut identifier les parties réelle et imaginaire et on obtient : $\begin{cases} a = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \\ b = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \end{cases}$ et ainsi,

$$R = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) X + 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right).$$

Deux critères de divisibilité

1. Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que X^2+aX+1 divise X^4-X+b.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les réels a et b tels que : $(X-1)^2$divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ et on déterminera le cas échéant le quotient.

1. X^2+aX+1 divise X^4-X+b sietssi le reste de la division euclidienne de $A=X^4-X+b$ par $B=X^2+aX+1$ est nul.

Cherchons donc ce reste en posant la division :

$$\begin{array}{r|l} X^4-X+b & \underline{X^2+aX+1} \\ \underline{X^4+aX^3+X^2} & X^2-aX+a^2-1 \\ -aX^3-X^2+X-b & \\ \underline{-aX^3-a^2X^2-aX} & \\ (a^2-1)X^2+(1+a)X-b & \\ \underline{(a^2-1)X^2+a(a^2-1)X+a^2-1} & \\ [(1+a)-a(a^2-1)]X-b-a^2+1 & \end{array}.$$

Donc $R=[(1+a)-a(a^2-1)]X-b-a^2+1$ est le reste de la division euclidienne de A par B.

Donc B divise A

$\Leftrightarrow R=0\Leftrightarrow les\ coeff\ de\ R\ sont\ nuls$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(1+a)-a(a^2-1)=0\\ -b-a^2+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+a)-a(a-1)(a+1)=0\\ -b-a^2+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(1+a)[1-a(a-1)]=0\\ b=a^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}\ ou\begin{cases}a^2-a-1=0\\ b=a\end{cases}$

B divise $A\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=\frac{1+\sqrt5}{2}\\ b=\frac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}$ ou $\begin{cases}a=\frac{1-\sqrt5}{2}\\ b=\frac{1-\sqrt5}{2}\end{cases}$.

Formule de factorisation valable pour A et B polynômes et N entier naturel non nul :

$$A^N-B^N=(A-B)\sum_{k=0}^{N-1}A^k\,B^{n-1-k}=(A-B)\sum_{k=0}^{N-1}B^k\,A^{n-1-k}$$

$$1-B^N=(1-B)\sum_{k=0}^{N-1}B^k$$

$$A^N-1=(A-1)\sum_{k=0}^{N-1}A^k.$$

2.Comme $deg(P)=n+1\geq 2, P'\neq 0$

$et\ P'=a(n+1)X^n+bnX^{n-1}$.

Alors,

$(X-1)^2$divise $P=aX^{n+1}+bX^n+1$

$\Leftrightarrow$ P admet 1 comme racine au moins double

$\Leftrightarrow P(1)=P'(1)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+1=0\\ (n+1)a+nb=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+1=0\\ a-n=0\ \ (L_2\leftarrow L_2-nL_1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-n-1\\ a=n\end{cases}$

Désormais, $P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.

Alors,

$$P=n\,(X^{n+1}-X^n)-(X^n-1)\overset{\bullet}{=}n\,X^n(X-1)-(X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k\right)=n\,X^n(X-1)-(X-1)(1+X+X^2+..+X^{n-1})$$

$$=(X-1)\left[nX^n-\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k\right)\right]=(X-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^n\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-1}X^k\right)\right]$$

$$=(X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(X^{n-k}-1)X^k\right)\overset{\bullet}{=}(X-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(X-1)\left(\sum_{j=0}^{n-k-1}X^j\right)X^k\right)$$

$$=(X-1)^2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-k-1}X^j\right)X^k\right)$$

$$P=(X-1)^2\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-k-1}X^{j+k}\right)\right)=(X-1)^2\left(\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)X^m\right).$$

$car,\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-k-1}X^{j+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{m=k}^{n-1}X^m\right)=\sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{k=m}^{n-1}X^m\right)=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)X^m$

Définition et caractérisation d'une racine multiple.

1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(X-2)^3$ (indication : considérer P').
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$divise $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. Factoriser P par $(X-1)^2$.

1. **Analyse** : supposons qu'il existe P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 5 tels que $P+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(X-2)^3$. Alors -2 est racine au moins triple de $P+10$ et 2 est racine au moins triple de $P-10$. Donc, -2 est racine au moins double de $(P+10)' = P'$ et 2 est racine au moins double de $(P-10)' = P'$. Alors il existe un polynôme Q tel que : $P' = (X+2)^2(X-2)^2Q$. Comme $degP = 5, degP' = 4$ et par suite, Q est constant non nul . Il existe donc une constante réelle non nulle λ telle que : $P' = \lambda(X+2)^2(X-2)^2 = \lambda[X^2-4]^2 = \lambda[X^4 - 8X^2 + 16]$

Alors, il existe une autre constante réelle c telle que : $P = \lambda\left[\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right] + c$. Enfin,

$$\begin{cases}(\widetilde{P+10})(-2) = 0\\ (\widetilde{P-10})(2) = 0\end{cases} \; donc \; \begin{cases}\lambda\left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{8}{3}(-2)^3 + 16\times(-2)\right] + c + 10 = 0\\ \lambda\left[\frac{2^5}{5} - \frac{8}{3}2^3 + 16\times 2\right] + c - 10 = 0\end{cases} \; donc \; \begin{cases}\lambda\left[-\frac{32\times 8}{15}\right] + c + 10 = 0\\ \lambda\left[\frac{32\times 8}{15}\right] + c - 10 = 0\end{cases} \; donc \begin{cases} c = 0\\ \lambda = \frac{150}{32\times 8} = \frac{75}{16\times 8}\end{cases}$$

Ainsi, $P = \frac{75}{16\times 8}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right]$ est la seule solution possible.

Synthèse Prenons $P = \frac{75}{16\times 8}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right]$. Alors $P(2) - 10 = 0 = P(-2) + 10$. Donc -2 est racine de $P+10$ et 2 est racine de $P-10$.

De plus, $(P+10)' = (P-10)' = P' = \frac{75}{16\times 8}[X^4 - 8X^2 + 16] = \frac{75}{16\times 8}[(X+2)^2(X-2)^2]$. Donc -2 est racine double de$(P+10)'$ et 2 sont racines doubles de $(P-10)'$. J'en conclus que (-2) est racine triple de $P+10$ et 2 est racine triple de $P-10$ et par suite, que $P+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P-10$ soit divisible par $(X-2)^3$. Donc P est solution.

En conclusion, $P = \frac{75}{16\times 8}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right]$ est l'unique solution possible.

2. Pour $n = 1, P = X^2 - X^2 + 1 - 1 = 0$. Donc $(X-1)^3$divise P et $P = (X-1)^3 \times 0$.

Désormais $n \geq 2$. Alors $2n > n+1 > n-1 \geq 1$.

Donc, $P' = 2nX^{2n-1} - n(n+1)X^n + n(n-1)X^{n-2}$

Et si $n \geq 3$ $\; P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)X^{n-3}$

Et si $n = 2$ $\; P'' = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} = 2n(2n-1)X^{2n-2} - n^2(n+1)X^{n-1} + n(n-1)(n-2)$.

Nous savons que :

$(X-1)^3$divise $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ sietssi 1 est racine au moins triple de P sietssi $\tilde{P}(1) = \tilde{P}'(1) = \widetilde{P''}(1) = 0$.

Or, $\tilde{P}(1) = 1^{2n} - n1^{n+1} + n1^{n-1} - 1 = 1 - n + n - 1 = 0$

$\tilde{P}'(1) = 2n1^{2n-1} - \mathrm{n}(n+1)1^n + \mathrm{n}(n-1)1^{n-2} = 2\mathrm{n} - n(n+1) + n(n-1) = 0$

$\tilde{P}''(1) = 2n(2n-1)1^{2n-1} - n^2(n+1)1^{n-1} + \mathrm{n}(n-1)(n-2)1^{n-3} = 2\mathrm{n}(2n-1) - n(n+1)(\mathrm{n}-1) + n(n-1)(\mathrm{n}-2) = 0.$

J'en conclus que $(X-1)^3$divise $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

<u>Factorisons P par $(X-1)^2$.</u>

$$P = X^{2n} - 1 - n(X^{n+1} - X^{n-1}) = X^{2n} - 1 - n(X^2-1)X^{n-1} \overbrace{=} (\mathrm{X}-1)\left(\sum_{k=0}^{2n-1} X^k\right) - n(X-1)(X+1)X^{n-1}$$

$$= (\mathrm{X}-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} X^k\right) - n(X+1)X^{n-1}\right] = (\mathrm{X}-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{2n-1} X^k\right) - nX^{n-1} - nX^{n+1}\right]$$

$$= (\mathrm{X}-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k - X^{n-1}\right) + \left(\sum_{k=n}^{2n-1} X^k - X^{n+1}\right)\right]$$

$$= (\mathrm{X}-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{n-2} X^k\left(1 - X^{n-1-k}\right)\right) + X^n - X^{n+1} + \left(\sum_{k=n+2}^{2n-1} X^{n+1}(X^{k-n-1} - 1)\right)\right]$$

$$\overbrace{=} (\mathrm{X}-1)\left[\left(\sum_{k=0}^{n-2} X^k(1-X)\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^j\right)\right) + X^n(1-X) + \left(\sum_{k=n+2}^{2n-1} X^{n+1}\left((\mathrm{X}-1)\left(\sum_{j=0}^{k-n-2} X^j\right)\right)\right)\right]$$

$$= (\mathrm{X}-1)^2\left[\left(\sum_{k=0}^{n-2} X^k\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^j\right)\right) + X^n + \left(X^{n+1}\sum_{k=n+2}^{2n-1}\left(\sum_{j=0}^{k-n-2} X^j\right)\right)\right]$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-2} X^k\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^j\right) = \sum_{k=0}^{n-2}\left(\sum_{j=0}^{n-2-k} X^{k+j}\right) = \sum_{k=0}^{n-2}\left(\sum_{m=k}^{n-2} X^m\right) = \sum_{m=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{m} X^m\right) = \sum_{m=0}^{n-2}(m+1)X^m$

Et $\sum_{k=n+2}^{2n-1}\left(\sum_{j=0}^{k-n-2} X^j\right) = \sum_{j=0}^{n-3}\left(\sum_{k=j+n+2}^{2n-1} X^j\right) = \sum_{j=0}^{n-3}(n-j-2)X^j$.

Ainsi,

$$P = (\mathrm{X}-1)^2\left[\left(\sum_{m=0}^{n-2}(m+1)X^m\right) + X^n + \left(X^{n+1}\sum_{j=0}^{n-3}(n-j-2)X^j\right)\right].$$

Egalité de deux polynômes- Forme scindée.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On va étudier l'existence et les propriétés des polynômes P_n tels que :$\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{P}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$.

1. Montrer que si P_n existe alors P_n est unique.
2. Justifier que $P_0(X)=2$ et $P_1(X)=X$ puis en développant $\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$, déterminer $P_2(X)$.
3. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n existe et pour tout $n\in\mathbb{N}, P_{n+2}(X)=X.P_{n+1}(X)-P_n(X)$.
4. Déterminer le degré de P_n et son terme dominant (avec preuve) .
5. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer sa forme scindée
6. En utilisant les résultats précédents, donner les valeurs de cos $\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et cos $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

1.Unicité de $\boldsymbol{P_n}$:

Supposons qu'il existe deux polynômes P_n *et* Q_n tels que $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{P}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$ *et* $\tilde{Q}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^n+\frac{1}{t^n}$. Posons $H=P-Q$. Alors H est un polynôme qui vérifie : $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{H}\left(t+\frac{1}{t}\right)=0$. Cela signifie que tous les complexes de la forme $t+\frac{1}{t}$ tq $t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ sont racines de H. Montrons que $\{t+\frac{1}{t}/\ t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\}$ contient une infinité de valeurs en cherchant qui sont les complexes de cette forme. Soit y un complexe. $y=t+\frac{1}{t}\Leftrightarrow t^2-yt+1=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{où } \delta \text{ est une} \\ \text{racine deuxième de} \\ \Delta=y^2-4}} t=\frac{y\pm\delta}{2}$. Donc tout complexe y s'ecrit sous la forme $t+\frac{1}{t}$ tq $t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. J'en déduis que $\{t+\frac{1}{t}/\ t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\}$ *est égle* à $\mathbb{C}$ et contient donc une infinité de valeurs. H admet donc une infinité de racines, H est donc le polynôme nul. Ainsi, $P_n=Q_n$.

Ainsi, si P_n existe alors P_n est unique.

2.On cherche P_0 tel que $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{P}_0\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^0+\frac{1}{t^0}=2$. Donc, $P_0(X)=2$ convient et c'est le seul qui convienne d'après 1.

On cherche P_1 tel que $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{P}_1\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^1+\frac{1}{t^1}=t+\frac{1}{t}$. Donc, $P_1(X)=X$ *convient* et c'est le seul qui convienne d'après 1.

On cherche P_2 tel que $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{P}_2\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2$. Donc, $P_2(X)=X^2-2$ *convient* et c'est le seul qui convienne d'après 1.

3. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}, H(n)$: " P_n, P_{n+1} *et* P_{n+2} *existent et* $P_{n+2}(X)=X.P_{n+1}(X)-P_n(X)$".

Initialisation : P_0, P_1, P_2 *existent et* $X.P_1(X)-P_0(X)=X^2-2=P_2(X)$. Donc, $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Donc, P_{n+1} *et* P_{n+2} *existent*.

Posons $Q(X)=X.P_{n+2}(X)-P_{n+1}(X)$.

Alors $\forall t\in\mathbb{C}\backslash\{0\}, \tilde{Q}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\left(t+\frac{1}{t}\right)\tilde{P}_{n+2}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\tilde{P}_{n+1}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t^{n+2}+\frac{1}{t^{n+2}}\right)-\left(t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}}\right)=t^{n+3}+\frac{1}{t^{n+3}}$.

Donc $P_{n+3}=Q$ convient et par unicité est le seul qui convienne. Ainsi, P_{n+3} *existe et* $P_{n+3}=Q=X.P_{n+2}(X)-P_{n+1}(X)$.Donc $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $H(n)$ est vraie.

4. D'après les calculs de P_0, P_1 *et* P_2, je peux conjecturer que $\underbrace{degP_n=n \text{ et } codom(P_n)=1 \text{ sauf } codom(P_0)=2}_{H(n)}$.

Initialisation Ok pour $n=0{,}1$ et 2.

Propagation : Soit n un entier naturel non nul. Je suppose que $H(n), H(n+1)$ sont vraies.

Alors, il existe T_n *et* T_{n+1} *tel que* : $P_n=X^n+T_n(X)$ *et* $P_{n+1}=X^{n+1}+T_{n+1}(X)$ et $\deg T_n<n$ *et* $degT_{n+1}<n+1$.

Alors, $P_{n+2}(X)=X^{n+2}+X.T_{n+1}(X)-X^n-T_n(X)$. Or, $\deg(X.T_{n+1}(X))=\deg(X)+\deg(T_{n+1})<1+n+1=n+2$.

Donc, X^{n+2} est de degré strictement supérieur aux autres termes de la somme $X^{n+2}+X.T_{n+1}(X)-X^n-T_n(X)$. J'en déduis que X^{n+2} est le terme dominant de P_{n+2}. *Donc* $H(n+2)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $H(n)$ est vraie.

5. Soit n un entier naturel **non nul.** Cherchons les racines complexes de P_n.

Soit y un complexe. Alors il existe un complexe non nul t tels que $y=t+\frac{1}{t}$. Donc,

$$\tilde{P}_n(y)=0\Leftrightarrow\tilde{P}_n\left(t+\frac{1}{t}\right)=0\Leftrightarrow t^n+\frac{1}{t^n}=0\Leftrightarrow t^{2n}+1=0\Leftrightarrow t^{2n}=-1$$

$$\Leftrightarrow t \text{ est une racine } 2n^{\text{ième}} \text{ de } -1$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car -1=e^{i\pi} \\ donc\ e^{i\frac{\pi}{2n}} est\ une\ racine \\ 2n^{ième}\ de -1}} \exists k\in[\![0,2n-1]\!]/t=e^{i\frac{\pi}{2n}}e^{i\frac{2k\pi}{2n}}\neq 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ \frac{1}{e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)}}=e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)}}} \exists k\in[\![0,2n-1]\!]/y=e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)}+e^{-i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)} \underbrace{=}_{Euler} 2cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)$$

Donc les complexes (qui sont en fait réels) $2cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)$ tels que $k \in [\![0,2n-1]\!]$ sont les racines de P_n.
Or, $\forall k \in [\![0,n-1]\!], 0 < \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n} < \pi$ et cos est injective sur $[0,\pi]$. Donc les réels $2cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)$ tels que $k \in [\![0,n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n. $P_n$étant de degrén, ce sont les seules racines de P_n ; autrement dit , les autres racines trouvées sont égales à celles-ci et ces racines sont toutes de multiplicité 1 dans P_n. Ainsi,

$$P_n = codom(P_n)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-2cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{2n}\right)\right)$$

Les racines de $P_n$étant toutes réelles, cette factorisation est la forme scindée de $P_n$dans $\mathbb{R}[X]$.

6. D'une part, $P_5 = \prod_{k=0}^{4}\left(X-2cos\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{10}\right)\right) = \left(X-2cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\left(X-2cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)X\left(X-2cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)\right)\left(X-2cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right)$.

D'autre part, $P_5(X) = X.P_4(X) - P_3(X)$
Or, $P_3(X) = X.P_2(X) - P_1(X) = X^3 - 3X$ et $P_4(X) = X.P_3(X) - P_2(X) = X(X^3-3X) - X^2 + 2 = X^4 - 4X^2 + 2$
Donc, $P_5(X) = X^5 - 4X^3 + 2X - X^3 + 3X = X^5 - 5X^3 + 5X = X(X^4 - 5X^2 + 5) = X(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2})(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2})$

$$P_5(X) = X\left(X-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

Les racines de P_5 sont donc $0, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et sont aussi $0, 2cos\left(\frac{\pi}{10}\right), 2cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), 2cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), 2cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

Par unicité de ses racines et compte-tenue des ordres suivants : $-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} < -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < 0 < \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et

$2cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) < 2cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) < 0 < 2cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) < 2cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ (puisque cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$), je peux affirmer que

$2cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et $2cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ainsi $cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et $cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Dérivées successives et multiplicité d'un racine. Forme scindée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P = (X^2-1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$.

1. Donner une expression de L_n. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.
2. Justifier que : pour tout $l \in [\![0,n-1]\!]$, X^2-1 divise $P^{(l)}$.
3. Montrer que : pour tout $l \in [\![0,n-1]\!]$, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. En déduire que L_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $]-1,1[$.

1. $P = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ et $P = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{2k}$.

$degP = 2n$ donc $deg(L_n) = 2n - n = n$ et $codom(P) = 1$ donc $codom(L_n) = \frac{(2n)!}{n!}$. et

De plus, d'après Leibniz, $L_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X-1)^n)^{(k)}((X+1)^n)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k = n!$
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k$

Donc, comme $\sum_{k=0}^{n} codom\left(\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \neq 0$. $codom(L_n) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

J'en déduis, par unicité des coefficients et en particulier du coefficient dominant, $n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$. Donc, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}$.

RQUE: $L_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^{2k})^{(n)} \underbrace{=}_{\substack{p=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \text{ si } n \text{ pair} \\ p=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1 \text{ si } n \text{ impair}}} \sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^{2k})^{(n)} = \sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{(2k)!}{(2k-n)!}X^{2k-n}$.

2. 1 et -1 sont les racines de P et sont de multiplicité n dans P . Donc, pour tout $l \in [\![0,n-1]\!]$, 1 et -1 sont racines de $P^{(l)}$. Donc, pour tout $l \in [\![0,n-1]\!]$, X^2-1 divise $P^{(l)}$.

3.Je sais que $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}(-1)$. De plus, $\widetilde{P}$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P}'$ s'annule sur $]-1,1[$ en un réel c_1. Alors, $\widetilde{P}'^{(1)} = \widetilde{P}'(c_1) = \widetilde{P}(-1) = 0$. De plus, $\widetilde{P}'$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P}''$ s'annule sur $]-1,c_1[$ et sur $]c_1,1[$ en un réel $c_{2.1}$ et $c_{2.2}$.
Soit $l \in [\![0,n-2]\!]$ Supposons que, $P^{(l)}$ a au moins l racines distinctes $c_{l.1}, c_{l.2}, \dots, c_{l.l}$ dans $]-1,1[$ tq $-1 < c_{l.1} < c_{l.2} < \dots < c_{l.l} < 1$. Comme je sais de plus que $P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1)$, j' ai donc : $P^{(l)}(-1) = P^{(l)}(1) = P^{(l)}(-1) = \dots = P^{(l)}(-1)$. De plus, $\widetilde{P^{(l)}}$ est continue et dérivable sur $[-1,1]$ donc le théorème de Rolle assure que $\widetilde{P^{(l+1)}}$ s'annule sur $]-1,1[$ en $c_{l+1.1}, c_{l+1.2}, \dots, c_{l+1.l+1}$ tq $-1 < c_{l+1.1} < c_{l.1} < c_{l+1.2} < c_{l.2} < \dots < c_{l+1.l} < c_{l.l} < c_{l+1.l+1} < 1$.

5. En appliquant le théorème de Rolle à $P^{(n-1)}$ qui s'annule (n-1) fois entre -1 et 1 et qui s'annule en 1 et -1, le théorème de Rolle assure

que $\widetilde{L_n} = \widetilde{P^{(n)}}$ s'annule sur $]-1,1[$ en $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$. Donc, $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ sont distinctes n racines réelles distinctes de L_n .
Comme $\deg(L_n) = n$, les réels $c_{n.1}, c_{n.2}, \dots, c_{n.n}$ sont les seules racines de L_n et elles sont toutes simples dans L_n et L_n est scindée sur $\mathbb{R}$ et ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Factoriser $P = X^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Soit z un complexe.

$\tilde{P}(z) = 0 \Leftrightarrow z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -1 \Leftrightarrow z\ est\ une\ racine\ 6^{ième}\ de\ e^{i\pi}(= -1) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!], z = e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{i2k\pi}{6}}$.
Les 6 racines 6[ième] de (-1) sont toutes distinctes. Donc P a exactement 6 racines complexes distinctes. Comme $\deg(P) = 6$, ces racines sont toutes simples dans P et la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est $P = codom(P) \prod_{k=0}^{5} \left(X - e^{\frac{i\pi}{6}} e^{\frac{i2k\pi}{6}}\right)$. Parmi ces racines, aucune n'est réelle… et ces racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées (puisque P est à coefficients réels).

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(X - e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i7\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i3\pi}{2}}\right)\left(X - e^{\frac{i11\pi}{6}}\right)$$

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)\left(X - e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{-i5\pi}{6}}\right)$$

$$P = \left(X^2 - 2Re\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)X + \left|e^{\frac{i\pi}{6}}\right|^2\right)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2Re\left(e^{\frac{i5\pi}{6}}\right)X + \left|e^{\frac{i5\pi}{6}}\right|^2\right)$$

Ainsi, la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est $P = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

Décomposition en éléments simples

1. Calculer $I = \int_{-1}^{0} \frac{4x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.
2. Calculer $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2}$ et déterminer les dérivées successives de $f: \left(x \mapsto \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2}\right)$.

1. $I = \int_{-1}^{0} \frac{4x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$. Posons $F(x) = \frac{4x^2+x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A(x)}{B(x)}$. F est continue sur [-1,0] donc I existe.
   - Décomposons F en éléments simples :

- Aucune racine de B n' est pas racine de A donc $\frac{A}{B}$ $est\ un$ représentant irréductible de F.

De plus, $\deg(A) > \deg(B)$ donc la partie entière de F est nulle.

- Le cours assure alors qu'il existe des uniques réels a, b, c, d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1, j, j^2\}, F(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{(cx+d)}{x^2+x+1}.$$

Alors,

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, (x-1)^2 F(x) = \frac{4x^2+x+1}{(x^2+x+1)} = a(x-1) + b + \frac{(cx+d)(x-1)^2}{x^2+x+1}$. Donc, **<u>en passant à la limite en 1</u>**, $2 = b$.

Etendons cette méthode aux complexes (on n'admet que cela fonctionne … on ne peut pas le jusitifier !!) ,

$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1, j, j^2\}, (x^2+x+1)F(x) = \frac{4x^2+x+1}{(x-1)^2} = \frac{a(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{b(x^2+x+1)}{(x-1)^2} + (cx+d)$. Donc, **<u>en évaluant</u>** en j, $\frac{4j^2+j+1}{(j-1)^2} = cj + d$

Or, $\frac{4j^2+j+1}{(j-1)^2} = \frac{(4j^2+j+1)(\bar{j}-1)^2}{(j-1)^2(\bar{j}-1)^2} = \frac{4(-1-j)+j+1}{|(j-1)|^4}(-j-2)^2 = \frac{-3(1+j)}{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}(j^2+4j+4) \quad = \frac{-3(1+j)}{9} 3(j+1) = -(j^2+2j+1) = -j$.

Donc $cj + d = -j$ $i.e.$ $\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{2} + d\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(c+1)i = 0$. Donc par unicité des parties réelles d'un complexe, $c = -1\ et\ d = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1, j, j^2\}, F(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, xF(x) = \frac{(4x^2+x+1)x}{(x^2+x+1)(x-1)^2} = a\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{(x-1)^2} - \frac{x^2}{x^2+x+1}$. Donc, en passant à la limite en $+\infty$, $0 = a - 1$. Donc $a = 1$.

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{C}\backslash\{1, j, j^2\}, F(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

   - Intégrons F:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+x+1} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+x+1} dx$$

$$= \left[\ln|x-1| - \frac{2}{x-1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\left[\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right] dx$$

$$= 1 - \ln(2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= 1 - \ln(2) - \frac{1}{2}[\ln(x^2+x+1)]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}dx$$

$$= 1 - \ln(2) + \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx$$

$$= 1 - \ln(2) + \frac{2}{3}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}du$$

$$= 1 - \ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}[Arctan(u)]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 - \ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right]$$

$$I = 1 - \ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.$$

2 Décomposons $f:\left(x \mapsto \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2}\right)$ en éléments simples.

Posons $A(x) = 3x^2 - 1$ *et* $B(x) = x^2(x-1)^2(x+1)^2$. Aucune racine de B n'est racine de A donc $\frac{A}{B}$ est irréductible.
De plus, $\deg(A) < \deg(B)$ donc la partie entière de f est nulle.
Alors il existe 6 uniques réels A, B, C, D, M, L tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{M}{x+1} + \frac{L}{(x+1)^2}$.
Par suite,

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, x^2 f(x) = \frac{3x^2-1}{(x-1)^2(x+1)^2} = Ax + B + \frac{Cx^2}{x-1} + \frac{Dx^2}{(x-1)^2} + \frac{Mx^2}{x+1} + \frac{Lx^2}{(x+1)^2}$. Donc en faisant $x \to 0,\ -1 = B$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, (x-1)^2 f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A(x-1)^2}{x} + \frac{B(x-1)^2}{x^2} + C(x-1) + D + \frac{M(x-1)^2}{x+1} + \frac{L(x-1)^2}{(x+1)^2}$.Donc en faisant $x \to 1, \frac{1}{2} = D$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, (x+1)^2 f(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A(x+1)^2}{x} + \frac{B(x+1)^2}{x^2} + \frac{C(x+1)^2}{x-1} + \frac{D(x+1)^2}{(x-1)^2} + M(x+1) + L$.Donc en faisant $x \to -1, \frac{1}{2} = L$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2} = \frac{A}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{M}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, xf(x) = \frac{3x^2-1}{x(x-1)^2(x+1)^2} = A + \frac{B}{x} + \frac{Cx}{x-1} + \frac{Dx}{(x-1)^2} + \frac{Mx}{x+1} + \frac{Lx}{(x+1)^2}$. Donc en faisant $x \to +\infty,\ 0 = A + C + M$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(-x) = f(x).$$

$Donc\ f(x) = f(-x) = -\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} - \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} - \frac{M}{x-1} + \frac{L}{(x-1)^2}$. Alors par unicité des réels A, B, C, D, M, L, on peut identifier :
$\begin{cases} A = -A \\ C = -M \\ D = L \end{cases}$ donc $A = 0$ *et* $C = -M$.Donc, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{C}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$.
Alors, $f(2) = \frac{11}{36} = -\frac{1}{4} + C + \frac{1}{2} - \frac{C}{3} + \frac{1}{18}$. Donc $C = 3\left[\frac{11}{36} - \frac{2}{36} + \frac{9}{36} - \frac{18}{36}\right] = 0$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$.

- **Calculons $S(N) = \sum_{n=2}^{N} \frac{3n^2-1}{(n^3-n)^2} = \sum_{n=2}^{N} f(n)$**

$$S(N) = \sum_{n=2}^{N} -\frac{1}{n^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(n-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left[-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left[-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] \underbrace{=}_{\substack{deux \\ télécopages}} \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2} - \frac{1}{4}\right\}.$$

Donc, $\lim_{N\to+\infty} S(N) = \frac{3}{8}$.

- **Soit N un entier naturel. Déterminons la dérivée $N^{\text{ièmes}}$ de f**

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}$.Et, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f(x) = -x^{-2} + \frac{1}{2}(x-1)^{-2} + \frac{1}{2}(x+1)^{-2}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, f^{(N)}(x) = (-1)^N \times [(N+1)!] \times \left[-x^{-(N+2)} + \frac{1}{2}(x-1)^{-(N+2)} + \frac{1}{2}(x+1)^{-(N+2)}\right]$.