Corrigé TD 14
Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Trouver toutes les primitives de f sur I, intervalle où f est continue :

1) $f:(x \mapsto xArccos(x))$.
2) $f:\left(x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}\right)$.
3) $f:(x \mapsto tan^3(x))$.
4) $f:\left(x \mapsto \frac{1}{1+\sin(x)}\right)$.
5) $f:(x \mapsto \sin(\ln(x)))$

1) f est continue sur $[-1,1]$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F:(x \mapsto \int_0^x tArccos(t)dt)$ est la primtive de f s'annulant en 0.

Soit $x \in]-1,1[.F(x) = \int_0^x t\underbrace{Arccos(t)}_{v(t)}dt \underbrace{=}_{\substack{IPP\\ u\ et\ v\ sont\\ C^1 sur\ ]-1,1[\\ donc\ sur\ S_{0,x}}} \left[\underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)}Arccos(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2}\frac{(-1)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{x^2}{2}Arccos(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Or, $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ t=\sin(u)\\ u=Arcsin(t)}} -\int_0^{Arcsin(x)} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du + Arcsin(x)$

$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int_0^{Arcsin(x)} \sqrt{cos^2(u)}\cos(u)\,du + Arcsin(x) = -\int_0^{Arcsin(x)} \cos^2(u)\,du + Arcsin(x)$

$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int_0^{Arcsin(x)} \frac{\cos(2u)+1}{2}du + Arcsin(x) = -\left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2}\right]_0^{Arcsin(x)} + Arcsin(x)$

$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{\sin(2Arcsin(x))}{4} - \frac{Arcsin(x)}{2} + Arcsin(x)$

$\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2} = -\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{Arcsin(x)}{2}$

$Ainsi, \forall x \in]-1,1[, F(x) = \frac{x^2}{2}Arccos(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{Arcsin(x)}{4}$.

Comme F et $\left(x \mapsto \frac{x^2}{2}Arccos(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{Arcsin(x)}{4}\right)$ sont continues sur $[-1,1]$ et coïncident sur $]-1,1[$, elles coïncident sur $[-1,1]$.

$Ainsi, \forall x \in [-1,1], F(x) = \frac{x^2}{2}Arccos(x) - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{Arcsin(x)}{4} \underbrace{=}_{Arccos(x)=\frac{\pi}{2}-Arcsin(x)} \frac{\pi x^2}{4} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + \frac{Arcsin(x)}{4}(1-2x^2)$.

2) $f(x)$ existe$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ \sqrt{1+x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Donc, $Df =]-1,0[\cup]0,+\infty[$. Plaçons-nous sur l'intervalle $]0,+\infty[$. f est continue sur cet intervalle et y admet donc une primitive et $F:(x \mapsto \int_1^x f(t)dt)$ est la primtive de f s'annulant en 1.

$F(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t}+1}{\sqrt{1+t}-1}dt \underbrace{=}_{\substack{CV\\ u=\sqrt{1+t}\\ du=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}dt\\ dt=2udu\\ t=1\Leftrightarrow u=\sqrt{2}\\ t=x\Leftrightarrow u=\sqrt{1+x}}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u+1}{u-1}2udu = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u^2+u}{u-1}du = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} \frac{u(u-1)+2(u-1)+2}{u-1}du$

$F(x) = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} u + 2 + \frac{2}{u-1}du = 2\left[\frac{u^2}{2} + 2u + 2ln|u-1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+x}} = 2\left(\frac{x}{2} + 2\sqrt{1+x} + 2ln\left|\sqrt{1+x}-1\right|\right) + cste$.

3) f est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F:(x \mapsto \int_0^x \tan^3(t)dt)$ est la primitive de f s'annulant en 0.
Soit $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$F(x) = \int_0^x \tan^3(t)\,dt = \int_0^x \tan^2(t)\tan(t)\,dt = \int_0^x (\tan^2(t)+1-1)\tan(t)\,dt = \int_0^x (\tan^2(t)+1)\tan(t) - \tan(t)\,dt$

$F(x) = \left[\frac{tan^2(t)}{2} + ln|\cos(t)|\right]_0^x = \frac{tan^2(x)}{2} + ln|\cos(x)| + cste.$

4) f est continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$ donc admet une primitive sur cet intervalle et $F:\left(x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+\sin(t)}dt\right)$ est la primitive de f s'annulant en 0.
Soit $x \in]-\frac{\pi}{2},\pi[$.

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\sin(t)}dt \underbrace{=}_{\substack{\frac{t}{2}\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\\ u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)\\ du=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt\\ dt=\frac{2du}{1+u^2}}} \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{(1+u)^2}dt = \left[-\frac{2}{1+u}\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + cste.$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\pi[, F(x) = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c$. De même $\forall x \in]\pi,\frac{3\pi}{2}[, F(x) = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + d$. Comme F est continue en π,

$\lim_{x\to\pi^-} F(x) = c = d = \lim_{x\to\pi^+} F(x)$. Donc $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\backslash\{\pi\}, F(x) = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c\ et\ F(\pi) = c.$.

5) f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$donc admet une primitive sur cet intervalle et $F:(x \mapsto \int_1^x \sin(\ln(t))dt)$ est la primtive de f s'annulant en 0.

Soit $x \in]-1,1[$. $F(x)=\int_1^x \sin(\ln(t))\,dt \underbrace{=}_{\substack{cv\\ u=\ln(t)\\ t=e^u\\ dt=e^u du}} \int_0^{\ln(x)} \sin(\mathrm{u})\, e^u du = \int_0^{\ln(x)} \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)u}\right) du = Im\left[\int_0^{\ln(x)} e^{(1+i)u} du\right] = F(x) =$

$Im\left\{\left[\frac{1}{1+i} e^{(1+i)u}\right]_0^{\ln(x)}\right\} = Im\left\{\frac{1}{1+i} e^{(1+i)\ln(x)} + ctse\right\} = Im\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right]\left[xcos(\ln(x)) + ixsin(\ln(x))\right] + ctse\right\}$

$F(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))\right] + ctse.$

Pêle-mêle

1) Soit f définie que $[0,1]$ par : $f(x)=2x$ si $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $f(x)=2-2x$ si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Montrer que pour toute fonction g continue sur $[0,1]$, $\int_0^1 g\big(f(x)\big)dx=\int_0^1 g(x)dx$.

Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. Tout d'abord, on remarque que $\forall x\in[0,1], f(x)\in[0,1]$. De plus, $(x\mapsto 2x)$ est continue sur $[0,\frac{1}{2}[$ et $(x\mapsto 2-2x)$ est continue sur $]\frac{1}{2},1]$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x=\underbrace{1}_{=f(1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2-2x$. Donc f est continue sur $[0,1]$. J'en déduis que $g\circ f$ est continue sur $[0,1]$. Par conséquent, $\int_0^1 g\big(f(x)\big)dx$ et $\int_0^1 g(x)dx$ existent.

$$\int_0^1 g\big(f(x)\big)dx \overset{\substack{relation\\ de\ Chasles}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} g\big(f(x)\big)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 g\big(f(x)\big)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} g(2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 g(2-2x)dx \underbrace{\overset{\substack{CV\\ u=2-2x}}{=}}_{\substack{CV\\ t=2x}} \int_0^1 g(t)\frac{dt}{2}+\int_1^0 g(u)\left(-\frac{1}{2}\right)du$$

$$\int_0^1 g\big(f(x)\big)dx=\int_0^1 g(t)\frac{dt}{2}+\int_0^1 g(t)\frac{dt}{2}=\int_0^1 g(t)dt.$$

2) Montrer que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$ alors pour tout réel $\alpha\in[-2,2]$, $\int_{[a,b]} f^2-\alpha fg+g^2\geq 0$. Etudier le cas d'égalité.

Soit f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[a,b]$ et $\alpha\in[-2,2]$. Alors, $f^2-\alpha fg+g^2$ est continue sur $[a,b]$. Donc, $\int_{[a,b]} f^2-\alpha fg+g^2$ existe.

De plus, $\forall x\in[a,b], f^2(x)-\alpha f(x)g(x)+g^2(x)=\left(f(x)-\frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2-\frac{\alpha^2}{4}g^2(x)+g^2(x)$

$$=\underbrace{\left(f(x)-\frac{\alpha}{2}g(x)\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(\frac{4-\alpha^2}{4}\right)}_{\substack{\geq 0\\ car\ \alpha\in[-2,2]}}\underbrace{g^2(x)}_{\geq 0}\geq 0.$$

Donc, $\int_{[a,b]} f^2-\alpha fg+g^2\geq 0$ par positivité de l'intégrale.

D'après le lemme d'annulation,

$\int_{[a,b]} f^2-\alpha fg+g^2=0 \Leftrightarrow f^2-\alpha fg+g^2=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in[a,b], \left(f(x)-\dfrac{\alpha}{2}g(x)\right)^2+\left(\dfrac{4-\alpha^2}{4}\right)g^2(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in[a,b], \left(f(x)-\dfrac{\alpha}{2}g(x)\right)^2=0\ et\ \left(\dfrac{4-\alpha^2}{4}\right)g^2(x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\alpha=\pm2 \text{ et } \forall x\in[a,b], \big(f(x)-g(x)\big)^2=0\right]$ ou $[\alpha\neq\pm2$ et $g(x)=0\ et\ f(x)=\dfrac{\alpha}{2}g(x)=0]$

$\Leftrightarrow [\alpha=\pm2$ et $f=g\,]ou\,[\alpha\neq\pm2$ et $f=g=0]$

3) Soit $f\in C^0([0,1],[0,1])$ telle que : $\int_0^1 f=\int_0^1 f^{\,2}$. Montrer que f est constante égale à 0 ou 1.

On a : $0=\int_0^1 f-\int_0^1 f^2=\int_0^1 f(t)-f^2(t)dt=\int_0^1 f(t)\,(1-f(t))dt$. Or $\forall t\in[0,1], 0\leq f(t)\leq 1$ $donc$ $f(t)(1-f(t))\geq 0$. $f(1-f)$est donc une fonction continue , positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Le lemme d'annulation assure alors que $\forall t\in[0,1], f(t)\big(1-f(t)\big)=0$. Donc, $\forall t\in[0,1], f(t)=0$ ou $f(t)=1$. Autrement dit, $f([0,1])\subset\{0,1\}$. De plus f est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc $f([0,1])$ est un intervalle non vide inclus dans $\{0,1\}$. Il en découle que :
$f([0,1])=\{0\}$ ou $f([0,1])=\{1\}$. Cela signifie que f est soit constante égale à 0 ou constante égale à 1.

4) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et a un $réel$ tel que $f(a)>0$. Justifier que : $\exists r>0$ / $\int_a^{a+r} f(x)dx>0$ et $\int_{a-r}^a f(x)dx>0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)>0$. Comme $\frac{f(a)}{2}<f(a)$, le cours assure qu'il existe un réel $r>0$ tel que : $\forall x\in[a-r,a+r], f(x)\geq\frac{f(a)}{2}$.
Alors, $\int_a^{a+r} f(x)dx\geq\int_a^{a+r}\frac{f(a)}{2}dx=\frac{f(a)}{2}r>0$ et $\int_{a-r}^a f(x)dx\geq\int_{a-r}^a\frac{f(a)}{2}dx=\frac{f(a)}{2}r>0$.

Ex 3 Sommes de Riemann

1. Calculer les limites quand $n\to+\infty$ de $u_n=\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+..+\sqrt[n]{2^n}}{n}$, $w_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)}$, $s_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$, $r_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n} k\sin(\frac{k\pi}{n})$ et $x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$.

- $u_n=\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+..+\sqrt[n]{2^n}}{n}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} \underbrace{=}_{f(x)=2^x=e^{x\ln(2)}} \underbrace{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ sur\ [0,1]}}.$

f étant continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\int_0^1 f(t)dt=\left[\frac{1}{\ln(2)}2^x\right]_0^1=\frac{1}{\ln(2)}(2-1)=\frac{1}{\ln(2)}$.

- $w_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)}>0$. Posons $v_n=\ln(w_n)=\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \underbrace{=}_{f(x)=\ln(1+x)} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ sur\ [0,1]}}.$

f étant continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\ln(1+t)dt=\int_1^2\ln(u)\,du=[u\ln(u)-u]_1^2=2\ln(2)-1$.

- $s_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}=\sum_{p=0}^n\frac{(n+p)}{(n+p)^2+n^2}=\sum_{p=0}^n\frac{n\left(1+\frac{p}{n}\right)}{n^2[\left(1+\frac{p}{n}\right)^2+1]}=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^n\frac{\left(1+\frac{p}{n}\right)}{[\left(1+\frac{p}{n}\right)^2+1]} \underbrace{=}_{f(x)=\frac{1+x}{x^2+1}} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n}\right)$

f étant continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}dt=\left[Arctan(t)-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln(2)}{2}$.

- $r_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n}k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=4\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{2n}\sin\left(2\pi\frac{k}{2n}\right)\underbrace{=}_{f(x)=x\sin(2\pi x)}4\underbrace{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ entre\ 0\ et\ 1}}=4s_{2n}$ où $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

f étant continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\int_0^1 f(t)dt$. Alors, (r_n) étant une suite extraite de (t_n), (r_n) tend aussi vers $\int_0^1 f(t)dt$.

De plus, $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 t\sin(2\pi t)\,dt=\left[t\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1-\int_0^1\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}dt=-\frac{1}{2\pi}+\left[\frac{\sin(2\pi t)}{4\pi^2}\right]_0^1=-\frac{1}{2\pi}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=-\frac{1}{2\pi}$.

- $x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}}\underbrace{=}_{f(x)=\frac{x}{e^x}}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ entre\ 0\ et\ 1}}$. f étant continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\int_0^1 f(t)dt$.

Or, $\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 te^{-t}dt=[-te^{-t}]_0^1-\int_0^1-e^{-t}dt=-\frac{1}{e}+[-e^{-t}]_0^1=1-\frac{2}{e}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1-\frac{2}{e}$.

2. Justifier que $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x$. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

D'après la formule de Taylor reste-intégral,

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x)=x+\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}(-\cos(t))dt=x-\underbrace{\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)dt}_{\substack{\ge 0\ car\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\forall t\in[0,x],\\ \frac{(x-t)^2}{2}\ge 0\ et\ \cos(t)\ge 0}}\le x.$$

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^4}{2}\cos(t)\,dt=x-\frac{x^3}{6}+\underbrace{\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}\cos(t)dt}_{\substack{\ge 0\ car\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\forall t\in[0,x],\\ \frac{(x-t)^2}{2}\ge 0\ et\ \cos(t)\ge 0}}\ge x-\frac{x^3}{6}.$$

Ainsi, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], x-\frac{x^3}{6}\le\sin(x)\le x.$

Soit $n\in\mathbb{N}^*.\forall k\in[\![1,n]\!],\frac{k}{n^2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *donc* $\frac{k}{n^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\le\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\le\frac{k}{n^2}$. De plus, $\sin\left(\frac{k}{n}\right)\ge 0$ *donc*

$\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\sin\left(\frac{k}{n}\right)\le\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)\le\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors, $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\sin\left(\frac{k}{n}\right)\le u_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right]-\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right]\le u_n\le\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right]$.

$\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]-\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\right]}_{v_n}\le u_n\le\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]}_{w_n}$ où $f(x)=x\sin(x)$ et $g(x)=x^3\sin(x)$.

f *et* g étant continues sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 g(t)dt\in\mathbb{R}$. Par conséquent,
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)=0\times\int_0^1 g(t)dt=0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1 f(t)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.
Le théorème de limite par encadrement assure alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 t\sin(t)\,dt=[t(-\cos(t))]_0^1-\int_0^1-\cos(t)\,dt=$
$-\cos(1)+[\sin(t)]_0^1=\sin(1)-\cos(1)$.

3. Soit $T_n=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}, n\in\mathbb{N}^*$.
   a. Démontrer que : $\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}\le T_n\le\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}$.
   b. En déduire la limite de T_n quand $n\to+\infty$.

$$T_n=\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2(p+n)+1}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{2p+2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+n+\frac{1}{2}}.\ Or,\ \sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+n+1}\le\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+n+\frac{1}{2}}\le\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}$$
$$i.e.\ \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+n}\le\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p+n+\frac{1}{2}}\le\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}.\ Par\ conséquent,\ \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}\le T_n\le\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}.$$

b) $\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{p}{n}}\underbrace{=}_{où\ f(x)=\frac{1}{1+x}}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}f\left(\frac{p}{n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ entre\ 0\ et\ 1}}$ et $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n+p}=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ entre\ 0\ et\ 1}}$. Comme f est continue sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}f\left(\frac{p}{n}\right)=$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}f\left(\frac{p}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt=\ln(2)$. Ainsi par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\frac{\ln(2)}{2}$.

4. Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}, n\in\mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*, S_{2n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}$. On reconnaitra une somme de Riemann .
   c. En déduire que la suite (S_n) est aussi convergente et déterminer sa limite.

$$a.\ S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ pair}}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ impair}}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ pair}}\frac{-1}{k}+\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ impair}}\frac{1}{k}=-\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ pair}}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le 2n}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ pair}}\frac{1}{k}$$

$S_{2n} = -2\sum_{\substack{1\le k\le 2n\\ k\ pair}} \frac{1}{k} + \sum_{1\le k\le 2n}\frac{1}{k} = -2\sum_{1\le 2p\le 2n}\frac{1}{2p} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = -\sum_{1\le 2p\le 2n}\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$

$S_{2n} = -\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} = \left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac{1}{2n}\right) - \left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n\right).$

$S_{2n} = \sum_{k=n}^{2n}\frac1k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n} = \frac1n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\frac kn+1} = \frac1n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac kn+1} + \frac{1}{2n} \underbrace{=}_{f(x)=\frac{1}{1+x}} \underbrace{\frac1n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac kn\right)}_{\substack{somme\ de\ Riemann\\ de\ f\ entre\ 0\ et\ 1}} + \frac{1}{2n}$. Comme f est contiue sur $[0,1]$,

$\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac kn\right) = \int_0^1 f(t)dt = \ln(2)$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0. Donc,\ \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2).$

$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}. Donc,\ \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2).$

Alors comme $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ln(2) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2).$

5. Soit f une fonction réelle et M-lipchitzienne sur $[0,1]$ où $M \in \mathbb{R}^{+*}$. But :calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right)$.
   a. Justifier que f admet une unique primitive F sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et que les réels $\int_0^1 f(t)dt$, $\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\int_0^1 f(t)F(t)dt$ existent.
   b. Compléter $\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\left[\frac{\cdots}{\cdots}\sum_{\cdots}^{\cdots} f\left(\frac kn\right)\right]$. On pose $\varepsilon_{l,n} = \frac1n\left[\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right)\right] - \left[\int_0^{l/n} f(t)dt\right]$.
   c. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall l \in [\![1,n]\!], |\varepsilon_{l,n}| \le \frac Mn$. ($Cf$ preuve du théorème des sommes de Riemann) .
   d. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\varepsilon_{l,n} = 0$.
   e. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt$.

a. f est continue sur $[0,1]$ donc $|f|$ est continue sur $[0,1]$ et f admet une primitive F sur l'intervalle $[0,1]$. Alors F est de classe $C^1 donc\ continue\ sur\ [0,1]. Donc\ fF\ est\ continue\ sur\ [0,1]\ .Aisni$, les réels $\int_0^1 f(t)dt$, $\int_0^1|f(t)|dt$ et $\int_0^1 f(t)F(t)dt$ existent.

b. $\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\left[\frac1n\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right)\right]$.

c. $|\varepsilon_{l,n}| = \left|\frac1n\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right) - \int_0^{\frac ln} f(t)dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{l}\frac1n f\left(\frac kn\right) - \sum_{k=1}^{l}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f(t)dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{l}\left[\frac1n f\left(\frac kn\right) - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f(t)dt\right]\right|$

$|\varepsilon_{l,n}| = \left|\sum_{k=1}^{l}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f\left(\frac kn\right)dt - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f(t)dt\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{l}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f\left(\frac kn\right)dt - \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f(t)dt\right]\right| = \left|\sum_{k=1}^{l}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f\left(\frac kn\right) - f(t)dt\right]\right|$

$|\varepsilon_{l,n}| \underset{\substack{I.T\\ dans\ \mathbb{R}}}{\le} \sum_{k=1}^{l}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} f\left(\frac kn\right) - f(t)dt\right| \underset{\substack{I.T\\ iintégral}}{\le} \sum_{k=1}^{l}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn}\left|f\left(\frac kn\right) - f(t)\right|dt$

$|\varepsilon_{l,n}| \underbrace{\le}_{\substack{car\ f\ est\\ M-lischitzienne}} \sum_{k=1}^{l}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} M\left|\frac kn - t\right|dt = \sum_{k=1}^{l}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} M\left(\frac kn - t\right)dt = \sum_{k=1}^{l}\left[-\frac{M\left(\frac kn - t\right)^2}{2}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn}$

$|\varepsilon_{l,n}| \le \sum_{k=1}^{l}\frac M2\left(\frac1n\right)^2 = \frac M2\left(\frac1n\right)^2 l \underbrace{\le}_{car\ l\le n} \frac M2\left(\frac1n\right)^2 n \le \frac{M}{2n} \le \frac Mn$

d. $\left|\frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\varepsilon_{l,n}\right| \le \frac1n\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(\frac ln\right)\right||\varepsilon_{l,n}| \le \frac1n\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(\frac ln\right)\right|\frac Mn = \frac Mn\left[\frac1n\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(\frac ln\right)\right|\right]$. Comme $|f|$ est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(\frac ln\right)\right| = \int_0^1|f(t)|dt \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}\frac Mn\left[\frac1n\sum_{l=1}^{n}\left|f\left(\frac ln\right)\right|\right] = 0$. Il s'en suit : $\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\varepsilon_{l,n} = 0$.

e. $\varepsilon_{l,n} = \frac1n\left[\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right)\right] - \left[\int_0^{\frac ln} f(t)dt\right] = \frac1n\left[\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right)\right] - F\left(\frac ln\right)$

$\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\left[\frac1n\sum_{k=1}^{l} f\left(\frac kn\right)\right] = \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\left[\varepsilon_{l,n} + F\left(\frac ln\right)\right] = \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)\varepsilon_{l,n} + \frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)F\left(\frac ln\right).$

Comme fF est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac1n\sum_{l=1}^{n} f\left(\frac ln\right)F\left(\frac ln\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant la limite obtenue au $d.$,

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac kn\right) f\left(\frac ln\right) = \int_0^1 f(t)F(t)dt$.

Suites d'intégrales

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,on pose $I_n = \int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{1+t}}dt$.
   a. Calculer $I_0, I_1\ et\ I_2$.
   b. Etudier la monotonie et la convergence de (I_n). Trouver sa limite.
   c. Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de (nI_n) grâce à une IPP. En déduire un équivalent simple de I_n en $+\infty$.
   d. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et vérifier la cohérence avec les limites obtenues aux questions b et c
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, On pose $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx.$
   a. Calculer $I_0, I_1\ et\ I_2$.
   b. Etablir une relation de récurrence entre $I_n\ et\ I_{n+1}$.
   c. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
   d. Déterminer la limite de I_n.
3. Soit $\forall n\in\mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac\pi4} tan^{2n}(t)dt.$
   1) Etudier le sens de variation de (I_n). En déduire que (I_n)est convergente.
   2) Calculer $I_n + I_{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de (I_n).
   3) Déterminer un équivalent de I_n quand $n\to+\infty$.

Plus théorique…

1. Soit f une fonction continue sur $[0,2]$. Objectif : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{n\int_0^1\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)dx}_{u_n}$.
   a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$ existe et $u_n = n\left[\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\right]$.
   b. En utilisant une primitive de f, déterminer la limite de la suite u.
2. Soit f une fonction réelle et continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.
3. Soit f une fonction réelle et continue sur $[0,1]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x^n)dx$.

1a. Soit f une fonction continue sur $[0,2]$.

$$u_n = n\int_0^1\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)dx = \left[n\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{n}\right)dx\right] - n\int_0^1 f(x)dx \overset{\substack{CV\\ u=x+\frac{1}{n}}}{\triangleq} \left[n\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(u)du\right] - n\int_0^1 f(x)dx$$

$$\overset{Chasles}{\triangleq} \left[n\int_{\frac{1}{n}}^0 f(u)du + n\int_0^1 f(u)du + n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(u)du\right] - n\int_0^1 f(x)dx = n\left[\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt\right].$$

1b. **1ère méthode** : Soit F une primitive de f sur $[0,2]$.

Alors, $u_n = n\left[F\left(1+\frac{1}{n}\right)-F(1)\right] - n\left[F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)\right] = \left[\frac{F\left(1+\frac{1}{n}\right)-F(1)}{\frac{1}{n}}\right] - \left[\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}{\frac{1}{n}}\right]$. Comme F est dérivable en 0 et en 1,

$\lim\limits_{t\to1}\frac{F(t)-F(1)}{t-1} = F'(1) = f(1)$ donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F\left(1+\frac{1}{n}\right)-F(1)}{\frac{1}{n}} = f(1)$, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)-F(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0)$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(1)-f(0)$.

2ème méthode : L'égalité de la moyenne assure qu'il existe $c_n \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$ et $d_n \in \left[0,\frac{1}{n}\right]$ tel que :

$\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt = f(c_n)\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n}f(c_n)$ et $\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(t)dt = f(d_n)\left(\frac{1}{n}-0\right) = \frac{1}{n}f(d_n)$. Donc, $u_n = f(c_n)-f(d_n)$.

Comme$c_n \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$ et $d_n \in \left[0,\frac{1}{n}\right]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$. Alors par continuité de f en 0 et en 1, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(1)-f(0)$.

2. Soit f une fonction réelle et continue sur $[a,b]$. Soit $G(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$.

Alors $G(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x f(t)dt = 2F(x)-F(a)-F(b)$ où F est une primitive de f sur $[a,b]$.
G est continue sur $[a,b]$ (puisque F l'est) et $G(a) = F(a)-F(b)$ et $G(b) = F(b)-F(a) = -G(a)$. Donc $G(a)$ et $G(b)$ sont de signes opposés. Alors le TVI assure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $G(c) = 0$. Alors $\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt$.

3. Soit f une fonction réelle et continue sur $[0,1]$. Montrons $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$. Posons$u_n = \int_0^1 f(x^n)dx$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $a \in]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_n - f(0) = \int_0^1 f(x^n)dx - f(0) = \int_0^1 f(x^n)dx - \int_0^1 f(0)dx = \int_0^1 f(x^n)-f(0)dx$
$u_n - f(0) = \int_0^a f(x^n)-f(0)dx + \int_a^1 f(x^n)-f(0)dx$.
$|u_n - f(0)| \underset{I.T}{\leq} \left|\int_0^{1-a} f(x^n)-f(0)dx\right| + \left|\int_a^1 f(x^n)-f(0)dx\right| \underset{\substack{I.T\\ intégral}}{\leq} \int_0^a |f(x^n)-f(0)|dx + \int_a^1 |f(x^n)-f(0)|dx$.

f est continue sur le segment $[0,1]$ donc f est bornée sur ce segment. Il existe donc un réel M tel que $\forall t \in [0,1], |f(t)| \leq M$.
Donc $\forall x \in [a,1], |f(x^n)-f(0)| \leq |f(x^n)| + |f(0)| \leq 2M$. Alors, par croissance de l'opérateur intégral,
$\int_a^1 |f(x^n)-f(0)|dx \leq \int_a^1 2Mdx = 2M(1-a)$.
Choisissons a tel que : $2M(1-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons donc $a = \max\left(1-\frac{\varepsilon}{4M},\frac{1}{2}\right)$. Alors $\int_a^1 |f(x^n)-f(0)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
f est continue en 0 donc il existe $r > 0$ tel que $\forall t \in [0,r], |f(t)-f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$. Or, $\forall x \in [0,a], 0 \leq x \leq a \leq 1$ donc $0 \leq x^n \leq a^n$. Comme $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, 0 \leq a^n \leq r$ et par conséquent, $\forall n \geq N, \forall x \in [0,a], 0 \leq x^n \leq r$. J'en déduis que $\forall n \geq N, \forall x \in [0,a], |f(x^n)-f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2a}$. Alors par croissance de l'opérateur intégral, je peux affirmer que $\forall n \geq N, \int_0^a |f(x^n)-f(0)|dx \leq \int_0^a \frac{\varepsilon}{2a}dx = \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, $\forall n \geq N, |u_n - f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Je peux ainsi conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

Suite $\boldsymbol{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n\geq1}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

A. Convergence ou divergence $\boldsymbol{(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})_{n\geq1}}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et la suite (Z_n) définie par : $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$
2. Montrer que si $\alpha > 0$ alors pour tout entier naturel k non nul , $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.
   a. En déduire la limite et un équivalent de (Z_n) quand $\alpha \leq 1$.
   b. Montrer que la suite (Z_n) converge quand $\alpha > 1$.

Soit n entier naturel. $Z_{n+1} - Z_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$. La suite (Z_n) est strictement croissante.

1. $\forall n, Z_n \geq \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}$.

Or, si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = +\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$ dès que $\alpha < 0$.
Si $\alpha = 0$ alors $Z_n = \sum_{k=1}^n 1 = n$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$ si $\alpha = 0$.

2. Prenons $\alpha > 0$. Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Comme $\alpha > 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $k > 0$. $\forall t \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ $donc$ $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. Alors par croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt$.Ainsi, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$.

Alors pour tout $n > 0$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Donc, $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^n F(k+1) - F(k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Ainsi, $Z_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1 \leq F(n+1) - F(1) \leq Z_n$ $où$ F est une primitive $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $F(t) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \; si \; \alpha \neq 1 \\ \ln(t) \; si \; \alpha = 1 \end{cases}$.

Ainsi, $si\ \alpha = 1\ alors\ \ ln(n+1) \leq Z_n \leq ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$

$si\ \alpha \neq 1\ alors\ \frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] \leq Z_n \leq \frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1$.

Si $\alpha = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$.

De plus $ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1 \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car \\ \left(-\frac{1}{n+1}+1\right) est\ bornée \\ et\ (\ ln(n+1))\ tend\ vers +\infty}} \ln(n+1) \underbrace{\sim_{+\infty}}_{\substack{car \\ \ln(n+1)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ et\ \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) tend\ vers\ 0 \\ tandis\ que\ \ln(n) tend\ vers}} \ln(n)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\lambda = \begin{cases} 0 \; si \; \lambda < 0 \\ 1 \; si \; \lambda = 0 \\ +\infty \; si \; \lambda > 0 \end{cases}}$$

2a. Si $\alpha = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$.

De plus, $ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1 \sim_{+\infty} ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \ln(n)$. Et $\frac{ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{Z_n}{\ln(n)} \leq \frac{\left[ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1\right]}{\ln(n)}$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{Z_n}{\ln(n)} = 1$ et ainsi, $Z_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] = +\infty$ $donc,$ $\lim_{n\to+\infty} Z_n = +\infty$.

De plus, $\frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1 \sim_{+\infty} \frac{1}{1-\alpha} n^{-\alpha+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1$. Par conséquent, $Z_n \sim_{+\infty} \frac{1}{1-\alpha} n^{-\alpha+1}$.

2.b. Si $\alpha > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1 = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{R}$ donc $\left(\frac{1}{-\alpha+1}[(n+1)^{-\alpha+1} - 1] - \frac{1}{(n+1)^\alpha} + 1\right)$ est majorée et par conséquent, (Z_n) est majorée. Comme (Z_n) est croissante, (Z_n) est convergente.

B. Limite de $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n\geq1}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

1. Justifier que la suite (S_n) converge.

2. Prouver que si f est une fonction réelle de classe C^1sur $[a,b]$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

3. Montrer que : φ: $\left(t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{\sin(t)} \; si \; t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ 1 \; si \; t = 0 \end{cases}\right)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on donnera une expression φ' .

4. Trouver une fonction polynomiale h de degré 2 et telle que $h(0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi h(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall t \in [0,\pi], h(t)\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\varphi\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)$.

6. En déduire que : $S_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{u}{\pi} - 1\right)\varphi(u)\sin((2n+1)u)\,du - \frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt$.

7. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

DL 11

A. Dérivation de fonctions définies par un intégrale .

1. Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt\right)$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer cette dérivée.
2. Calculer $\lim_{x\to1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$.
3. Montrer que f : $\left(x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt\right)$ est constante (par deux méthodes).

1. Soit x un réel . g_x: $\left(t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t}\right)$est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\frac{\sin(xt)}{t} \sim_{t\to0} \frac{xt}{t} = x$. Donc $\lim_{t\to0} g_x(t) = x$, autrement dit, $g_x$est prolongeable par continuité en 0 par la valeur x. Donc l'intégrale de g_x sur le segment d'extrémités 0 et x existe.

   Posons $I(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt$. Alors $I(0) = 0$.

   Prenons $x \neq 0$. Alors, $I(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ u=xt \\ du=xdt \\ t=0\Leftrightarrow u=0 \\ t=x\Leftrightarrow u=x^2}} \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{\left(\frac{u}{x}\right)}\left(\frac{du}{x}\right) = \int_0^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du$. Comme $\widetilde{g_1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\widetilde{g_1}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$ notée G qui est de classe C^1sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \neq 0, I(x) = G(x^2) - G(0)$. Comme G est de classe C^1sur $\mathbb{R}$, I est au moins de classe C^1sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = 2xG'(x^2) = \frac{2x\sin(x)}{x} = 2\sin(x)$. Donc, $\lim_{x\to0} I'(x) = 0$. De plus, $\lim_{\substack{x\to0 \\ x\neq0}} G(x^2) - G(0) = G(0) - G(0) = 0 = I(0)$ donc I est continue en 0. Ainsi le critère de classe C^1assure que I est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $I'(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = 2\sin(x)$ $i.e.$ $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) = 2\sin(x)$.

4. Calculons $\lim_{x\to1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$. Posons $A(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$

   Posons $f(t) = \frac{t^2}{1+t^8}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \neq 1, A(x) = \underbrace{\frac{1}{x-1}[F(x) - F(1)]}_{\substack{taux\ d'accroissement \\ de\ F\ entre\ 1\ et\ x}}$.

Comme F est dérivable en 1, je peux conclure que $\lim_{x\to 1} A(x) = F'(1) = f(1) = \frac{1}{2}$

5. Montrer que $f : \left(x \mapsto \int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt\right)$ est constante (par deux méthodes).

$u: \left(t \mapsto Arcsin(\sqrt{t})\right)$ et $v: \left(t \mapsto Arccos(\sqrt{t})\right)$ sont continues sur [0,1]. Or, $\forall x \in \mathbb{R}, [0, sin^2(x)] \subset [0,1]$ et $[0, cos^2(x)] \subset [0,1]$. Donc $\int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt$ et $\int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt$ existe. Donc $Df = \mathbb{R}$.

De plus $f(-x) = \int_0^{sin^2(-x)} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2(-x)} Arccos(\sqrt{t})dt = \int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt = f(x)$ et

$f(x+\pi) = \int_0^{sin^2(x+\pi)} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2(x+\pi)} Arccos(\sqrt{t})dt = \int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt = f(x)$.

Ainsi, f est paire et π −périodique. Nous pouvons donc étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1ère méthode par dérivation:

Comme u et v sont continues sur [0,1], u et v admettent chacune une primitive U et V sur [0,1].

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt = U\left(sin^2(x)\right) - U(0) + V\left(cos^2(x)\right) - V(0)$. Comme $U, V, sin^2 et\ cos^2$ sont de classe C^1sur leur propre domaine de définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\,U'\left(sin^2(x)\right) - 2\sin(x)\cos(x)\,V'\left(cos^2(x)\right)$

$f'(x) = \sin(2x)[Arcsin\left(\sqrt{sin^2(x)}\right)$- $Arccos\left(\sqrt{cos^2(x)}\right)] = \sin(2x)[Arcsin(|\sin(x)|)$- $Arccos(|\cos(x)|)]$

Alors, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \sin(2x)[Arcsin(\sin(x))$- $Arccos(\cos(x))] = \sin(2x)\,[x - x] = 0$.Donc f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et par parité et périodicité, j'en déduis que f est constante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} Arcsin(\sqrt{t})dt + \int_0^{\frac{1}{2}} Arccos(\sqrt{t})dt = \int_0^{\frac{1}{2}} Arcsin(\sqrt{t}) + Arccos(\sqrt{t})dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$.

2ème méthode par changement de variables:

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt \underbrace{=}_{\substack{t=\sin^2(u)\\ dt=2\sin(u)\cos(u)du\\ u=x \Rightarrow t=sin^2(x)\\ u=0 \Rightarrow t=0}} \int_0^{sin^2 x} Arcsin\left(\sqrt{sin^2(u)}\right).\sin(2u)\,du$

$\int_0^{sin^2 x} Arcsin(\sqrt{t})dt = \int_0^x Arcsin(\sin(u)).\sin(2u)du = \int_0^x u.\sin(2u)du$.

De même, $\int_0^{cos^2 x} Arccos(\sqrt{t})dt \underbrace{=}_{\substack{t=\cos^2(u)\\ dt=-2\sin(u)\cos(u)du\\ u=x \Rightarrow t=cos^2(x)\\ u=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} Arcsin(\sin(u)).(-\sin(2u))du = \int_x^{\frac{\pi}{2}} u.\sin(2u)du.$

Donc, $f(x) = \int_0^x u.\sin(2u)\,du + \int_x^{\frac{\pi}{2}} u.\sin(2u)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u.\sin(2u)\,du = \left[u\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2u)\,du$

$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

B. Limite d'une fonction définie par un intégrale .

4. Etude de la limite en 0 des fonctions $\left(x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt\right)$ et $\left(x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(2t)}{t}dt\right)$.
5. Soit f une fonction continue sur [0,1]. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

C. Etude de fonctions définies par un intégrale .

6. Soit f la fonction définie sur **R*** par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

a. Montrer que f est impaire.

b. Etudier les variations de f.

c. Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$et déterminer sa limite en 0 et sa limite en $+\infty$.

8. Soit Φ la fonction définie par : $\Phi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt$.

a. Déterminer $D_\Phi$et calculer $\Phi(0)$.

b. Montrer que :$\forall x > 0, \frac{\pi}{4}e^{-2x} \le \Phi(x) \le \frac{\pi}{4}e^{-x}$ .En déduire la limite de Φ en $+\infty$ et la branche infinie C_Φ $en + \infty$.

c. Faites de même en $-\infty$.

d. Etudier les variations de Φ et représenter son graphe.

9. Soit $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}dt$.

e. Déterminer Df. Etudier la parité de f.

f. Etudier la dérivabilité de f et donner une expression de $f'(x)$. Reconnaitre f.

Etude d'une primitive

Soit f et I les fonctions définies par : $f(t) = \frac{Arctan(2t)-Arctan(t)}{t}$ et $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. Calculer $\lim_{t\to 0} f(t)$.
2. Montrer que I est définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $I'(x)$.

Dans la suite , on cherche à justifier l'existence et calculer $\lim_{x\to+\infty} I(x)$

3. Montrer que I est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Que peut -on en déduire sur $\lim_{x\to+\infty} I(x)$?

4. Montrer par IAF que $\forall x \geq 0, Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.
5. En déduire que I est majorée sur $\mathbb{R}^+$. Que peut -on en déduire sur $\lim_{x\to+\infty} I(x)$?
6. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que : $\int_0^x f(t)dt = \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$.
7. Prouver, par encadrement, que $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} ln(2)$.
8. En déduire $\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

1) au voisinage de 0, je sais que : $Arctan(u) = u + u\underbrace{\varepsilon(u)}_{\underset{u\to0}{\longrightarrow}0}$ .Donc $Arctan(2t) = 2t + 2t \underbrace{\varepsilon(2t)}_{\substack{\underset{t\to0}{\longrightarrow}0 \\ par \\ composition}}$.

Donc , $f(t) = \frac{2t+2t\varepsilon(2t)-t-t\varepsilon(t)}{t} = 1 + 2\varepsilon(2t) - \varepsilon(t)$. Donc, $\lim_{t\to0} f(t) = 1$ et f est donc prolongeable par continuité en 0. Notons $\tilde{f}$ son prolongement. f étant continue sur $\mathbb{R}^*$, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Alors $\tilde{f}$ admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 : il s'agit de I.Par conséquent, I est de classe C^1sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases}$.

3) $\forall x > 0, 2x > x\ donc\ Arctan(2x) > Arctan(x)\ et\ \frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{x} > 0$.
$\forall x < 0, 2x < x\ donc\ Arctan(2x) < Arctan(x)\ et\ \frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{x} > 0$.
Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) > 0$. I est donc strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Alors le théorème de limite d'une fonction monotone assure que I admet une limite en $+\infty$.

4) $Soit\ x > 0. Arctan\ étant\ continue\ sur\ [x, 2x] et\ dérivable\ sur\ ]x, 2x[\ et\ \forall t \in]x, 2x[, |Arctan'(t)| = \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, l'inégalité des accroissements finis assure que : $|Arctan(2x) - Arctan(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^2}$ et par conséquent, $0 \leq Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$ De plus, cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$.
J'en conclus que $\forall x \geq 0, Arctan(2x) - Arctan(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$.

5) Alors, que $\forall x > 1, \frac{Arctan(2x)-Arctan(x)}{x} \leq \frac{1}{1+x^2}$ donc $I(x) - I(1) = \int_1^x \frac{Arctan(2t)-Arctan(t)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = Arctan(x) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.
Ainsi, $\forall x > 1, I(x) \leq \frac{\pi}{4} + I(1)$. La fonction I est donc bornée au voisinage de $+\infty$. J'en déduis que $\lim_{x\to+\infty} I(x)$ est finie.

6) Soit $g(t) = \begin{cases} \frac{Arctan(2t)}{t} & si\ t \neq 0 \\ 2\ si\ t = 0 \end{cases}\ et\ h(t) = \begin{cases} \frac{Arctan(t)}{t} & si\ t \neq 0 \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases}$. $g\ et\ h\ sont\ continues\ sur\ \mathbb{R}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = \int_0^x g(t)dt - \int_0^x h(t)dt$

D'après le théorème de changement de variable , en posant $u = 2t$ dans la première intégrale, on obtient :

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{2x} g\left(\frac{u}{2}\right) \frac{du}{2} - \int_0^x h(t)dt$

$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{2x} \frac{Arctan(u)}{u/2} \frac{du}{2} - \int_0^x \frac{Arctan(t)}{t} dt$

$I(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{2x} \frac{Arctan(u)}{u} du + \int_x^0 \frac{Arctan(t)}{t} dt \underbrace{=}_{\substack{relation \\ de\ Chasles}} \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$

7) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $\forall t \in [x; 2x]$,

$Arctan(x) \leq Arctan(t) \leq Arctan(2x)$

$\underbrace{\frac{Arctan(x)}{t}}_{\varphi(t)} \leq \underbrace{\frac{Arctan(t)}{t}}_{h(t)} \leq \underbrace{\frac{Arctan(2x)}{t}}_{\beta(t)}$

Donc par croissance de l'intégrale appliquée aux fonctions continues α, φ, g sur le segment $[x\ ; 2x]$,

$\int_x^{2x} \frac{Arctan(x)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(2x)}{t} dt$. Donc,

$Arctan(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt \leq Arctan(2x) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$. Donc ,

$Arctan(x)[\ln(t)]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt \leq Arctan(2x)[\ln(t)]_x^{2x}$. Donc,

$Arctan(x)[\ln(2x) - \ln(x)] \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt \leq Arctan(2x)[\ln(2x) - \ln(x)]$. Donc,

$Arctan(x) \times \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt \leq Arctan(2x) \times \ln(2)$.

Or $\lim_{t\to+\infty} Arctan(t) = \frac{\pi}{2}$, donc , par composition , $\lim_{x\to+\infty} Arctan(2x) = \frac{\pi}{2}$.

$Et\ ainsi$, $\int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$ est encadrée par deux expressions de même limite $\frac{\pi}{2}\ln(2)$ quand x tend vers $+\infty$.

8) Puisque $\forall x > 0, I(x) = \int_x^{2x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$, j'en déduis que $\lim_{x\to+\infty} I(x) = \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Etude de deux primitives

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, I(x) = \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Justifier que $I\ et\ J$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et donner une expression de $I'(x)$ et de $J'(x)$.
2. Démontrer que I a une limite finie L en $+\infty$.
3. Démontrer que $\forall (x, \varepsilon) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, J(x) - J(\varepsilon) = \frac{1-\cos(x)}{x} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + I(x) - I(\varepsilon)$. Pourquoi a -t-on introduit ε?
4. En déduire $J(x)$ en fonction de $I(x), \cos(x)\ et\ x$.
5. Conclure que : $J(x)$ tend aussi vers L quand $x \to +\infty$.

1. Soit $f(t)=\begin{cases}\frac{1-cos(t)}{t^2} & si\ t\neq 0\\ \frac{1}{2} & si\ t=0\end{cases}$ et $g(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t)}{t} & si\ t\neq 0\\ 1 & si\ t=0\end{cases}$. f et g sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc le cours assure que I et J sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de respectivement I et J qui s'annulent en 0. Donc, I et J sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x, I'(x)=f(x)=\begin{cases}\frac{1-cos(x)}{x^2} & si\ x\neq 0\\ \frac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$ et de $J'(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$.

2. $\forall x, I'(x)\geq 0$. Donc I est croissante sur $\mathbb{R}$. alors le théorème de limite d'une fonction monotone assure que I admet une limite L en $+\infty$.

$\forall x>1, I(x)=\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt+\int_1^x \frac{1-cos(t)}{t^2}dt.$

Or, $\forall x>1, \forall t\in[1,x],\ 0\leq \frac{1-cos(t)}{t^2}\leq \frac{2}{t^2}$. Donc, $0\leq \int_1^x \frac{1-cos(t)}{t^2}dt\leq \int_1^x \frac{2}{t^2}dt=\left[-\frac{2}{t}\right]_1^x=2-\frac{2}{x}\leq 2.$

$\forall x>1, I(x)=\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt+\int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt\leq I(1)+2$. I est donc majorée et par conséquent, L est finie.

3. $Soit\ (x,\varepsilon)\in(\mathbb{R}^{+*})^2\ tel\ que\ \varepsilon<x.$

$$J(x)-J(\varepsilon)=\int_\varepsilon^x \frac{\sin(t)}{t}dt \underbrace{=}_{\substack{IPP\\ u(t)=1-\cos(t)\\ v(t)=\frac{1}{t}\\ u\ et\ v\ sont\\ C^1\ sur\ [\varepsilon,x]}} \left[(1-\cos(t))\frac{1}{t}\right]_\varepsilon^x-\int_\varepsilon^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt=\frac{1-\cos(x)}{x}-\frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon}+I(x)-I(\varepsilon).$$

v n'est pas de classe C^1sur $[0,x]$ mais l'est sur $[\varepsilon,x]$. C'est pour cette raison qu'on a introduit ε.

4. I et J sont continues en 0 i.e. $\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon)=J(0)=0\ et\ \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=I(0)=0$; alors en passant à la limite quand $\varepsilon\to 0$ dans l'égalité précédente, j'obtiens : $J(x)-J(0)=\frac{1-\cos(x)}{x}-0+I(x)-I(0)$ (puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon}\overset{TA}{=}cos'(0)=0$).

Ainsi, $\forall x>0, J(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}+I(x)$.

5. $(x\mapsto 1-\cos(x))$ est bornée et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} I(x)=L$. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} J(x)$ existe et $\lim_{x\to+\infty} J(x)=L=\lim_{x\to+\infty} I(x)$.

INTEGRALES DE WALLIS

A . Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose. $W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(t))^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre $W_n et\ W_{n-2}$.
2. En déduire une expression de I_{2p} et de I_{2p+1} avec de factorielles puis de coefficients binomiaux.
3. Montrer que nW_nW_{n-1} est indépendant de n et préciser sa valeur.
4. Montrer que la suite (W_n) est monotone et convergente.
5. Déterminer sa limite . (on démontrera autrement ce résultat dans le chapitre « suite »).
6. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}W_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En déduire que $\lim_{p\to+\infty}\frac{\sqrt{\pi p}}{4^p}\binom{2p}{p}=1.$

1. $\forall n\in\mathbb{N}, (t\mapsto(\cos(t))^n)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc W_n existe.

Soit $n\in\mathbb{N}. \forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \cos(t)\in[0,1]$ donc, $0\leq\left(cos(t)\right)^{n+1}\leq\left(cos(t)\right)^n\leq 1.$

Par conséquent, $0\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^{n+1}dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^n dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt$ i.e. $0\leq W_{n+1}\leq W_n\leq\frac{\pi}{2}$.

J'en déduis que la suite W est décroissante et bornée donc convergente.

2. Soit $\varepsilon\in]0,\pi[$. Je cherche $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq n_0, |W_n|\leq\varepsilon$.

$Soit\ n\in\mathbb{N}.\ |W_n|=W_n=\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\left(cos(t)\right)^n dt+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^n dt.$

D' une part, $\forall t\in\left[0,\frac{\varepsilon}{2}\right], 0\leq\left(cos(t)\right)^n\leq 1\ donc,\ 0\leq\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\left(cos(t)\right)^n dt\leq\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}1dt=\frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $\forall t\in\left[\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}\right], 0\leq cos(t)\leq\ cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)<1\ donc, 0\leq\left(cos(t)\right)^n\leq\left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n$.Or, $0\leq\ cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n=0^+$.

Par conséquent, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geq n_0, \left|\left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n\right|=\left(cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^n\leq\frac{\varepsilon}{\pi}$.

Alors, $\forall n\geq n_0, \forall t\in\left[\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}\right], 0\leq\left(cos(t)\right)^n\leq\frac{\varepsilon}{\pi}$ et par croissance de l'intégrale, $0\leq\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^n dt\leq\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varepsilon}{\pi}dt\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varepsilon}{\pi}dt=\frac{\varepsilon}{2}$.

J'en déduis que $\forall n\geq n_0, |W_n|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Je peux ainsi conclure que $\lim_{n\to+\infty}W_n=0.$

3. $Soit\ n\in\mathbb{N}.$

$$W_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^{n+2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(cos(t)\right)^n\left(cos(t)\right)^2 dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\left(1-sin^2(t)\right)dt$$

$$W_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\underbrace{-\sin(t)\cos^n(t)}_{u'(t)}\right]\underbrace{\sin(t)}_{v(t)}dt=W_n+\left[\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\cos(t)\,dt=W_n-\frac{W_{n+2}}{n+1}.$$

Donc, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)W_{n+2}=W_n\ et\ ainsi,\ W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$.

<u>1er cas : n pair i.e. $n=2p$</u>

$$W_{2p}=\frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}=\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)W_{2p-4}=\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{2p-4}\right)W_{2p-6}=\dots=\left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\dots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}W_0$$

$W_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3}{(2p)(2p-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2}\ car\ W_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dt=\frac{\pi}{2}$

$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots3}{(2p)(2p-2)\dots4.2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots4\times3\times2}{(2p)^{2(2p-2)2}\dots4^2\times2^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p[p(p-1)\dots2\times1]^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $W_{2p} = \frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2}$.

<u>2$^{\text{èmz}}$ cas : n impair i.e. $n = 2p+1$</u>

$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}W_{2p-1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)W_{2p-3} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\left(\frac{2p-4}{2p-3}\right)W_{2p-5} = \dots = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\dots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}W_1$

$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\dots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}$ $car\ W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$

$W_{2p+1} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\dots\frac{4}{5}.\frac{2}{3} = \frac{(2p)^2(2p-2)^2\dots4^2\times2^22}{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots4\times3\times2} = \frac{4^p[p(p-1)\dots2\times1]^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}$. Ainsi, $W_{2p} = \frac{4^p}{(2p+1)\binom{2p}{p}}$.

5. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = nW_nW_{n-1}$ et montrons que la suite t est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_{n-1}W_n = t_n$.

La suite t est donc constante égale à $t_1 = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

6. D'après a., on sait que W est convergente. Notons L sa limite.

Alors en passant à la limite dans l'égalité $W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$, on obtient $L^2 = 0$ soit $L = 0$.

7. W est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{n+1} \le W_n \le W_{n-1}\ et\ \ nW_nW_{n+1} \le nW_n^2 \le nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

Or, $nW_nW_{n-1} = \left[\frac{n}{n+1}\right][(n+1)W_nW_{n-1}] = \left[\frac{n}{n+1}\right]\frac{\pi}{2} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Alors, l'encadrement ci-dessus, permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_n{}^2 = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent , $nW_n{}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}$. Alors, $W_n{}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ et par conséquent, $W_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Alors, $\frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\frac{\pi}{2} = W_{2n} \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Donc, $\binom{2p}{p} \sim_{+\infty} \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$.

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n$ existe et est finie.
2. Etablir une relation entre $J_n\ et\ J_{n+1}$.
3. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = W_{2(n-1)}$ et en déduire la limite de (J_n).

1. Soit n un entier naturel non nul.

Posons $g_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$. g_n est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc d'après le cours, $f_n: (x \mapsto \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt)$ est la primitive de g_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Ainsi, f_n est définie et dérivable donc continue sur [0,1[et $f_n' = g_n$ sur [0,1[.

$\forall$t $\in$ [0,1[, f_n' (t) $= g_n(t) > 0$. Donc, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Alors le théorème de limite d'une fonction monotone, f_n a une limite I_n en $+\infty$ finie ou infinie.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \forall t \in [0,x], 0 \le \frac{1}{(1+t^2)^n} \le \frac{1}{1+t^2}\ donc\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, 0 \le \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \le \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^1}dt = Arctan(x) \le \frac{\pi}{2}$. Comme f_n est majorée, cette limite J_n est finie.

2. Soit n un entier naturel non nul.

$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \int_0^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}t\,dt$

$f_n(x) \underset{IPP}{=} f_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left\{\left[t\left(-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x\left(-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(1+t^2)^n}dt\right\} = f_{n+1}(x) + \left(-\frac{1}{2n}\right)\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}f_n(x)$

$Donc, \left(1 - \frac{1}{2n}\right)f_n(x) = f_{n+1}(x) + \left(-\frac{1}{2n}\right)\frac{x}{(1+x^2)^n}$. Alors, passons à la limite quand $x \to +\infty$ dans cette égalité,

$\left(-\frac{1}{2n}\right)\frac{x}{(1+x^2)^n} \sim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right)x^{1-2n}$. Comme $1 - 2n < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)\frac{x}{(1+x^2)^n} = 0$ et par conséquent, $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)J_n = J_{n+1}$.

Ainsi, $J_{n+1} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)J_n$.

3. Initialisation : $f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = Arctan(x)$ .Donc, $J_1 = \frac{\pi}{2} = W_0$.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $J_n = W_{2(n-1)}$. Alors, $W_{2n} \underset{\substack{d'après\\ A.1.}}{=} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)W_{2n-2} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)J_n = J_{n+1}$.

CCL : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = W_{2(n-1)}$ par le théorème de récurrence simple.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_{2(n-1)} = 0$ (car $(W_{2(n-1)})$ $est\ extraite\ de\ W$).J'en déduis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

C . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Justifier que f_n est bien définie sur [0,1[.
   b) Calculer f_0 et sa limite I_0 en 1^-.
   c) Montrer que la fonction f_n est majorée par I_0 .
   d) En déduire l'existence de la limite I_n de f_n en 1$^-$.
2. a) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente.
   b) Trouver une relation entre f_n et f_{n-2}, pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
   c) En déduire la relation $nI_n = (n-1)\,I_{n-2}$ valable pour tout entier naturel $n \ge 2$.
   d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = W_n$ par deux méthodes.

1a) Posons $g_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$. g_n est continue sur l'intervalle [0,1[donc d'après le cours, f_n est la primitive de g_n sur [0,1[qui s'annule en 0.

Ainsi, f_n est définie et dérivable donc continue sur [0,1[et $f_n' = g_n$ sur [0,1[.

1b) $\forall x \in [0,1[$, $f_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = Arcsin(x). Donc, I_0 = \lim\limits_{x\to1^-} f_0(x) = \frac{\pi}{2}$.

1c) Soit $x \in [0,1[$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Donc, par croissance de l'opérateur intégral, $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Donc, $0 \leq f_n(x) \leq Arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la fonction f_n est majorée par I_0 .

1d) $\forall t \in [0,1[, f_n'(t) = g_n(t) \geq 0$ et $f_n'(t)$ ne s'annule qu'en0 . Donc, f_n est strictement croissante sur $[0,1[$. Alors le théorème de limite d'une fonction monotone, f_n a une limite I_n en 1^- finie ou infinie. Comme f_n est majorée, cette limite I_n est finie.

2a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n = \lim_{x\to 1^-} f_n(x)$ et $I_{n+1} = \lim_{x\to 1^-} f_{n+1}(x)$.

$\forall x \in [0,1[, \forall t \in [0,x], t \in [0,1]$ $donc, 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$; alors, $0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$ J'en déduis que : $\forall x \in [0,1[$, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Donc, par passage à la limite quand $x \to 1^-, 0 \leq I_{n+1}(x) \leq I_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

La suite (I_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.

2b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

$\forall x \in [0,1[, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int_0^x t^{n-1}\frac{1}{2}\frac{(-2t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\left\{\left[t^{n-1}\sqrt{1-t^2}\right]_0^x - \int_0^x (n-1)t^{n-2}\sqrt{1-t^2}dt\right\}$

$$f_n(x) = x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int_0^x t^{n-2}\frac{(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}dt = x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)\int_0^x \frac{t^{n-2}}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$f_n(x) = x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)[f_{n-2}(x) - f_n(x)]$

Ainsi, $\forall x \in [0,1[,\ nf_n(x) = x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + (n-1)f_{n-2}(x)$.

2c) Donc, par passage à la limite quand $x \to 1^-, nI_n = 0 + (n-1)I_{n-2}$. Ainsi, $I_n = \frac{(n-1)}{n}I_{n-2}$.

2d) **<u>1ère méthode</u>** : Effectuons une récurrence double pour prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = W_n$.

$I_0 = W_0$

$\forall x \in [0,1[, f_1(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\int_0^x \frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x = 1 - \sqrt{1-x^2}$. Donc, $I_1 = \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = 1 = W_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose que $W_n = I_n$ et $W_{n+1} = I_{n+1}$. Alors, $I_{n+2} = \frac{(n+1)}{n+2}I_n = \frac{(n+1)}{n+2}W_n = W_{n+2}$.

CCL : le théorème de récurrence double assure alors que$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = W_n$.

<u>2ème méthode</u> : Effectuons un changement de variable

$$\forall x \in [0,1[, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}dt \underbrace{=}_{\substack{CV \\ t\in[0,x]\subset[0,1[\\ t=\sin(u) \\ u=Arcsin(t) \\ du=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt}} \int_0^{Arcsin(x)} sin^n(u)du \underbrace{=}_{\substack{F\ étant \\ une\ primitive \\ de\ (u\mapsto sin^n(u)) \\ sur\ [0,\frac{\pi}{2}]}} F(Arcsin(x)) - F(0).$$

$Donc, I_n = \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(u)du = W_n.$

Inégalité de Cauchy-schwarz

A. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs réelles et telle que $f(0) = 0$.
   a) Soit $x \in [0,1]$ .Montrer que : $f(x)^2 \leq x\int_0^x f'(t)^2dt$.
   b) En déduire que : $\int_0^1 f(x)^2dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2dx$.

B. Soit f et g réelles et continues sur $[0,1]$ et telles que $\int_0^1 f = 0$.
   Montrer que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 g(x)^2dx - \left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\right)$.

C. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que $\inf\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a,b],\mathbb{R}^{+*})\right\} = (b-a)^2$.

1.Soit $x \in [0,1]$. $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$.

Donc $f(x)^2 = \left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 = \left(\int_0^x 1 \times f'(t)dt\right)^2 \overset{C.S(**)}{\leq} \left(\int_0^x 1^2dt\right)\ \left(\int_0^x (f'(t))^2dt\right)\ = x\left(\int_0^x (f'(t))^2dt\right)$. ((**) $(t \mapsto 1)$ et $(t \mapsto f'(t))$ $étant\ continues\ sur\ [0,x], l'inégalitéde\ Cauchy-Schwarz\ s'applique$)

2. $\forall x \in [0,1], f(x)^2 \leq x\left(\int_0^x (f'(t))^2dt\right)$. De plus, $\forall x \in [0,1], \int_0^x (f'(t))^2dt = \int_0^1 (f'(t))^2dt - \int_x^1 (f'(t))^2dt$ et comme f'^2 est positive sur $[0,1]$ donc sur $[x,1]$, $\int_x^1 (f'(t))^2dt \geq 0$. Donc $\forall x \in [0,1], \int_0^x (f'(t))^2dt \leq \int_0^1 (f'(t))^2dt$ et par suite, $\forall x \in [0,1], f(x)^2 \leq x\int_0^x (f'(t))^2dt \leq x\ \underbrace{\int_0^1 (f'(t))^2dt}_{constante\ notée\ C}$. Comme f^2 et l'identité sont continues sur $[0,1]$, la croissance de l'opérateur intégral sur $[0,1]$ assure que $\int_0^1 f(x)^2dx \leq \int_0^1 Cx\,dx = \left[\frac{Cx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2dt$.

B. Posons $\varphi(x) = g(x) - \underbrace{\int_0^1 g(t)dt}_{constante\ C} = g(x) - C$. Alors φ est continue sur $[0,1]$ car g l'est. Comme f l'est aussi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $\left(\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leq (\int_0^1 (f(x))^2dx)(\int_0^1 (\varphi(x))^2dx)$.

Or, $\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)(g(x) - C)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx - C\underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{=0} = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Et, $\int_0^1 (\varphi(x))^2dx = \int_0^1 (g(x) - C)^2dx = \int_0^1 (g(x))^2 - 2Cg(x) + C^2dx = \int_0^1 (g(x))^2dx - 2C\int_0^1 g(x)dx + C^2\int_0^1 1dx$

$$= \int_0^1 (g(x))^2dx - 2C^2 + C^2 = \int_0^1 (g(x))^2dx - C^2 = \int_0^1 (g(x))^2dx - \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2$$

J'en déduis que $\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leq (\int_0^1 (f(x))^2 dx)(\int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2$.

D. $\quad$ *Notons* $A = \left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})\right\}$.

Soit $f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})$. *Alors,* $\frac{1}{f} \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})$ donc $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b \frac{1}{f}$ *existent*. Donc l'ensemble A est bien défini. Par suite, A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et A est non vide puisque $\int_a^b 1 \times \int_a^b \frac{1}{1} = (b-a)^2 \in A$.

De plus, $\forall f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*}), \sqrt{f} \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})$ *et* $\frac{1}{\sqrt{f}} \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})$ donc $C.S$ assure que$\left(\left(\int_a^b \sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 \leq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)\right.$ i.e. $(b-a)^2 = \left(\int_a^b 1\right)^2 \leq \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Donc A est minorée par $(b-a)^2$. Comme, de plus, $(b-a)^2 \in A$, $(b-a)^2$

$$(b-a)^2 = \min\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})\right\} \text{ et par suite, } (b-a)^2 = inf\left\{\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) / f \in C^\circ([a,b\,], \mathbb{R}^{+*})\right\}.$$

Une preuve de l'irrationnalité de *e*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\mathrm{t})^n e^t dt$.

1. Trouver une relation entre u_n et u_{n+1}.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,!}$. On note $v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,!}$.
3. Démontrer que la suite v converge en croissant vers le réel e. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = e$.
4. Supposons un instant que e soit rationnel. Posons alors $e = \frac{m}{q}$ tel que m *et* q entiers naturels non nuls et premiers entre eux.
   a. Montrer que $q!\,(e - v_q) \in \mathbb{N}^*$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *tq* $n > q$, $0 < q!\,(v_n - v_q) \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + .. + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$.
   c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ *tq* $n > q$, $\;0 < q!\,(v_n - v_q) < \frac{1}{q}$.
   d. En déduire que $0 \leq q!\,(e - v_q) \leq \frac{1}{q}$.
   e. Conclure.

1.Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,!}\int_0^1 (1-\mathrm{t})^{n+1} e^t dt = \frac{1}{(n+1)\,!}\left\{[(1-\mathrm{t})^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 -(\mathrm{n}+1)(1-\mathrm{t})^n e^t dt\right\}$

$u_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-\mathrm{t})^n e^t dt = \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\mathrm{t})^n e^t dt$. Ainsi, $u_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)!} + u_n$.

2.$\forall p \in \mathbb{N}, u_{p+1} - u_p = \frac{-1}{(p+1)!}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{p=0}^{n-1}(u_{p+1} - u_p) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-1}{(p+1)!}$. Et après simplification , j'obtiens :

$u_n - u_0 = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)!}$ i.e. $u_n = u_0 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}$. Or, $u_0 = \int_0^1 e^t dt = e - 1$. Ainsi, $u_n = e - 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$.

3. C'est un résultat de cours obtenue grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange: *pour tout réel* x, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} = e^x$.

Donc pour $x = 1$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} = e$.

4. Supposons un instant que $e = \frac{m}{q}$ où m *et* q entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

a. Alors, $q!\,(e - v_q) = q!\left(\frac{m}{q} - \sum_{p=0}^{q} \frac{1}{p!}\right) = m(q-1)! - \sum_{p=0}^{q} \frac{q!}{p!} = m(q-1)! - \sum_{p=0}^{q} q(q-1)(q-2)\ldots(q-p+1)$. Comme la somme et le produit d'entiers sont entiers, $q!\,(e - v_q)$ est entier. De plus, $q!\,(e - v_q) > 0$ car la suie v tend en croissant strictement vers e donc $e - v_q > 0$ et $q! > 0$. J'en conclus que $q!\,(e - v_q) \in \mathbb{N}^*$.

b.Soit $n \in \mathbb{N}$ *tq* $n > q$ .Alors $v_n - v_q > 0$ car v est strictement croissante. De plus,

$$q\,!\,(v_n - v_q) = q! \sum_{p=q+1}^{n} \frac{1}{p!} = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \cdots + \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} .. + \frac{1}{(q+1)(q+2)\ldots.n}$$

$$\leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} .. + \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)+1}}$$

Ainsi, $0 < q!\,(v_n - v_q) \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + .. + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$.

d. $\underbrace{\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + .. + \frac{1}{(q+1)^{n-q}}}_{somme\ géométrique\ de\ raison\ \frac{1}{q+1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q-1+1}}{1-\frac{1}{q+1}} \frac{1}{q+1} = \frac{1-\left(\frac{1}{q+1}\right)^{n-q}}{q} < \frac{1}{q}$. Par conséquent, $0 < q!\,(v_n - v_q) < \frac{1}{q}$.

e. Or, il n'existe aucun entier strictement compris entre 0 et $\frac{1}{q}$. Donc l'hypothèse « e rationnel » aboutit à une contradiction. J'en conclus que e est irrationnel OUF !!!!